JACQUES LESCA
MICHEL MENDÈS FRANCE

Ensembles normaux

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1968-1969), exp. nº 14, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1968-1969____A14_0>

ENSEMBLES NORMAUX

par

Jacques LESCA , Michel MENDES FRANCE

INTRODUCTION.

Soit Λ (λ_n) une suite infinie de nombres réels ; le nombre réel x est dit Λ-normal si la suite $x\Lambda = (x-\lambda_n)$ est équirépartie (mod 1). On désigne par $B(\Lambda)$ l'ensemble des nombres normaux.

Nous établissons dans cet article deux résultats concernant les suites d'entiers. Soit S l'ensemble des suites croissantes d'entiers. Soit φ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Λ étant dans S, on pose $\varphi(\Lambda) = (\varphi(\lambda_n))$. Nous démontrons :

THEOREME 1. Si pour tout $\Lambda \in S$, les deux ensembles $B(\varphi(\Lambda))$ et $B(\Lambda)$ sont égaux, alors φ est nécessairement de la forme

$$\varphi(z) = z + \text{const.}$$

pour $z \in \mathbb{N}$ suffisamment grand.

Ce résultat est "fin" en ce sens que si on n'impose la condition $B(\varphi(\Lambda)) = B(\Lambda)$ que pour presque tous les $\Lambda \in S$ (on munira S d'une mesure canonique), alors l'application φ n'est plus déterminée de façon aussi précise. On montre en effet :

THEOREME 2. Soit φ un polynôme non constant défini de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Pour presque tous les $\Lambda \in S$, on a l'égalité : $B(\varphi(\Lambda)) = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

En choisissant $\varphi(z) = z$, on voit que le théorème implique que $B(\Lambda) = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ presque partout : par conséquent pour tout polynôme φ non constant défini de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, on a $B(\varphi(\Lambda)) = B(\Lambda)$ presque partout.

Remarque

Le théorème 2 signifie que l'application $B \circ \varphi$ définie de S dans $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ est presque partout constante. Peut-on caractériser les applications $\Psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ qui sont telles que $B \circ \Psi$ soit presque partout constantes ? Ce problème est en rapport avec celui qui consiste à déterminer les Λ tels que $B(\Lambda) = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

L'article est divisé en deux parties : la première concerne la démonstration du théorème 1, la seconde concerne la démonstration du théorème 2.

Démonstration du théorème 1

§.1. - Préliminaires

Nous identifions dans toute cette partie le tore $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ au cercle T de longueur unitée, orienté et muni d'une origine 0. Si x est un nombre réel, le symbole $\|x\|$ représente la distance de x à l'entier le plus voisin.

Soit φ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, Nous démontrons que si φ n'est pas de la forme $\varphi(z) = z + \text{const.}$ pour $z \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, alors il existe $\Lambda \in S$ tel que $B(\varphi(\Lambda)) \neq B(\Lambda)$. Nous sommes amenés à démontrer :

" Soit $U = (u_n)$ une suite croissante d'entiers qui satisfait à l'une des 5 conditions suivantes :

(a) $\varphi(u_n) - u_n$ prend une infinité de fois chacune des deux valeurs a et b $(a \neq b)$,

(b) $\varphi(u_n) - u_n$ est non bornée et $\underline{\lim} \dfrac{\varphi(u_n)}{u_n} = 1$,

(c) $\varphi(u_n)/u_n$ tend vers l'infini avec n,

(d) $\varphi(u_n)/u_n$ tend vers 2 quand n croit indéfiniment.

