Séminaire sur les singularités des surfaces
École Polytechnique

B. Teissier

Résolution simultanée : I - Familles de courbes

Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique) (1976-1977), exp. nº 8, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977____A9_0>

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E S U R L E S S I N G U L A R I T E S D E S S U R F A C E S

RESOLUTION SIMULTANEE :

I - FAMILLES DE COURBES

B. TEISSIER

7 Décembre 1976

Dans cet exposé et le suivant, on va donner plusieurs définitions, correspondant à des préoccupations différentes de ce que l'on peut entendre par "résolution simultanée" (des fibres) d'un morphisme d'espaces analytiques complexes. Dans cet exposé-ci, on s'intéresse plus particulièrement au cas où les fibres sont des courbes, cas dans lequel, à la différence du cas des surfaces étudié dans l'exposé suivant, on a une condition de résolution simultanée ("très faible", cf. ci-dessous) ne dépendant que de la géométrie des fibres ce qui implique que l'on ne peut espérer, si elle n'est pas satisfaite par un morphisme, amener celui-ci à la satisfaire après un changement de base "tuant la monodromie".

§ 1. LES DEFINITIONS

Nous nous restreignons dans ces exposés à des germes de morphismes plats $f:(X,0)\to(Y,0)$ d'espaces analytiques complexes, dont la fibre $(X_0,0)=(f^{-1}(0),0)$ est un germe d'espace réduit, et où de plus $(Y,0)$ est non-singulier. Il est entendu que la résolution simultanée de f (i.e., des fibres de f) signifiera en fait la résolution simultanée d'un représentant assez petit de f.

Commençons par rappeler ce qu'est une résolution des singularités d'un espace analytique complexe réduit :

1.1 Définition 1 : Une résolution des singularités d'un espace analytique complexe réduit X est un morphisme $\pi:\tilde{X}\to X$ vérifiant

1) π est un morphisme propre, et il existe un fermé analytique rare $A\subset X$ tel que π induise un isomorphisme $\tilde{X}-\pi^{-1}(A)\xrightarrow{\sim} X-A$

2) $\tilde{X}$ est non-singulier.

Remarque : Un morphisme π vérifiant seulement 1) est appelé modification propre de X, et est nécessairement surjectif.

1.2 Définition 2 : Soit $f:(X,0)\to(Y,0)$ plat à fibres réduites, avec Y réduit . On dira que f admet une résolution simultanée très faible si pour tout représentant assez petit, il existe un morphisme $\pi:\tilde{X}\to X$, modification propre de X, et tel que de plus :

TF1) Le morphisme composé $p=f\circ\pi:\tilde{X}\to Y$ soit une submersion analytique, i.e. plat et tel que pour tout $y\in Y$, la fibre $\tilde{X}_y=p^{-1}(y)$ soit non-singulière. (En particulier, π est une résolution des singularités de X).

TF2) Pour tout $y \in Y$, le morphisme induit $\tilde{X}_y \to X_y$ est une résolution des singularités de X_y.

1.3 Une classe d'exemples

1.3.1 Soit $\mathcal{O}_o$ l'algèbre d'un germe de courbe analytique réduite $(X_o,0)$ et soit $\overline{\mathcal{O}}_o$ la fermeture intégrale de $\mathcal{O}_o$ dans son anneau total de fractions. On appelle <u>diminution de genre</u> associée à la singularité de $(X_o,0)$, et l'on note $\delta(X_o,0)$ l'entier

$$\delta(X_o,0) = \dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{O}}_o / \mathcal{O}_o$$

qui est bien défini, parce que X_o étant réduite, son unique point singulier, pour un représentant assez petit, est $0 \in X_o$, et donc le support de $\overline{\mathcal{O}}_{X_o} / \mathcal{O}_{X_o}$ est réduit à $0 \in X_o$, ce qui implique que $\overline{\mathcal{O}}_o / \mathcal{O}_o$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Plus précisément encore, soit $\mathfrak{C}_o$ le conducteur de $\overline{\mathcal{O}}_o$ dans $\mathcal{O}_o$ i.e., $\mathfrak{C}_o = \{a \in \overline{\mathcal{O}}_o \,/\, a \cdot \overline{\mathcal{O}}_o \subset \mathcal{O}_o\} = \mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_o}(\overline{\mathcal{O}}_o / \mathcal{O}_o)$ (car $1 \in \overline{\mathcal{O}}_o \Rightarrow \mathfrak{C}_o \subset \mathcal{O}_o$); alors $\mathfrak{C}_o$ contient une puissance de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_o$.
Pour une courbe X_o réduite n'ayant qu'un nombre fini de points singuliers, on posera

$$\delta(X_o) = \sum_{x \in X_o} \delta(X_o,x)$$

la somme étant finie puisque en un point x non singulier de X_o, on a $\delta(X_o,x) = 0$ (et réciproquement).

