FRANÇOIS DRESS

Logique mathématique et analyse non-standard

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1968-1969), exp. nº 13, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1968-1969____A13_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
(J. LESCA)
Année 1968/1969, n° 13

14 mars & 21 mars 1969

LOGIQUE MATHEMATIQUE ET ANALYSE NON-STANDARD

par François DRESS

-:-:-:-

O/ AVERTISSEMENT

Nous présentons ici une introduction à l'arithmétique et à l'analyse non-standard, avec les préliminaires de logique indispensables à la compréhension de cette question Cet exposé ne veut pas être plus qu'un résumé très sommaire. En particulier, un certain nombre de définitions et de résultats seront donnés sous une forme abrégée voire incomplète, et les omissions seront peut-être de nature à scandaliser logiciens et mathématiciens épris de rigueur ...

Notre but est uniquement de donner au lecteur un aperçu très intuitif (ou naïf ?) de la question mais, s'il est intéressé, nous l'invitons très vivement à aller chercher la bonne parole dans les deux ouvrages fondamentaux suivants :

G KREISEL & J. L. KRIVINE - Eléments de logique mathématique - Dunod (Paris) 1967.

A ROBINSON - Non-standard analysis. North Holland Publishing Co (Amsterdam) 1966.

I/ LA COMPACITE EN LOGIQUE

Nous introduirons, sur l'exemple simple du calcul propositionnel, la notion de modèle ainsi que l'idée de base des divers théorèmes de compacité usités en logique.

Calcul propositionnel. On se donne un ensemble P de variables propositionnelles et on construit, de la manière qui se devine aisément, l'ensemble des propositions, noté $\mathrm{Prop}(P)$, en utilisant

- des propositions atomiques (qu'on appelle également symboles fonctionnels à 0 variable) qui sont : $\top$ (vrai), $\perp$ (faux) et les éléments de P,
- un symbole fonctionnel à 1 variable : $\neg$ (non),
- un symbole fonctionnel à 2 variables : $\vee$ (ou).

Naturellement, on utilise en pratique un certain nombre de symboles fonctionnels dérivés de ceux-ci, soit en fait des abréviations (& , $\rightarrow$, etc ...).

On appelle réalisation du calcul propositionnel construit sur P toute application $\delta : P \rightarrow \{0, 1\}$. En posant alors

i) $\perp \mapsto 0$, $\top \mapsto 1$,

ii) $\neg 1 \mapsto 0$, $\neg 0 \mapsto 1$,

iii) $\vee 00 \mapsto 0$, $\vee 01$, $\vee 10$, $\vee 11 \mapsto 1$,

on peut attribuer à toute proposition une valeur (0 ou 1 , soit intuitivement, faux ou vrai).

Modèles et théorème de finitude. Soient $\mathcal{A}$ un ensemble de propositions et δ une réalisation. On dit que δ est un modèle de $\mathcal{A}$ (on dit aussi que δ satisfait $\mathcal{A}$) si, pour toute proposition $A \in \mathcal{A}$, on a $\delta(A) = 1$.

(Remarque : on appellera théorème - au sens intuitif de théorème logique, tautologie - une proposition vraie dans **toute** réalisation).

THEOREME DE FINITUDE (dit aussi de COMPACITE) : Soit $\mathcal{A} \subset \mathrm{Prop}(P)$ un ensemble de propositions tel que tout sous-ensemble fini de $\mathcal{A}$ possède un modèle. Alors $\mathcal{A}$ possède un modèle.

Démonstration : Si $A \in \mathcal{A}$, on pose $\bar{A} = \{\delta \mid \delta(A) = 1\} \subset \{0,1\}^P$. Comme une proposition donnée A ne fait intervenir qu'un nombre fini de variables propositionnelles, $\bar{A}$ est fermé dans $\{0,1\}^P$ (muni de la topologie produit !).

L'hypothèse du théorème s'exprime dans $\{0,1\}^P$ par la propriété que toute intersection finie de $\bar{A}$ est non-vide. Mais $\{0,1\}^P$ est compact, et donc $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$ est non-vide, i. e. $\mathcal{A}$ possède un modèle.

Exemple concret. Utilisation du théorème de finitude pour démontrer le théorème suivant : pour qu'un groupe G soit totalement ordonnable, il faut et il suffit que tout sous-groupe de type fini de G soit totalement ordonnable.