(e) Pour tout entier $n > 0$, $\varphi(u_n) > u_n$ et il existe une constante $\eta \in]0, \frac{1}{4}]$ telle que

$$\eta \leq \| u_n / \varphi(u_n) \| \leq \tfrac{1}{2} - \eta,$$

alors il existe une sous suite de Λ de U telle que $B(\Lambda) \neq B(\varphi(\Lambda))$ "

Pour démontrer dans chacune des cinq hypothèses ci-dessus l'existence d'une telle sous-suite, nous faisons cinq démonstrations. Dans chacune on se donne à priori une sous suite (θ_n) équirépartie modulo 1 et on construit x et Λ de telle sorte que l'une des suites $x\Lambda$, $x\varphi(\Lambda)$ soit adjacente à (θ_n) (donc équirépartie modulo 1) et l'autre non partout dense modulo 1. Chaque fois x est obtenu comme intersection d'intervalles fermés emboités dont le diamètre tend vers 0. (Dans chaque cas, il est possible de construire, dans tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$, conjointement à la suite Λ, un ensemble d'éléments x vérifiant les conditions ci-dessus, ensemble possèdant la puissance du continu).

Ceci démontre bien le théorème. En effet, supposons $(\varphi(u_n) - u_n)$ non constante à partir d'un certain rang :

(1) Si $(\varphi(n)-n)$ est bornée on a nécessairement la propriété (a) pour une suite U convenable.

(2) Si $(\varphi(n)-n)$ est non bornée supérieurement, il existe une suite U possédant l'une des propriétés (b), (c), (d), (e) précédentes.

(3) Si φ possède une valeur d'accumulation, le résultat final est facile.

(4) Si φ est décroissante et ne possède pas une valeur d'accumulation, on peut construire une sous suite infinie U' telle que la restriction de φ à U' soit injective et en déduire une suite U pour laquelle on a une des propriétés (a), (b), (c), (d), (e) lorsqu'on remplace φ par φ^{-1}, bien définie dans $\varphi(U')$.

§.2. - Cas (a)

On suppose que l'application φ est telle qu'il existe une suite $U \in S$ pour laquelle $\varphi(u_n) - u_n$ prend une infinité de fois chacune des deux valeurs a et b $(a \neq b)$.

Conditions imposées

Construisons les intervalles fermés de $\mathbb{R}$, I_o, I_1, ... et la suite $\Lambda = (\lambda_n) \in S$ de sorte que

(1) $\qquad x \in I_o \Rightarrow \|(b-a)x\| \geq 1/4$

(2) $\qquad I_o \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$

(3) $\qquad \lambda_n \text{ diam } (I_{n-1}) \geq 2 \qquad (n \geq 1)$

(4) $\qquad x \in I_n \Rightarrow \|x\,\lambda_n - \theta_n\| \leq 1/n \qquad (n \geq 1)$

(5) $$\begin{cases} \|\theta_n\| \leq 3/8 \Rightarrow \varphi(\lambda_n) - \lambda_n = a \\ \|\theta_n\| > 3/8 \Rightarrow \varphi(\lambda_n) - \lambda_n = b \end{cases} \qquad (n \geq 1)$$

Les conditions ci-dessus résolvent le problème. En effet, si $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$, $x\Lambda$ est équirépartie (mod 1) puisque d'après (4), cette suite est adjacente (mod 1) à (θ_n). Par contre, $x\,\varphi(\Lambda)$ n'est pas dense (mod 1). En effet la suite $(\lambda_n + a)x$ est équirépartie (mod 1), mais d'après (1) et (5) la suite $x\varphi(\Lambda)$ diffère de la précédente : pour tout entier n, on a

$$\|x\ \varphi(\lambda_n) - a\,x\| \le 3/8 + 1/n$$

Construction :

On construit dans l'ordre I_o, λ_1, I_1, λ_2, ... I_o est d'abord choisit de façon à satisfaire la condition (1). Supposons que l'intervalle I_{n-1} soit construit. On choisit λ_n de façon à satisfaire (3) et (5). On construit enfin I_n de façon à vérifier la condition (4) et (2), ce qui est possible puisque λ_n diam $(I_{n-1}) \ge 2$.

§. 3. - Cas (b)

On suppose que $\varphi(u_n) - u_n$ est non bornée et que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(u_n)}{u_n} = 1$$

Conditions imposées

Nous construisons une double suite d'intervalles réels

$$I_n = [x_n - \ell_n\ ,\ x_n + \ell_n]$$
$$I'_n = [x'_n - \ell'_n\ ,\ x'_n + \ell'_n]$$

conjointement à la suite λ_n.