1.3.2 <u>Théorème 1</u> : Soit $f : (X,0) \to (Y,0)$ un germe de morphisme plat où $(Y,0)$ est un germe d'espace analytique normal et où $(f^{-1}(0),0) = (X_o,0)$ est un germe de courbe réduite. Les conditions suivantes sur f sont équivalentes :

1) Tout représentant suffisamment petit de f admet une résolution simultanée très faible.

2) Pour tout représentant assez petit de f, on a $\delta(X_y) = \delta(X_o,0)$ pour tout $y \in Y$.

De plus, la résolution simultanée, si elle existe, est nécessairement la normalisation $n : \overline{X} \to X$ de X.

<u>Démonstration</u> :

A) Démonstration dans le cas où $(Y,0)$ est non-singulier de dimension 1 : Nous allons en fait démontrer la :

<u>Proposition</u> : Soit $f : (X,0) \to (\mathbb{C},0)$ un germe de morphisme plat dont la fibre

$(X_o,0)$ est une courbe réduite. Soit $n : \overline{X} \to X$ la normalisation de la surface X et soit $p = f \circ n : (\overline{X}, n^{-1}(0)) \to (\mathbb{C},0)$.

Posons $(\overline{X})_o = p^{-1}(0)$.

On a :

Pour tout représentant suffisamment petit de f :

1) p est plat.

2) $\delta((\overline{X})_o) = \delta(X_o) - \delta(X_y) \qquad (y \in \mathbb{C}\setminus\{0\})$.

Démonstration : Posons $R = \mathcal{O}_{\mathbb{C},0} = \mathbb{C}\{v\}$ et $A = \mathcal{O}_{X,0}$. f fait de A une R-algèbre plate et réduite, et la fermeture intégrale $\overline{A}$ de A dans son anneau total de fractions est $\mathcal{O}_{\overline{X},n^{-1}(0)}$. Par nos hypothèses, $\mathcal{O}_{X_o,0} = A/v.A$ est une $\mathbb{C}$-algèbre réduite de dimension 1, et donc nous avons $v.A = \mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_r$ où chaque $\mathfrak{P}_i$ est un idéal premier de A tel que $\dim A/\mathfrak{P}_i = 1$.

De plus, d'après les théorèmes d'existence (Bourbaki, Alg. Comm. VII, § 1.6, Prop. 10 et V, § 2.1, Cor. 2) pour chaque $\mathfrak{P}_i$ il existe un idéal premier $\mathfrak{P}'_i$ de $\overline{A}$ tel que $\dim \overline{A}/\mathfrak{P}'_i = 1$ et $\mathfrak{P}'_i \cap A = \mathfrak{P}_i$, et de plus, on a $v.\overline{A} \subset \mathfrak{P}'_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}'_r$, d'où $v.\overline{A} \cap A \subset v.A$ et l'inclusion inverse étant évidente, nous avons finalement :

$$v.\overline{A} \cap A = v.A \quad .$$

Maintenant, nous avons :

Lemme (Propriété universelle de la normalisation) : Soit A un anneau commutatif unitaire réduit, et soit $\overline{A}$ sa fermeture intégrale dans son anneau total de fractions. Supposons que le conducteur $\mathfrak{C} = \{d \in \overline{A} / d\overline{A} \subset A\}$ ne soit pas nul.

Alors, étant donné un morphisme $\varphi : A \to B$ où B est un anneau réduit intégralement clos dans son anneau total de fractions, si $\varphi(\mathfrak{C})$ contient un élément non diviseur de 0 dans B, il existe une unique extension $\overline{\varphi} : \overline{A} \to B$ de φ à $\overline{A}$.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "\overline{\varphi}"] & \\ A \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "\varphi"'] & & B \end{tikzcd}$$

Démonstration : Choisissons $d \in \mathfrak{C} \subset A$ tel que $\varphi(d)$ ne divise pas 0 dans B. Posons pour tout $a \in \overline{A}$

$$\overline{\varphi}(a) = \frac{\varphi(d.a)}{\varphi(d)} \in \mathrm{Tot}(B) \ ;$$

$\overline{\varphi}(a)$ est entier sur $\varphi(A) \subset B$ puisque a est entier sur A, et donc $\overline{\varphi}(a) \in B$.

L'unicité est claire.

Nous appliquons ce lemme au morphisme composé

$$A \longrightarrow A/v.A \longrightarrow \overline{A/v.A}$$

et nous nous souvenons pour cela du fait que le lieu singulier de X est, pour un représentant assez petit de f, fini sur $\mathbb{C}$ d'après le théorème de préparation de Weierstrass, le fait que la fibre spéciale $(X_0,0)$ est à singularité isolée, et le théorème de Bertini local. Ainsi, tout module supporté par $|\mathrm{Sing}\ X|$ est un $\mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$-module de type fini, ce qui implique que $\overline{A}/A$ et $A/\mathfrak{C}$ sont des $\mathbb{C}\{v\}$-modules de type fini, où $\overline{A}$ est la fermeture intégrale de A dans son anneau total de fractions, et $\mathfrak{C}$ le conducteur de $\overline{A}$ dans A.