On construit un calcul propositionnel sur $P = G^2$, et on considère l'ensemble $\mathcal{A}$ des formules

$$\begin{cases} (a,a) \text{ pour tout } a \in G \\ (a,b) \vee (b,a) \text{ pour tout } a \text{ , tout } b \in G \\ (a,b) \rightarrow \neg(b,a) \text{ pour tout } a \neq b \\ (a,b) \,\&\, (b,c) \rightarrow (a,c) \text{ pour tout } a \text{ , tout } b \text{ , tout } c \in G \\ (a,b) \rightarrow [\,(ac,bc) \,\&\, (ca,cb)\,] \text{ pour tout } a \text{ , tout } b \text{ , tout } c \in G \text{ .} \end{cases}$$

En posant $a < b$ si $\delta((a,b)) = 1$ et $a > b$ si $\delta((a,b)) = 0$, on établit une correspondance entre les réalisations δ qui satisfont $\mathcal{A}$ et les ordres totaux de G. A tout sous-ensemble fini $\alpha \subset \mathcal{A}$, on fait alors correspondre le sous-groupe de G engendré par les éléments de G (en nombre fini) qui apparaissent dans les formules de α ; on peut dès lors appliquer le théorème de finitude.

Remarque : on peut ensuite déduire aisément l'équivalence G totalement ordonnable $\Leftrightarrow$ G sans torsion.

II/ LANGAGES DU PREMIER ORDRE

On dispose ici d'un ensemble V de variables, d'un ensemble de symboles fonctionnels (ceux à 0 place étant appelés symboles de constantes) avec lesquels on fabriquera des termes ou objets : les variables et les constantes sont des termes et, si f est un symbole fonctionnel à n places et $t_1, t_2, \ldots, t_n$ des termes, $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est un terme.

On dispose également de symboles relationnels qui permettront de construire des propositions ou formules atomiques : si r est un symbole relationnel à k places et $t_1, t_2, \ldots, t_k$ des termes, $r(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ est une formule atomique.

On obtient enfin toutes les formules du langage, comme dans le calcul propositionnel, en utilisant

- $\top$, $\bot$ et les formules atomiques,
- $\neg$ et $\exists x$ (x parcourant l'ensemble des variables),
- $\vee$.

On a comme précédemment des abréviations (& , $\rightarrow$, $\forall x$, etc ...).

On peut maintenant définir la notion de réalisation du langage donné : un ensemble de base E non-vide, une application de l'ensemble des constantes dans E (on dira qu'une constante est le "nom" de son image dans E) et des applications des ensembles de symboles fonctionnels et relationnels dans des ensembles variés construits à partir de E (les curieux pourront obtenir des précisions supplémentaires en consultant le logicien de service). A partir de tout cela, on peut attribuer (même remarque) à chaque formule A du langage une valeur $\bar{A}$ dans E^V, valeur qui ne dépend en fait que des variables "libres" (i. e. intuitivement, non quantifiées) qui figurent dans la formule. En particulier, si une formule est "close", i. e. sans variable libre, sa valeur est soit $\emptyset$ soit E^V.

Etant donné un ensemble $\mathcal{A}$ de formules, on dit qu'une réalisation (d'ensemble de base E) est un modèle de $\mathcal{A}$ si, pour toute formule $A \in \mathcal{A}$, on a $\bar{A} = E^V$.

Et on a enfin un théorème de finitude, absolument semblable à celui que nous avons donné dans le cas du calcul propositionnel (quoique limité aux ensembles de formules closes).

III/ LANGAGES D'ORDRE SUPERIEUR

Langages à k espèces d'objets. Simple généralisation de ce qui précède : k espèces d'objets, donc k ensembles de variables, k ensembles de constantes et des ensembles de symboles fonctionnels et relationnels permettant tous les mélanges. Une réalisation devra être construite sur k ensembles de base $E_1, E_2, \ldots, E_k$, et la valeur d'une formule sera dans $E_1^{V_1} \times E_2^{V_2} \times \ldots \times E_k^{V_k}$.

Théorie des types. Autre généralisation, qui est celle que nous utiliserons pour définir les modèles non-standard de l'analyse.

Il y a une infinité d'espèces ou "types" d'objets. L'ensemble T des types est le plus petit ensemble possédant les propriétés

a) $0 \in T$,

b) si $\tau_1, \ldots, \tau_n \in T$, la suite $(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in T$.

Le type o est encore appelé type des individus, les types $(o, o, \ldots, o)$ types des relations n-aires, les types (o), $((o))$, ... types des ensembles, des ensembles d'ensembles, ... etc.

Un langage Λ en théorie des types est constitué par la donnée, pour chaque type $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$

- d'un ensemble de variables V_τ
- d'un ensemble de constantes C_τ (tous les ensembles V_τ et C_τ étant deux à deux disjoints),

- de deux symboles relationnels, $\in_\tau$ à n+1 places de types $\tau_1, \ldots, \tau_n, \tau$ et $=_\tau$ à 2 places de type τ.