Soit C l'ensemble des nombres x tels que la suite $x(\varphi(u_n) - u_n)$ soit dense (mod 1). Comme la suite $\varphi(u_n) - u_n$ est non bornée, on sait que C est de mesure pleine, donc partout dense.

On impose aux intervalles I_n, I'_n et à λ_n les conditions suivantes :

(1) $\quad I_o \supset I'_o \supset I_1 \supset I'_1 \supset I_2 \dots$

(2) $\quad \ell'_{n-1} \varphi(\lambda_n) \geq 1 \qquad (n \geq 1)$

(3) $\quad \|x_n \varphi(\lambda_n) - \theta_n\| = 0 \qquad (n \geq 1)$

(4) $\quad \ell_n \varphi(\lambda_n) = \frac{1}{n} \qquad (n \geq 1)$

(5) $\quad x'_n \in C \qquad (n \geq 0)$

(6) $\quad (x'_{n-1} - x_n) \varphi(\lambda_n) \leq \frac{1}{2} \qquad (n \geq 1)$

(7) $\quad (\varphi(\lambda_n) - \lambda_n) / \varphi(\lambda_n) \leq \frac{1}{n} \qquad (n \geq 1)$

(8) $$\begin{cases} \|(\varphi(\lambda_n) - \lambda_n) x'_{n-1}\| \leq \frac{1}{8} & \text{si } \|\theta_n\| \leq \frac{1}{2} \\ \|(\varphi(\lambda_n) - \lambda_n) x'_{n-1}\| \geq \frac{3}{8} & \text{si } \|\theta_n\| > \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (n \geq 1)$$

Les conditions ci-dessus résolvent le problème. En effet, d'après (3) et (4), si x appartient à $\bigcap_n I_n$, la suite $x\varphi(\Lambda)$ est adjacente (mod 1) à la suite (θ_n) donc $x\varphi(\Lambda)$ est équirépartie (mod 1).

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} x_n \lambda_n &= x_n \varphi(\lambda_n) + x_n (\lambda_n - \varphi(\lambda_n)) \\ &= x_n \varphi(\lambda_n) - (x_n - x'_{n-1})(\varphi(\lambda_n) - \lambda_n) + x'_{n-1}(\varphi(\lambda_n) - \lambda_n) \end{aligned}$$

Les conditions (3), (7), (6) et (8) conduisent à l'inégalité

$$\|x_n \lambda_n\| \leq \frac{3}{8} + \frac{1}{2n}$$

Ceci, compte tenu de (4), prouve que la suite $x\Lambda$ n'est pas partout dense (mod 1).

Construction : On construit dans l'ordre

$$I_o, \lambda_1, x_1, I_1, x'_1, I'_1, \lambda_2, x_2, I_2, x'_2, I'_2, \ldots$$

L'intervalle I_o est pris arbitrairement. Supposons I_{n-1} construit et toutes les relations précédentes vérifiées. λ_n est construit de façon à satisfaire (2), (7) et (8). Ceci est possible car $x'_{n-1} \in C$. x_n est choisi de façon à satisfaire (3) et (6). ℓ_n est construit de façon à satisfaire $I_n \subset I'_{n-1}$. x'_n est choisi dans l'intérieur de I_n de façon à satisfaire (5). Enfin ℓ'_n est choisi suffisamment petit pour vérifier l'inclusion $I'_n \subset I_n$.

§.4. - Cas (c)

On suppose que $\dfrac{\varphi(u_n)}{u_n}$ croit indéfiniment.

