BERNARD ROUSSEAU

Théorème de Baker-Brumer sur les unités d'un corps de nombres algébriques

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1968-1969), exp. n° 11, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1968-1969____A11_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
(J. LESCA)
Année 1968/69 , n° 11

21 Février 1969

THEOREME DE BAKER-BRUMER SUR LES UNITES D'UN CORPS DE NOMBRES ALGEBRIQUES

par

Bernard ROUSSEAU

-:-:-:-:-

Soit p un nombre premier, $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques, Ω_p un complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Soit $x \to |x|$ la valeur absolue de Ω_p normalisée par $|p| = 1/p$. Soient A_p l'anneau de valuation de Ω_p, $\mathfrak{m}_p$ son idéal de valuation, U_p le groupe des unités de A_p. Alors la fonction logarithme p-adique définie sur $1+\mathfrak{m}_p$ par

$$\log v = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-v)^p}{k}$$

se prolonge fonctionnellement sur U_p selon [12].

THEOREME. [3] - <u>Soit</u> $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ <u>éléments de</u> U_p <u>algébriques sur</u> $\mathbb{Q}$ <u>dont les logarithmes</u> p-adiques <u>sont linéairement indépendants sur</u> $\mathbb{Q}$. <u>Alors ces logarithmes sont linéairement indépendants sur la clôture algébrique de</u> A <u>de</u> $\mathbb{Q}$ <u>dans</u> Ω_p.

Soit donc $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ éléments de U_p liés sur A, il existe $a_1 \ldots a_n$ non tous nuls $\in A$ tels que

$$\Sigma\, a_i \log \alpha_i = 0 .$$

On peut supposer que les α_i sont des unités principales puisque $\log \alpha_i = \log \alpha_i / \theta(\alpha_i)$ où $\alpha_i / \theta(\alpha_1)$ est une unité principale.

On peut de plus supposer, quitte à multiplier l'expression précédente par un rationnel convenable que chacun des α_i est suffisamment voisin de 1 plus précisément que

$$|\alpha_i - 1| < \frac{1}{p^{1/p-1}} .$$

On peut donc trouver des entiers de Ω_p algébriques sur Q tels que

$$\alpha_1^{\beta_1} \ldots \alpha_{n-1}^{\beta_{n-1}} = \alpha_n .$$

Pour démontrer ce théorème, on va montrer qu'il existe

des entiers q et L,

un système de $(L+1)^n$ entiers rationnels non tous nuls,

$p(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ pour $0 \leqq \lambda_i \leqq L \qquad i = 1, \ldots, n$,

tels que

$$\sum_{\lambda_1=0}^{L} \ldots \sum_{\lambda_n=0}^{L} p(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \left[\alpha_1^{q^{\lambda_1}} \ldots \alpha_n^{q^{\lambda_n}} \right]^{\ell} = 0 ,$$

pour tout entier ℓ compris entre 1 et $(L+1)^n$.

Le déterminant de ce système est un déterminant de V. d. M. nul, il existe deux systèmes d'entiers distincts tels que

$$\alpha_1^{q^{\lambda_1}} \ldots \alpha_n^{q^{\lambda_n}} = \alpha_1^{q^{\lambda'_1}} \ldots \alpha_n^{q^{\lambda'_n}} ,$$

ce qui est la relation de dépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ des logarithmes des α_i ce qui termine le théorème.

Notations

Si $m_1 \dots m_{n-1}$ sont des entiers, on écrit

$$m = (m_1 \dots m_{n-1})$$

$$|m| = m_1+m_2+\dots+m_{n-1}$$

$$\Delta^m F(z_1 \dots z_{n-1}) = (m_1 ! \dots m_{n-1} !)\partial^{|m|} F/\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_{n-1}^{m_{n-1}} .$$

d est le degré du corps engendré par les α_i et β_i sur $\mathbb{Q}$,
$q = p^a$ où a est un entier tel que $q > e^{8d}$. Si h est un entier, on pose

$$L = L(h) \quad , \quad L(h) = [h^{2-\frac{1}{2n}}] \quad .$$

LEMME 1. <u>Il existe une constante</u> c_1 <u>tel que pour</u> $h > c_1$ <u>on puisse trouver des entiers rationnels</u> $p(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ $0 \leq \lambda_i \leq L$ <u>de valeur absolue au plus égale à</u> e^{2h^3} <u>non tous nuls simultanément et qui vérifient la condition suivante. Si</u>

$$F(z_1,\dots,z_{n-1}) = \sum_{\lambda_1=0}^{L} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{L} p(\lambda_1 \dots \lambda_n)\alpha_1^{\gamma_1 z_1} \dots \alpha_{n-1}^{\gamma_{n-1} z_{n-1}} ,$$

<u>où</u> $$\gamma_i = \lambda_i + \beta_i \lambda_n .$$

<u>Alors</u> $$\Delta^{(m)} F(q\ell , q\ell , \dots , q\ell) = 0 ,$$

<u>pour tous les entiers</u> ℓ , $m_1 \dots m_{n-1}$ <u>tel que</u>

$$1 \leq \ell \leq h \quad \text{et} \quad |m| \leq h^2 .$$

Démonstration du lemme 1.