A l'aide de ces données, des symboles logiques et des quantificateurs on peut construire l'ensembles des formules du langage Λ. Nous n'expliciterons toujours pas cette construction.

Une réalisation en théorie des types consiste en la donnée d'un ensemble de base A non-vide et, pour chaque type τ, d'un ensemble B_τ vérifiant

a) si $\tau = 0$, $B_\tau = A$,

b) si $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $B_\tau \subset \mathcal{P}(B_{\tau_1} \times \ldots \times B_{\tau_n})$.

On se donne alors des applications : $C_\tau \to B_\tau$ (on dira ici encore qu'une constante est le "nom" de son image) et, moyennant une utilisation convenable des symboles $\in_\tau$ et $=_\tau$ (cf. le logicien de service), on peut attribuer à toute formule de Λ une valeur dans le produit $\prod_{\tau \in T} B_\tau^{V_\tau}$.

Signalons enfin la notion de réalisation pleine $\{A_\tau\}$:

a) si $\tau = 0$, $A_\tau = A$,

b) si $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $A_\tau = \mathcal{P}(A_{\tau_1} \times \ldots \times A_{\tau_n})$.

Rappelons qu'on appelle formule close une formule dont toutes les variables sont liées, i.e. sous la dépendance d'un quantificateur. On appelle modèle d'un ensemble $\mathcal{A}$ de formules closes, une réalisation où toute formule de $\mathcal{A}$ possède $\prod_{\tau \in T} B_\tau^{V_\tau}$ pour la valeur.

THEOREME DE FINITUDE : soit $\mathcal{A}$ un ensemble de formules closes du langage Λ tel que tout sous-ensemble fini de $\mathcal{A}$ possède un modèle. Alors $\mathcal{A}$ possède un modèle.

La démonstration (omise ici ... !) est plus ou moins longue et pénible et consiste à dégringoler de langage en langage pour se ramener au théorème de finitude du calcul propositionnel. On peut aussi s'amuser à faire une démonstration directe en utilisant divers accessoires (fonctions de Skolem, ultra-filtres et ultra-produits, ...).

IV/ EXISTENCE D'UN MODELE NON-STANDARD DE L'ANALYSE

On considère un langage Λ dont une réalisation soit la réalisation pleine $\{A_\tau\}$ construite sur l'ensemble de base $A = \mathbb{N}$. On suppose en outre que les ensembles C_τ des constantes de Λ sont assez "gros" pour que chaque application : $C_\tau \to A_\tau$ soit surjective (i. e. pour que chaque élément de $\{A_\tau\}$ ait un nom dans le langage Λ).

Remarque : on trouve tout ce qu'on veut dans ce langage. Par exemple,

- les entiers naturels, éléments de A_o ,
- les entiers, éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subset A_{(o,o)}$,
- les rationnels, éléments de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset A_{((o,o),(o,o))}$,
- les réels, éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \subset A_{(((o,o))),(o,o)))}$,
- les fonctions réelles, éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \subset \ldots$,
- etc ...

On appelle Λ langage de l'analyse et $\{A_\tau\}$ modèle standard de l'analyse : $\{A_\tau\}$ est un modèle de l'ensemble $\mathcal{A}$ des formules qu'il vérifie (les formules vraies en analyse !!).

Et maintenant ? On augmente Λ en lui ajoutant UN symbole de constante, soit a , et on adjoint à $\mathcal{A}$ l'ensemble $\mathcal{A}_a$ des formules

$$a \neq 0 \ , \ a \neq 1 \ , \ldots , \ a \neq n \ , \ldots$$

(en désignant par n le nom de l'entier correspondant dans $A_o = \mathbb{N}$).

Tout sous-ensemble fini $\alpha \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{A}_a$ possède un modèle : il suffit d'envoyer la constante a sur un entier $m \in A_o$ tel que $(a \neq m) \notin \alpha \cap \mathcal{A}_a$, de garder leur valeur aux autres constantes, et de prendre $\{A_\tau\}$. D'après le théorème de finitude, $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}_a$ possède donc un modèle $\{B_\tau\}$, modèle strictement plus grand que $\{A_\tau\}$; en effet, la valeur de a ne peut pas être dans $\mathbb{N}$, i. e. $B_o \supsetneq A_o = \mathbb{N}$.

Abandonnant alors la constante ajoutée a et revenant au langage Λ, nous constatons que $\mathscr{A}$ possède un modèle strictement plus grand que le modèle plein construit sur $\mathbb{N}$. Un tel modèle sera appelé modèle non-standard de l'analyse.