Conditions imposées

Nous construisons deux suites d'intervalles fermés $I_1, I_2, \ldots, I'_o, I'_1, \ldots$ et une suite $\Lambda = (\lambda_n) \in S$ tels que

(1) $\qquad I_o \subset I_1 \subset I'_1 \subset I_2 \subset I'_2 \subset \ldots$

(2) $\qquad \lambda_n \operatorname{diam}(I'_{n-1}) \geq 2 \qquad (n \geq 1)$

(3) $\qquad \dfrac{\varphi(\lambda_n)}{\lambda_n} > n \qquad (n \geq 1)$

(4) $\qquad x \in I_n \Rightarrow \|x\lambda_n - \theta_n\| \leq \dfrac{1}{n} \qquad (n \geq 1)$

(5) $\qquad x \in I'_n \Rightarrow \|x\,\varphi(\lambda_n)\| \leq \dfrac{1}{4} \qquad (n \geq 1)$

Les conditions imposées résolvent le problème. En effet, si $x \in \bigcap_n I_n$, alors d'après (4), la suite $x\Lambda$ est adjacente (mod 1), à la suite (θ_n). $x\Lambda$ est donc équirépartie (mod 1). Par contre, la suite $x\varphi(\Lambda)$ qui vérifie (5) n'est pas dense modulo 1.

Construction : On construit dans l'ordre

$$I'_o\,,\ \lambda_1\,,\ I_1\,,\ I'_1\,,\ \lambda'_1\,,\ \lambda_2\,,\ I_2\,,\ I'_2\,,\ \ldots$$

I'_o est un intervalle non vide arbitraire. I'_{n-1} étant supposé construit, on construit λ_n suffisamment grand pour satisfaire (2) et (3). Compte tenu de (2), il est possible de construire I_n inclus dans I'_{n-1} de sorte que (4) soit vérifié. Enfin I'_n est un intervalle inclu dans I_n et qui vérifie (5) : ceci est rendu possible par les conditions (4) et (3).

§.5. - Cas (d)

On suppose que $\dfrac{\varphi(u_n)}{u_n}$ tend vers 2 .

On définit la suite (η_n) par

$$\begin{cases} 0 \leq \eta_n \leq \dfrac{1}{4} \\ 2\,\eta_n \equiv \theta_n \pmod 1 \end{cases} \qquad (n \geq 0)$$

Par une construction analogue à celles des paragraphes précédents, on détermine une sous-suite Λ de U et $x \in \mathbb{R}$ tels que la suite $x\Lambda$ soit adjacente (mod 1) à la suite (η_n). $x\Lambda$ est donc non équirépartie (mod 1). Par ailleurs, la suite $x\varphi(\Lambda)$ est adjacente à (θ_n) donc $x \in B(\varphi(\Lambda))$.

§. 6. - Cas (e)

On suppose que pour tout entier n, $\varphi(u_n) > u_n$ et il existe $\eta \in]0, \frac{1}{4}]$ telle que

$$\eta \leq \left\| \frac{u_n}{\varphi(u_n)} \right\| \leq \frac{1}{2} - \eta \quad .$$

Etablissons un résultat préliminaire.

Lemme : Soient $\eta \in]0, \frac{1}{4}]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\eta \leq \|\alpha\| \leq \frac{1}{2} - \eta \quad .$$

Il existe un entier $r = r(\eta)$ tel que : Pour tout β réel, il existe des entiers u et v tels que

$$\begin{cases} |u| < r \\ |v| < r \\ \|\alpha u - \beta\| \leq \frac{1}{6} \\ \|\alpha v - \beta\| \geq \frac{1}{3} \end{cases}$$

Démonstration : Soit $r = [\frac{1}{2\eta}] + 2$. Considérons les $2r+1$ points de $T = \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$:

$$S_r = \{ 0 , \pm \alpha , \pm 2\alpha , \dots , \pm r\alpha \} \quad .$$

Montrons que le plus grand arc connexe de $T - S_r$ a une longueur d au plus égale à $1/3$, (le lemme est bien une conséquence de ce dernier résultat).

A cause de la symétrie, on peut toujours supposer que $\eta \leq \alpha \leq \frac{1}{2} - \eta$. Considérons les deux cas :

1er cas : $\alpha \leq \frac{1}{3}$. Alors, compte tenu du fait que $2r\alpha > 1$, il est clair que $d \leq \alpha \leq \frac{1}{3}$.

