Elhanan Motzkin

Un invariant conforme p-adique

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1968-1969), exp. n° 1, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1968-1969____A1_0>

UN INVARIANT CONFORME p-ADIQUE

par

Elhanan MOTZKIN

Soit K un corps valué complet algébriquement clos ultramétrique.

On se propose d'associer à chaque ensemble quasi-connexe dans K une structure arborescente numérotée invariante par transformations bi-analytiques.

Soit Q un quasi-connexe et soit S son complémentaire. On suppose S borné. Soit D_o le plus petit disque circonférencié contenant S et soit r_o le rayon de D_o. Soient D_o^i les disques non-circonférenciés de rayon r_o contenus dans D_o. Pour chaque i, soit D_1^i le plus petit disque circonférencié contenant $D_o^i \cap S$ et soit son rayon r_1^i. On démontre facilement :

LEMME. $D_o^i \cap S \neq D_o^i$ <u>implique</u> $r_1^i < r_o$.

On peut maintenant procéder à la construction de l'arbre. D'un point correspondant à D_o ("la racine") on étend des arêtes à des points correspondant aux disques intérieurs D_o^i. On a les cas suivants :

<u>Cas 1</u> : $D_o^i \cap S = \emptyset$. On écrit $\emptyset$ sur l'arête reliant D_o à D_o^i.

<u>Cas 2</u> : $D_o^i \cap S \neq \emptyset$. On écrit r_1^i/r_o sur l'arête reliant D_o à D_o^i.

Enfin on ajoute une arête reliant D_o au "disque extérieur" $\complement D_o$ marquée I.

On note que dans le cas 2 il est possible que $r_1^i/_{r_o}$ soit égal à 1 ($D_o^i \cap S = D_o^i$), à 0 ($D_o^i \cap S$ est un point), ou à un nombre n'appartenant pas au groupe des valeurs (la circonférence de D_1^i est vide). Si aucune de ces possibilités n'intervient, on peut continuer le processus :

Pour chaque i, on relie le point correspondant à D_1^i à des points correspondants à ses disques intérieurs D_1^{ij}. Si $D_1^{ij} \cap S = \emptyset$ on écrit $\emptyset$ sur l'arête (D_1^i , D_1^{ij}), et si $D_1^{ij} \cap S \neq \emptyset$ on écrit r_2^{ij} / r_1^i, où r_2^{ij} est le rayon du plus petit disque contenant $D_1^{ij} \cap S$.

Exception : Si $D_o^i \cap S = \emptyset$ pour tous les disques intérieurs D_o^i, sauf au plus deux (disons i_1 et i_2), on remplace le point correspondant à la racine par une arête reliant $D_o^{i_1}$ à $D_o^{i_2}$. Si le plus petit disque circonférencié contenant $D_o^{i_1} \cap S$ (resp. $D_o^{i_2} \cap S$) est noté $D_1^{i_1}$ (resp. $D_1^{i_2}$) et son rayon $r_1^{i_1}$ (resp. $r_1^{i_2}$), alors on écrit sur l'arête : $\min (r_1^{i_1}/r_1^{i_2} , r_1^{i_2}/r_1^{i_1})$.

THEOREME 1. <u>Le disque correspondant à une chaîne infinie est nécessairement circonférencié et est contenu entièrement dans</u> S.

La démonstration fait usage des propriétés des ensembles quasi-connexes.

THEOREME 2. Soit T une homographie, tel que $T(S)$ soit un ensemble borné. Alors l'arbre associé à $T(Q)$ est le même que l'arbre associé à Q.

Dans la démonstration, on utilise le fait que l'image d'un disque par inversion est un disque. On rappelle à ce propos que M. Krasner a démontré que $T(Q)$ est quasi-connexe si Q l'est, ce qui donne un sens à l'arbre de $T(Q)$. D'autre part, on voit que, si les structures topologique et numérique de l'arbre sont conservées, la racine a pu être déplacée, ou même éliminée à la faveur d'une arête ; un peu comme si on relevait un fil à des points différents en laissant tomber les bouts.

Nous pouvons maintenant laisser tomber la restriction S borné, puisque par une homographie, on peut toujours se ramener à ce cas.

Le reste de la démonstration utilise intimement le polygone de valuation décrit par M. Lazard [1] et par P. Robba et moi-même [2].

On établit d'abord la forme du polygone dans le cas d'une fonction analytique bijectif sur un intervalle $r_1 \prec |x| \prec r_2$ ($\prec$ représente $<$ ou $\leq$). On trouve que sur l'intervalle, le polygone est de pente 1, 0 ou -1. Si on normalise de façon à ce que D_o soit le disque unité $|x| \leq 1$ et que l'image de $|x| > 1$ soit $|x| > 1$, le polygone sur $|x| > 1$ est nécessairement de pente 1.

LEMME. L'image par une fonction analytique bijective d'un disque est un disque [3]. L'image par une fonction analytique bijective d'une couronne est une couronne avec le même rapport de rayons.

THEOREME 3. <u>Soit</u> f <u>une fonction analytique bijective. Alors</u> f <u>conserve toutes les branches infinies, ainsi que les arêtes non-numérotées</u> 1 .

La démonstration se fait niveau par niveau et dépend des observations suivantes :

1) le graphe de f sur $|x| > 1$ existe et sa pente égale 1. Le graphe étant continu quel que soit le point 0 , il ne peut pas avoir de pente -1 . même si $|x| \leq 1$.

2) si le polygone de $f(x-a)$ est de pente 0 sur l'intervalle $r_1 < |x| \leq 1$, le polygone de $f - a$ sera de pente 1 (si f est bijective).

Pour faire marcher l'induction, on plonge éventuellement K dans un corps dont le corps de restes est non-dénombrable [4].

Remarque. Si f est une fonction analytique bijective sur Q , f^{-1} définie sur $f(Q)$ peut ne pas être analytique. En effet, soit Q le quasi-connexe comme suit : pour chaque disque intérieur D sur $|x| = 1$ on fait correspondre l'un des deux disques intérieurs définis par $\sqrt{x}$ $(x \in D)$. Soit $f = x^2$. Alors f est analytique sur Q . Mais $f^{-1} = \sqrt{x}$ n'est pas analytique sur $f(Q) = \{ |x| = 1 \}$, puisque $\sqrt{x}$ ne satisfait pas au principe du prolongement analytique.

THEOREME 4. <u>Soit</u> f <u>analytique bijective sur</u> Q . <u>Alors</u> f <u>diminue le nombre d'arêtes marquées</u> 1 .

COROLLAIRE. f <u>conserve l'arbre si</u> f <u>est bi-analytique.</u>

COROLLAIRE. L'image d'un quasi-connexe par une fonction analytique bijective est un quasi-connexe.

THEOREME 5. Si K a un corps de restes non dénombrables et si Ω est est régulier, f analytique bijective implique f bi-analytique.

Notons que l'arbre est extrêmement rigide.

THEOREME 6. Soit f analytique bijective. Alors f permute linéairement les arêtes à chaque sommet si et seulement si f est bi-analytique [5].

BIRBLIOGRAPHIE

[1] LAZARD (M.). - Publications I.H.E.S., n° 14.

[2] MOTZKIN (E.) et ROBBA (P.). - Ensembles satisfaisant au principe du prolongement analytique (à paraître).

[3] Cette proposition a été trouvée indépendamment par Mme Mme DESCOMPS-GUILLOU.

[4] Cf. KRASNER (M.). - Colloque de Clermont-Ferrand, 1964. %

[5] Ces deux théorèmes m'ont été signalés par P. ROBBA (communication orale).