V/ UN PEU D'ARITHMETIQUE ET D'ANALYSE NON-STANDARD

On sésignera par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble de base d'un modèle non-standard.

On appellera éléments standards les éléments de $\{B_\tau\}$ qui ont un nom dans Λ, éléments non-standards les autres. Mais il faut bien noter que, excepté les entiers standards de B_o, identifiés aux entiers de $A_o = \mathbb{N}$, un élément standard de $\{B_\tau\}$ ne peut pas être identifié à l'élément de $\{A_\tau\}$ qui porte le même nom. Ainsi, la constante de $C_{(o)}$ (le nom "ensemble des entiers") qui a pour image $\mathbb{N}$ dans $A_{(o)}$, a pour image $\mathbb{N}^*$ dans $B_{(o)}$.

On utilisera surabondamment la propriété que tout théorème de l'arithmé-tique et de l'analyse standard, qui peut s'exprimer par une formule de Λ, est un théorème de l'arithmétique et de l'analyse non-standard ... à condition bien sûr d'interpréter correctement les données. Un exemple des difficultés qu'on rencontrera est le suivant : si on conserve au mot fini son sens (ou plutôt son méta-sens) usuel, il n'est plus vrai en arithmétique non-standard que tout entier (de $\mathbb{N}^*$ donc) soit produit d'un nombre fini de nombres premiers. On va ainsi devoir perpétuellement jongler entre le "sens" dans Λ et le "méta-sens".

Une remarque : les modèles non-standards ne sont pas pleins. Autrement dit on n'a pas, si $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, $B_\tau = \mathcal{P}(B_{\tau_1} \times \dots \times B_{\tau_n})$. On va montrer plus précisément que $B_{(o)} \subsetneq \mathcal{P}(B_o)$ en prouvant que $\mathbb{N} \notin B_{(o)}$ (on dit qu'un tel élément est "externe" au modèle).

Le fait, pour un ensemble quelconque de nombres, de posséder un plus petit élément, est vrai pour les entiers dans le modèle standard. De même le fait, pour un ensemble quelconque de nombres, de posséder un complémentaire. Ces deux propriétés s'expriment aisément dans le langage Λ et sont donc vraies dans tous modèle non-standard. Si donc $\mathbb{N}$ appartenait à $B_{(o)}$, il aurait un complémentaire, appartenant également à $B_{(o)}$, et qui devrait posséder un plus petit élément ; cela est impossible car tout entier non nul possède un prédécesseur, et le prédécesseur d'un entier non-standard est un entier non-standard.

<u>Une autre remarque</u> : <u>les modèles non-standards sont très gros.</u>
On se souvient que l'existence des modèles non-standards a été prouvée grâce à l'adjonction d'UN entier "supplémentaire". De fait, $\mathbb{N}^*$ est démesurément plus gros que $\mathbb{N}$. On peut montrer que, pour toute suite finie d'exponentiations, on a

$$\mathrm{card}\,(\mathbb{N}^*) > 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{\aleph_o}}}}}}$$

(La démonstration se fait en travaillant sur les ensembles $\mathcal{P}^*([0,m])$, $\mathcal{P}^*(\mathcal{P}^*([0,m]))$, ... où m désigne un entier non-standard et $\mathcal{P}^*$ l'ensemble des parties "internes" au modèle). On notera que $\mathrm{card}(\mathbb{N}^*)$ désigne en fait le méta-cardinal de $\mathbb{N}^*$ (et non pas $\aleph_o^*$!!!).

<u>Les réels non-standards</u>. On a vu que les réels ont un nom dans Λ. Il existe donc un ensemble $\mathbb{R}^*$ des réels non-standards Nous allons donner quelques indications sur la métastructure de $\mathbb{R}^*$. Réparons auparavant un oubli : on appelle entiers finis les entiers standards, entiers infinis les entiers non-standards (ils sont supérieurs à tout entier standard). Les réels eux pourront être finis, infinis ou infinitésimaux (ces derniers étant inverses des réels infinis) Tout réel a fini peut s'écrire $a = {}^{s}a + {}^{\varepsilon}a$, ${}^{s}a$ étant le réel standard infiniment voisin, et ${}^{\varepsilon}a$ un réel infinitésimal. On appellera monade d'un réel standard l'ensemble (externe au modèle d'ailleurs) des réels infiniment voisins.