<u>2e cas</u> : $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2} - \eta$. Considérons les points

$$\alpha\ ,\ 3\alpha\ ,\ 5\alpha\ ,\ \ldots\ ,\ s\alpha \qquad (s = r \text{ ou } r-1)$$

et leurs symétriques

$$-\alpha\ ,\ -3\alpha\ ,\ \ldots\ ,\ -s\alpha$$

Ces points sont distants de $\frac{1}{3}$ au moins et 2η au plus. Compte tenu du fait que le nombre de ces points est au moins r et de l'inégalité $2(r-1)\eta \geq 1$, il est clair qu'on a : $d \leq \frac{1}{3}$.

Le lemme étant établi, nous construisons les suites de nombres réels (γ_n) , $(\gamma_n^{(o)})$, (ℓ_n) et les suites d'entiers $U = (u_n)$ et $\Lambda = (\lambda_n)$ telles que $\Lambda \subset U$. On pose $I_n = [\gamma_n - \ell_n\ ,\ \gamma_n + \ell_n]$. On rappelle qu'il existe η tel que

$$(1) \qquad \eta \leq \left\|\frac{u_n}{\varphi(u_n)}\right\| \leq \frac{1}{2} - \eta$$

<u>Conditions imposées</u>

$$(2) \qquad I_o \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$$

$$(3) \qquad \varphi(\lambda_n)\,\ell_{n-1} \geq r+2 \qquad (r = r(\eta)\ ,\ \text{voir le lemme ci-dessus}) \qquad (n \geq 1)$$

$$(4) \qquad (\varphi(\lambda_n)) \text{ est une suite croissante}$$

$$(5) \qquad \|\varphi(\lambda_n)\,\gamma_n^{(o)} - \theta_n\| = 0 \qquad (n \geq 1)$$

$$(6) \qquad |\varphi(\lambda_n)\,\gamma_n^{(o)} - \varphi(\lambda_n)\,\gamma_{n-1}| \leq \frac{1}{2} \qquad (n \geq 1)$$

$$(7) \qquad \gamma_n = \gamma_n^{(o)} + \frac{u_n}{\varphi(\lambda_n)} \qquad (n \geq 1)$$

$$(8) \qquad u_n \leq r \qquad (n \geq 1)$$

$$(9) \qquad \ell_n\ \varphi(\lambda_n) = \frac{1}{n} \qquad (n \geq 1)$$

$$(10)\quad \begin{cases} \|\lambda_n \gamma_n - \theta_n\| \le \frac{1}{6} & \text{si } \|\theta_n\| \le \frac{1}{4} \\ \|\lambda_n \gamma_n - \theta_n\| \ge \frac{1}{3} & \text{si } \|\theta_n\| > \frac{1}{4} \end{cases} \qquad (n \ge 1)$$

Les conditions imposées résolvent le problème. En effet, si x appartient à $\bigcap_n I_n$, alors la suite $x\varphi(\Lambda)$ est adjacente modulo 1 à θ_n d'après (5), (7) et (9).; la suite $x\varphi(\Lambda)$ est donc équirépartie (mod 1).

Par ailleurs, d'après (9), (10) et compte tenu du fait que $\lambda_n < \varphi\,\lambda_n$:

$$\| x\,\lambda_n\| \le \frac{5}{12} + \frac{1}{n} \quad .$$

La suite $x\Lambda$ n'est donc pas équirépartie (mod 1).

Possibilité de la construction

On construit dans l'ordre γ_o, ℓ_o (et par suite I_o), λ_1 (et par suite ℓ_1 $\gamma_1^{(o)}$, u_1 (et par suite γ_1 et I_1), λ_2, ..., λ_n (et par suite ℓ_n), $\gamma_n^{(o)}$, u_n (et par suite γ_n et I_n), λ_{n+1}, ...

