SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

BÉNALI BENZAGHOU

Algèbres de Hadamard

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1968-1969), exp. nº 16, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1968-1969____A16_0>

ALGEBRES DE HADAMARD

par

Bénali BENZAGHOU

-:-:-:-:-:-:-

Soit K un corps commutatif, de caractéristique zéro. L'algèbre de Hadamard $\mathcal{H}(K)$ est le K-module des séries formelles à coefficients dans K muni du produit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n X^n \quad .$$

Les séries $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ telles que les a_n satisfont à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants (qui dépend de α) forment une sous-algèbre $\mathcal{R}(K)$.

$$\{\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K)\} \Leftrightarrow \{\alpha = \frac{P(X)}{Q(X)} \in K(X) \ , \quad Q(0) \neq 0 \text{ et } d^o P < d^o Q\}$$

$$\Leftrightarrow \{a_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n)\, \alpha_i^n \ , \ P_i \in K'[X] \ , \ K' \text{ extension algébrique de } K \ , \ \alpha_i \in K'\} .$$

Si $E \subset K$, nous notons

$$\mathcal{R}(E,K) = \{\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K) \ , \ a_n \in E \text{ pour tout } n\} .$$

L'étude de $\mathcal{R}(K)$ est celle de la conservation de la rationnalité d'une série de Taylor par des opérations algébriques sur les coefficients de la série.

Soit A un anneau commutatif, intègre, unitaire, K son corps des quotients.

Désignons par $\mathcal{R}(A)$ l'ensemble des séries formelles

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{s} a_n X^n \ , \quad a_n \in A \quad \text{et} \quad a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \dots + q_h a_n \ ,$$

$q_i \in A$, la relation de récurrence (qui dépend de $\mathcal{A}$) étant de longueur minimum.

Anneaux de Fatou

Un anneau commutatif unitaire intègre sera dit de Fatou si $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A, K)$. Ce qui équivaut à :

quel que soit $\dfrac{P(X)}{Q(X)} \in K(X)$, $(P, Q) = 1$, $d^o P < d^o Q$, $Q(0) = 1$;

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \qquad \text{la série de Taylor à l'origine ,}$$

alors $a_n \in A$ pour tout n implique $Q(X) \in A[X]$.

$\mathbb{Z}$ satisfait à cette propriété ("lemme de Fatou" [2]) , un anneau d'entiers algèbriques aussi [3] . Plus généralement :

THEOREME. Un anneau intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 est un anneau de Fatou.

En particulier, un anneau de Krull est un anneau de Fatou. Un anneau de Fatou est complètement intégralement clos. Pour un anneau de valuation A :

$$A \text{ est de Fatou} \Leftrightarrow \text{la valuation est de hauteur } 1 .$$

Nous avons

anneau intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1. $\Rightarrow$ anneau de Fatou $\Rightarrow$ anneau complètement intégralement clos

Le prolbème reste ouvert de savoir si la classe des anneaux de Fatou est disctincte des deux classes qui l'encadrent ci-dessus.

Si A est un anneau de Fatou, alors $A[X]$ est encore de Fatou ; de même un anneau d'entiers A' d'une extension algébrique de K . Par contre, le problème reste ouvert pour $A[[X]]$.

<u>Unités de</u> $\mathcal{R}(K)$

THEOREME. <u>Un élément</u> $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ <u>de</u> $\mathcal{R}(K)$ <u>est inversible dans</u> $\mathcal{R}(K)$ <u>si et seulement si il existe</u> $\alpha_o , \ldots , \alpha_{m-1}$ <u>dans</u> K^* , $m \geq 1$, <u>tels que</u>, <u>pour</u> $\mu = 0, 1, \ldots , m-1$:

$$a_\mu \in K^*$$

$$a_{\mu+tm} = a_\mu \alpha_\mu^t \quad , \quad t \in \mathbb{N} .$$

<u>Un théorème de division dans</u> $\mathcal{R}(K)$

Une suite (a_n) de $\mathbb{Q}$ sera dite de Pólya si presque toute valuation de $\mathbb{Q}$ est triviale sur la suite (a_n) .

Une suite de nombres algébriques (a_n) est de Pólya si la suite $(N(a_n))$, où $N(x)$ est la norme absolue de x, est de Pólya.

Une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ telle qu'il existe $\alpha_o, \ldots, \alpha_{n-1} \in K$, tels que pour $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$, $a_{\mu+t_m} = a_\mu \alpha_\mu^t$, sera dite une fonction de Pólya.