<u>Quelques méta-propriétés</u>. Nous donnons deux exemples A toute suite standard $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspond une suite non-standard $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (celle qui a le même nom dans Λ). On peut démontrer par exemple :

- (s_n) standard est bornée si et seulement si s_ω est un réel fini pour tout entier ω infini ;
- s standard est point d'accumulation de (s_n) standard si et seulement si il existe un entier infini ω tel que s = partie standard de s_ω ;
- (s_n) standard est une suite de Cauchy si et seulement si s_λ et s_μ sont infiniment voisins pour tout couple (λ, μ) d'entiers infinis.

Deuxième exemple : définition de l'intégrale de Riemann $I = \int_a^b f(x)\,dx$ par $I = {}^sS_f(\pi)$ où π est une partition fine $(x_o, x_1, \ldots, x_\omega)$ de (a, b) et $S_f(\pi)$ la somme $\sum_{j=1}^{\omega} f(x_j)\,(x_j - x_{j-1})$. Par partition fine, on entend une partition $x_o = a$, x_1, ..., $x_\omega = b$ telle que $x_j - x_{j-1}$ soit infinitésimal (ce qui implique ω infini). On remarquera qu'une telle partition existe toujours, par exemple : $x_j = a + \frac{j}{\omega}(b-a)$.

<u>Un théorème de Montel.</u> Montel a démontré en 1923 le théorème (standard !) suivant : soit un polynôme $a_o + a_1 z + \ldots + a_k z^k + a_{k+1} z^{n_{k+1}} + \ldots + a_{k+\ell} z^{n_{k+\ell}}$, $a_k \neq 0$, dont on fixe les $(k+1)$ premiers coefficients ainsi que le nombre de monômes de degré $> k$. Alors il existe un réel positif $\rho = \rho\,(a_o, a_1, \ldots, a_k; \ell)$ tel que le polynôme possède au moins k zéros dans le disque $|z| \leq \rho$.

Ce théorème est susceptible d'une démonstration par les méthodes de l'analyse non-standard (démonstration bien sûr logiquement équivalente à celle de Montel).

On définit sans peine le degré d'un polynôme non-standard, et son rang : nombre de monômes à coefficient non nul. On n'utilisera que des polynômes de rang fini. On définit enfin l'ordre d'un polynôme : degré du monôme dominant (la dominance est une (méta) relation d'ordre total définie ainsi : az^m domine bz^n s'il existe un réel fini ρ tel que $|az^m| > |bz^n|$ pour tout nombre fini de module supérieur à ρ).

Enfin on utilise le théorème de Ronché (non-standard) pour démontrer le résultat suivant :

<u>LEMME</u> : Soit $P(z)$ un polynôme non-nul de rang fini. Si l'ordre μ de $P(z)$ est fini, $P(z)$ possède μ zéros finis ; si μ est infini, $P(z)$ possède une infinité de zéros finis.

On peut maintenant terminer la démonstration du théorème de Montel : s'il était faux en analyse standard, il serait également faux en analyse non-standard, et cela signifierait que pour tout $\rho > 0$, il existerait un polynôme $P(z)$ de la forme prescrite dans l'énoncé et possédant $(k-1)$ zéros au plus dans le disque $|z| \leq \rho$.

On choisit alors ρ infini et l'on obtient une contradiction : en effet le terme $a_k z^k$ domine les précédents , i. e. l'ordre de $P(z)$ est $\geq k$ et $P(z)$ possède alors au moins k zéros finis.

VI/ IL N'Y A PAS QUE L'ANALYSE NON-STANDARD ...

On peut jouer à ce petit jeu aussi bien avec (par exemple) des espaces topologiques que les réels. Il est amusant de donner quelques méta-définitions en topologie non-standard.

Aucune difficulté au départ : un espace T , Ω l'ensemble de ses ouverts, et donc l'espace T^* non-standard, Ω^* l'ensemble non-standard de ses ouverts. On remarquera au passage la méta-inclusion $U \subset U^*$ si U et U^* sont deux ouverts de même nom dans le langage (U^* est alors standard).

On définit la monade d'un point standard P comme l'intersection $\mu(P)$ de tous les ouverts standards qui sont des voisinages de P (à priori, $\mu(P)$ peut très bien être externe au modèle).

On a alors des métra-définitions extrêmement parlantes à l'imagination comme par exemple :

- $S \subset T$ standard est ouvert si et seulement si pour tout $P \in S$, $\mu(P) \subset S^*$;
- T standard est séparé si et seulement si les monades de deux points distincts sont disjointes ;
- T espace standard séparé est compact si et seulement si tous les points de T^* appartiennent à des monades de points standard (on pourrait dire : si tous les points de T^* sont "finis").

Et cela peut continuer ....

-:-:-:-:-