γ_o et ℓ_o sont arbitraires. Supposons construits tous les éléments d'indice inférieurs à $n > 0$. On choisit λ_n suffisamment grand pour réaliser (3) et (4). Les conditions (5) et (6) déterminent $\gamma_n^{(o)}$. u_n se construit de la façon suivante :

Le premier membre des inégalités (10) s'écrit en vertu de (7)

$$\|\lambda_n \gamma_n^{(o)} + u_n \frac{\lambda_n}{\varphi(\lambda_n)} - \theta_n\| \, .$$

Il est clair, d'après le lemme précédent et (1) qu'on peut construire u_n de sorte que (8) et (10) soient vérifiés. On peut alors écrire d'après (6), (7) et (8) :

$$\|\gamma_{n-1}-\gamma_n\| \leq \|\gamma_{n-1}-\gamma_n^{(o)}\|+\|\gamma_n^{(o)}-\gamma_n\| \leq \frac{1}{2\varphi(\lambda_n)}+\frac{r}{\varphi(\lambda_n)} \leq \frac{r+1}{\varphi(\lambda_n)}$$

Compte tenu de (3), I_n est bien inclus dans I_{n-1}.

Démonstration du théorème 2

Soit S la famille des suites croissantes $\Lambda = (\lambda_n)$ d'entiers positifs. A $\Lambda \in S$, on associe la fonction caractéristique $\varepsilon(\Lambda) = (\varepsilon_n(\Lambda))$ définie par

$$\varepsilon_n(\Lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \Lambda \\ 0 & \text{si } n \notin \Lambda \end{cases}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

La bijection ε ainsi construite permet de transporter la mesure de Haar normalisée de $D = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sur l'espace S. Dorénavant, nous supposerons S muni de cette mesure.

Soit $\delta = (\delta_n)$ une suite infinie de nombres complexes. On dit que δ est une suite <u>pseudo-aléatoire</u> si

$$\begin{cases} \text{(i)} & \text{pour tout } p \in \mathbb{Z}, \text{ la limite} \\ & \gamma(p) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{\delta}_k \delta_{k+p} \quad \text{existe}, \\ \text{(ii)} & \lim\limits_{p\to\infty} \gamma(p) = 0 \end{cases}$$

(voir [1], [2] et [3]).

Nous admettrons les cinq lemmes suivants qui sont classiques.

LEMME 1. Si δ est une suite pseudo-aléatoire et si f est une fonction presque périodique, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_k \ f(k) = 0 .$$

En particulier, une fonction pseudo-aléatoire a une moyenne nulle. (voir [2])

Soit T l'opérateur de translation dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. T est donc défini par $T(\delta_n) = (\delta_{n+1})$. On définit les itérées de T par $T^p(\delta_n) = (\delta_{n+p})$ pour $p \in \mathbb{Z}$.

LEMME 2. Soit $\delta \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que les limites suivantes existent :

$$\widetilde{M}(\delta) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_k \right|$$

$$M(\overline{\delta} \,.\, T^p \delta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{\delta}_k \ \delta_{k+p} = \gamma(p) \qquad p = 0, 1, 2, \ldots$$

Alors :

$$|\widetilde{M}(\delta)|^2 \leq M(|\gamma|)$$

En particulier si $\lim_{p\to\infty} \gamma(p) = 0$, alors $M(\delta) = 0$.

Soient a et b deux lettres. On dit qu'un élément $\theta \in \{a, b\}^{\mathbb{N}}$ est normal si pour tout entier $s > 0$, les 2^s s-uples de $\{a, b\}^s$ apparaissent chacun avec la fréquence 2^{-s} dans la suite θ. Si l'on munit $\{a, b\}^{\mathbb{N}}$ de la mesure habituelle (produit infini de la mesure de Bernoulli), on sait que

LEMME 3 (E. Borel). Presque tous les éléments de $\{a, b\}^{\mathbb{N}}$ sont normaux.

On montre aussi les deux résultats suivants :

LEMME 4. Si $\delta \in \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ est normal, alors $\delta^{(p)} = \delta \cdot T^p \delta$ est normal $p = 1, 2, \ldots$ (voir [4]).

LEMME 5. Une suite normale $\delta \in \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ est pseudo-aléatoire. (voir [4])

Avant d'attaquer -à proprement parler- la démonstration, on établit la proposition suivante :

PROPOSITION. Soit $\delta \in \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ une suite normale. Soit φ un polynôme à coefficients réels. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_k \exp 2i\pi \varphi(k) = 0 .$$

Ce résultat se montre par récurrence : si le degré du polynôme φ est 0, l'égalité découle des lemmes 1 et 5 par exemple.