THEOREME. Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro (contenant $\mathbb{Q}$). Soient $\mathcal{A} = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$ et $\mathcal{B} = \sum b_n X^n \in \mathcal{R}(K)$ et supposons $I(\mathcal{B}) = \{n, b_n = 0\} \subset I(\mathcal{A})$. Posons $a_n = b_n c_n$, en convenant $c_n = 1$ lorsque $b_n = 0$.

Si c_n est une suite de Pólya de $\mathbb{Q}$, alors $\sum c_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$ et est une fonction de Pólya.

Pólya avait étudié le cas $b_n = 1$ pour tout n et $a_n \in \mathbb{Z}$ [4].

Pour une suite (a_n) de Pólya dans $\mathbb{Q}$, nous avons le critère de localisation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{pour tout } p \text{ premier, } \sum_n |a_n|_p X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}) \\ \text{et } \sum_n \operatorname{sgn}(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}) \end{cases}$$

Le théorème de division est seulement conjecturé lorsque (c_n) est une suite de Pólya d'un corps de nombres. En combinant le théorème de division et la caractérisation des unités, nous obtenons cette généralisation d'un résultat de Pólya :

Soit (a_n) une suite de Pólya d'un corps de nombres k. Alors

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K) \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ est une fonction de Pólya .}$$

Comme application, nous avons le résultat suivant :

Soit (α_n) une suite d'unités algébriques satisfaisant à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants. Alors il existe des unités algébriques $\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ telles que pour $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$, $\alpha_{\mu+tm} = a_\mu \alpha_\mu^t$ pour tout $t \in \mathbb{N}$.

Définissons $\mathcal{S}_j(K) = \{ \sum a_n X^n ,\ \exists P_o, \ldots, P_{m-1} \in K[X] ,$

$$d^o P_\mu \leq j \text{ et } a_{\mu+tm} = P_\mu(t) \text{ pour } \mu = 0, 1, \ldots, m-1 \,;\, t \in \mathbb{N} \} .$$

Alors nous avons le résultat suivant analogue au théorème de Dirichlet sur les unités algébriques.

Soit k une extension algébrique de degré d de $\mathbb{Q}$. $\mathcal{C}$ son anneau d'entiers, $\mathcal{U}$ son groupe d'unités.

a) $\mathcal{R}(k)$ est une $\mathcal{R}(\mathbb{Q})$-algèbre entière, de type fini,

b) $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ est une $\mathcal{R}(\mathbb{Z})$-algèbre entière, de type fini,

c) $\mathcal{R}(\mathcal{U}, k)$ est le groupe d'unités de $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ et

$$\mathcal{R}(\mathcal{U}, k) \simeq \mathcal{S}'_o \times \mathcal{S}_1^r$$

où

- $\mathcal{S}'_o$ est un groupe commutatif dont tous les éléments sont d'ordre inférieur ou égal à l'ordre du groupe des racines de l'unité de k
- $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_1(\mathbb{Z})$
- r est le nombre de Dirichlet de k.

Si k_s est le groupes des S-unités de k, $\mathcal{R}(k_s, k)$ est un groupe multiplicatif isomorphe à $\mathcal{S}'_o \times \mathcal{S}_1^m$, où m est le nombre de S-unités fondamentales de k_s.

Signalons également l'application suivante : soit (a_n) une suite d'entiers algébriques non nuls. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{a_n} \in \mathcal{R}(\overline{\mathbb{Q}}) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\overline{\mathbb{Q}}) \quad .$$

Les démonstrations des résultats signalés ont été publiées dans quatre notes aux comptes-rendus de l'Ac. des Sc. de Paris [1] et exposées au Séminaire Delange-Pisot-Poitou (1967-68 et 1968-69). Une étude plus systématique des Algèbres de Hadamard paraîtra dans le Bulletin des Sciences Mathématiques.

-:-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENZAGHOU B. - Comptes rendus Ac. Sc. Paris, série A , t. 266, (1968), p. 652-654. t. 267 (1968) p. 212-214. t. 267 (1968), p. 913-915. t. 268 (1969) p. 1235-1237.

[2] FATOU P. - Acta Math. Uppsala - t. 30 (1906) p. 335-400.

[3] PISOT Ch. - Ann. Sc. Sup. Pisa - série 2, t. 7 (1938) p. 205-248.

[4] POLYA G. - J. Für reine and angew. Math. t. 151, (1921) p. 1-31.

-:-:-:-:-:-:-