Dans [2], Baker a montré que sous les hypothèses du lemme, il existe des entiers $p(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ non tous nuls, tel que

$$Q((m),\ell) = \sum_{\lambda_1=0}^{L} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{L} p(\lambda_1 \dots \lambda_n)\, \alpha_1^{q\ell\lambda_1} \dots \alpha_n^{q\ell\lambda_n}\, \gamma_1^{m_1} \dots \gamma_{n-1}^{m_{n-1}} = 0 ,$$

les hypothèses sur α_i et β_i impliquent que

$$\alpha_i^{\gamma_i z_i} = \exp(\gamma_i z_i \log \alpha_i) ,$$

est une fonction analytique sur $\hat{\Omega}_p$ qui converge ainsi que ses dérivées pour $|z_i| \leqq 1$.

On remarque enfin que

$$\Delta^{(m)} F(q\ell , q\ell , \dots , q\ell) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{(\operatorname{Log} \alpha_i)^{m_i}}{m_i\,!} \right) Q((m),\ell) .$$

Fixons pour chaque $h > c_1$ une fonction F qui vérifie les conditions du lemme .

Notation

Si E est un corps de nombres et si $x \in E$ on appelle dénominateur de x le plus petit entier rationnel > 0 tel que $D.x$ soit entier algébrique.

On appelle taille de x le nombre $s(x) = \sup(D, |\sigma(x)|_\infty)$ ou σ parcourt l'ensemble des isomorphismes de E dans $\mathbb{C}$.

Soit M un nombre + grand que la taille des α_i et des β_i ; le dénominateur D de $Q((m),\ell)$ est plus petit que

$$M^{q\ell Ln + n|m|} .$$

D'autre part

$$|\sigma(Q)|_{\infty} \leq (L+1)^n e^{2h^3} M^{nq\ell L}(M+1)^{|m|} L^{|m|} ,$$

quand h est assez grand $|Q| > D^{-d} s(Q)^{-d}$ si $Q \neq 0$.

Nous obtenons donc le lemme suivant.

LEMME 2. <u>Si</u> ℓ <u>est un entier positif arbitraire et</u> $|m| \leqq h^2$, <u>on a soit</u>

$$\Delta^{(m)} F(q\ell , \ldots , q\ell) = 0 ,$$

<u>soit</u>

$$\Delta^m F(q\ell , \ldots , q\ell) \geqq (c_2^{|m|+q\ell L} e^{2dh^3} L^{d(n+|m|)})^{-1} ,$$

<u>ou</u> c_2 <u>ne dépend que de</u> M, n, d.

LEMME 3. <u>Il existe</u> c_3 <u>tel que pour tout</u> $h > c_3$ <u>la fonction</u> F <u>du lemme 1 possède la propriété suivante</u> :

<u>si</u> $\varepsilon = 1/4n$ <u>et</u> J <u>un entier</u>, $0 \leqq J \leqq 12n^2$.

<u>Alors</u>

$$\Delta^{(m)} F(q\ell, \ldots , q\ell) = 0 ,$$

<u>pour tout entier</u> ℓ, $1 \leqq \ell \leqq h^{1+\varepsilon J}$ <u>et tout système</u> $(m_1 \ldots m_{n-1})$ <u>positif avec</u> $|m| \leqq h^2/2J$.

La démonstration se fait par récurrence sur J le cas $J = 0$ correspond à la fonction du lemme 1.

Supposons le lemme vérifié pour $J \leqq K$,

$$R_J = [h^{1+\varepsilon J}] \quad S_J = \frac{h^2}{2^J} ,$$

soit $|m| \leqq S_{K+1}$ et soit $f(z) = \Delta^m F(z , \ldots , z)$.