Admettons la proposition pour des polynômes de degré $\nu-1$ ($\nu \geq 1$ entier). Soit ψ un polynôme de degré ν :

Considérons la fonction f :

$$f(n) = \delta_n \exp 2i\pi \psi(n) .$$

La moyenne

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} \overline{f(k)}\, f(k+p) \right|$$

s'écrit :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} \delta_k \delta_{k+p} \exp 2i\pi \left(\psi(k+p) - \psi(k)\right) \right| .$$

Le lemme 4 montre que la suite $\delta . T^p \delta$ est normale $(p = 1, 2, \ldots)$. Par ailleurs $\psi(. + p) - \psi(.)$ est un polynôme de degré $\nu - 1$ donc par hypothèse de récurrence, la moyenne est nulle. Enfin, du lemme 2, il découle que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_k \exp 2i\pi \psi(k) = 0 \quad .$$

Soit $\Lambda \in S$ et soit $\varepsilon(\Lambda)$ sa fonction caractéristique sur $\mathbf{N}$. Il est bien clair que

$$\sum_{j=1}^{\lambda_n} \varepsilon_j(\Lambda) = n .$$

Supposons que $\varepsilon(\Lambda) \in D$ soit normale. Alors les lemmes 2 et 5 impliquent que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (2\, \varepsilon_k(\Lambda) - 1) = 0$$

Donc

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{\lambda_n} \varepsilon_k(\Lambda) = \frac{n}{\lambda_n} \to \frac{1}{2}$$

Ainsi si $\varepsilon(\Lambda)$ est normale, alors $\lambda_n \sim 2n$.

LEMME 6. <u>Soit</u> φ <u>un polynôme à coefficients réels et soit</u> $\Lambda \in S$.
<u>Si</u> $\varepsilon(\Lambda)$ <u>est normale, alors</u>

$$B(\varphi(\Lambda)) = B(\varphi(\mathbf{N}))$$

En effet, soit x un nombre réel. Considérons la somme de Weyl

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \exp 2i\pi x \ \varphi(\lambda_j) ,$$

soit :

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\lambda_n} \varepsilon_j(\Lambda) \ \exp 2i\pi x \varphi(j) \ .$$

Comme $\varepsilon(\Lambda)$ est par hypothèse normale, on a $\lambda_n \sim 2n$. Par ailleurs, la proposition établie au paragraphe précédent conduit à l'estimation

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{j=1}^{\lambda_n} (2\,\varepsilon_j(\Lambda) - 1) \ \exp 2i\pi x \varphi(j) = o(1) \ .$$

Par suite

$$\sigma_n = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{j=1}^{\lambda_n} \exp \ 2i\pi x \varphi(j) + o(1) \ .$$

φ étant un polynôme, on sait que lorsque l'entier p tend vers l'infini, la moyenne

$$\frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} \exp \ 2i\pi x \varphi(j)$$

tend vers une limite. Donc :

$$\sigma_n = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} \exp 2i\pi \ \varphi(j) + o(1) \ .$$

Cette égalité prouve bien la double implication

$$x \in B(\varphi(\mathbb{N})) \Leftrightarrow x \in B(\varphi(\Lambda)) \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En particulier, si φ est un polynôme non constant défini de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, on sait que $B(\varphi(\mathbb{N})) = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Cette remarque, associée aux lemmes 3 et 6, prouve le théorème 2.

-:-:-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASS J, Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires, Bull. Soc. Math. France, 87, 1959, 1-69

[2] BERTRANDIAS J.P., Suites pseudo-aléatoires et critères d'équi-répartition modulo un, Compositio Math. 16, 1965, 23-28.

[3] CIGLER J., The fundamental theorem of Van der Corput on uniform distribution and its généralizations, Compositio Math. 16, 1965, 29-34.

[4] MENDES FRANCE M., Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-aléatoires, Journal d'Analyse math., 20, 1967, 1-56.

-:-:-:-:-:-:-:-