$f(z)$ est une fonction analytique pour $|z| \leq 1$ qui vérifie

$$|f(z)| = \left| \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(\operatorname{Log} \alpha_i)^{m_i}}{(m_i)!} \sum_{\lambda_1=0}^{L} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{L} p(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \alpha_1^{\lambda_1 z} \ldots \alpha_n^{\lambda_n z} \gamma_1^{m_1} \ldots \gamma_{n-1}^{m_{n-1}} \right| \leq 1$$

$$(\Delta^{(s)} f)(z) = \sum_{\substack{0 \leq j_i \leq s \\ |j| = s}} \binom{m_1 + j_1}{m_1} \cdots \binom{m_{n-1} + j_{n-1}}{m_{n-1}} \Delta^{(m)+(j)} F(z, \ldots, z) \quad ,$$

l'hypothèse de récurrence implique que $\Delta^s f(qr) = 0$ si

$$0 \leq s \leq S_{K+1} \quad ,$$

$$1 \leq r \leq R_K \quad , \quad \text{en effet} \quad 2S_{K+1} \leq S_K \quad ,$$

en particulier f possède au moins $R_K(S_{K+1}+1)$ zéros dans le cercle $|z| \leq q^{-1}$.

Grâce au lemme de Schwartz et Mahler [10]

$$|f(q\ell)| \leq q^{-R_K(S_{K+1}+1)} \sup_{|z| \leq 1} |f(z)| \leq q^{-R_K(S_{K+1}+1)}$$

pour tout entier ℓ.

Soit ℓ tel que $R_K \leq \ell \leq R_{K+1}$ supposons que

$$f(q\ell) = \Delta^m F(q\ell, \ldots, q\ell) \neq 0 ,$$

grâce au lemme 2 ,

$$R_K(S_{K+1}+1) \operatorname{Log} q \leq 2dh^3 + (S_{K+1} + qLR_{K+1}) \log c_2$$
$$+ d(n + S_{K+1}) \log L \ ,$$

mais

$$1/2 \ h^{1+\varepsilon J} \leq R_J \leq h^{1+\varepsilon J}$$
$$\left(\frac{h^2}{2^J}\right) - 1 \leq S_J \leq h^2$$
$$L \leq h^{2-2\varepsilon} \quad ,$$

de telle sorte que

$$\operatorname{Log} q \frac{h^{1+\varepsilon K}}{2} \cdot \frac{h^2}{2^{K+1}} \leqq 2dh^3 + 2d(n+h^2)\operatorname{Log} h + (h^2 + q h^{3+\varepsilon(K-1)}) \log c_2 \quad ,$$

$$\operatorname{Log} q / 2^{K+2} \leqq 2dh^{-\varepsilon K} + 0(h) \quad ,$$

ce qui est impossible si $K \geqq 1$ et aussi pour $K = 0$ à cause du choix de q .

La démonstration du théorème devient alors si $h > 3$, $J = 12 n^2$,

$$F(q\ell, \ldots, q\ell) = \sum_{\lambda_1=0}^{L} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{L} p(\lambda_1 \ldots \lambda_n)(\alpha_1^{q\lambda_1} \ldots \alpha_n^{q\lambda_n})^{\ell} = 0 \quad ,$$

pour $1 \leqq \ell \leqq h^{3n+1}$, mais

$$(L+1)^n \leqq (h^{2-2\varepsilon}+1)^n < h^{2n} < h^{3n+1} \quad ,$$

et le système précédent est valable pour $1 \leqq \ell \leqq (L+1)^n$.

-:-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] AX J. - On the units of an algebraic number field. Illinois J. math. 9 (1965), 584-589.

[2] BAKER A. - Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. I, Mathematika, 13 (1966) p. 204-216. II, id., 14, (1967) p. 102-107. III, id., 14, (1967) p. 220-228. IV, id., 15, (1968), p. 204-216.

[3] BRUMER A. - On the units of algebraic number fields. Mathematika 14, (1967), p. 121-124.

[4] FEL'DMAN N.I. - Estimate for a linear form of logarithms of algebraic numbers. Mat. Sbornik, T. 76, (1968) p. 291-307.

[5] FEL'DMAN N.I. - Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers. Mat. Sbornick, T. 77, (1968) p. 393-406.

[6] GÜNTHER A. - Über transzendente $\mathfrak{P}$-adische Zahlen. I, J. Reine Angew. Math., 192 (1953) p. 155-166. II, id., 193, (1954), p. 1-10.

[7] LANG S. - Introduction to transcendental numbers. Addison Wesley, (1966).

[8] MAHLER K. - Über transzendente $\mathfrak{P}$-adische Zahlen. Compositio Math. 2 (1935), p. 259-275. id., 8 (1950).

[9] RAMACHANDRA K. - A note on Baker's method. Jal Austr. Math. Soc. (1969), T. 10, 1-2, p. 197-203.

[10] SERRE J.P. - Dépendance d'exponentielles p-adiques. Sem. Delange-Pisot-Poitou, 7° année, exp. n° 15.

[11] SERRE J.P. - Travaux de Baker. Sem. Bourbaki, 1969/70, n° 368 p. 01-14.

[12] FRESNEL J. - Rang p-adique du groupe des unités d'un corps de nombres. Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, 1968/69, exposé n° 9.

-:-:-:-:-:-:-