De ceci nous déduisons qu'il est impossible que $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{P}_i$ pour un certain i, car sinon nous aurions une surjection $A/\mathfrak{C} \to A/\mathfrak{P}_i$ et $A/\mathfrak{P}_i$ n'est sûrement pas un $\mathbb{C}\{v\}$-module de type fini puisque $A/\mathfrak{P}_i = A/\mathfrak{P}_i \underset{\mathbb{C}\{v\}}{\otimes} \mathbb{C}$ est un anneau de dimension 1.

Ceci nous montre, grâce au lemme d'évitement, que $\mathfrak{C} \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i$ et donc que l'image de $\mathfrak{C}$ dans $\overline{A/v.A}$ n'est pas formée de diviseurs de 0. Nous pouvons maintenant appliquer le lemme, qui nous donne une factorisation

$$\begin{tikzcd} & \overline{A} \arrow[dr, "\overline{\varphi}"] & \\ A \arrow[ur] \arrow[rr] & & \overline{A/v.A} \end{tikzcd}$$

et puisque $v.\overline{A}$ va sur 0, en fait nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \overline{A}/v.\overline{A} \arrow[dr, "\overline{\varphi}"] & \\ A/v.A \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "\varphi"'] & & A\overline{A/v.A} \end{tikzcd}$$

Nous savons que i est injectif car $v.\overline{A} \cap A = v.A$, et en fait $\overline{\varphi}$ est injectif aussi, car pour construire φ, nous avons comme dans le lemme, choisi un élément $d \in \mathfrak{C} - \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{P}_i$, un élément $a \in \overline{A}$ tel que $\overline{\varphi}(a) = 0$ satisfait donc $d.a \in v.A$ et donc $a \in v.\overline{A}$ puisque $d \notin \bigcup \mathfrak{P}'_i$. Nous obtenons ainsi l'égalité :

$$\dim_{\mathbb{C}} \overline{A/v.A} \Big/ A/v.A = \dim_{\mathbb{C}} \overline{A/v.A} \Big/ \overline{A}/v.\overline{A} + \dim_{\mathbb{C}} \overline{A}/v.\overline{A} \Big/ A/v.A$$

et puisque $A/v.A = \mathcal{O}_{X_o,0}$, le terme de gauche est $\delta(X_o,0)$.

Nous remarquons maintenant que puisque $v.\overline{A} \cap A = v.A$, $\overline{A}/A$ est un $\mathbb{C}\{v\}$-module sans torsion, donc libre de type fini, et son rang est nécessairement $\delta(X_y)$ puisque, toujours d'après le théorème de Bertini, pour $v \neq 0$ assez petit, si $y \in \mathbb{C}$ est le point de coordonnée v, $(\overline{X})_y$ est normale et $(\overline{X})_y \to X_y$ est la normalisation . (Autrement dit, on a toujours résolution simultanée très faible au-dessus d'un ouvert analytique dense de l'espace des paramètres) or, $\overline{A}/A$ étant $\mathbb{C}\{v\}$-libre, on a

$$\dim_{\mathbb{C}} \overline{A}/v.\overline{A} \Big/ A/v.A = \text{rang de } \overline{A}/A = \delta(X_y) \quad .$$

Puisque le diagramme construit plus haut nous indique aussi que $\overline{A/v.A}$ est aussi la fermeture intégrale de $\overline{A}/v.\overline{A}$ dans son anneau total de fractions, on a bien finalement :

$$\delta(X_o) = \delta((\overline{X})_o) + \delta(X_y)$$

et puisque $\overline{A}/A$ est $\mathbb{C}\{v\}$-libre, que A est $\mathbb{C}\{v\}$-plat, $\overline{A}$ est bien $\mathbb{C}\{v\}$-plat, i.e. $p = f \circ n$ est un morphisme plat, et la proposition est démontrée.

Remarquons que la proposition implique le théorème dans le cas $(Y,0) = (\mathbb{C},0)$, puisque si $\delta(X_o,0) = \delta(X_y)$, p est un morphisme plat et à fibre non singulière, donc est une submersion d'espaces lisses. La démonstration donne aussi bien sûr que $(\overline{X})_o \to X_o$ est la normalisation, donc que $(\overline{X})_y \to X_y$ est une résolution des singularités pour chaque $y \in \mathbb{C}$.

B) Passage au cas où $(Y,0)$ est un espace normal quelconque (démonstration aimablement communiquée par Michel Raynaud).

Soit $f : (X,0) \to (Y,0)$ un morphisme plat, où Y est réduit, et où $(f^{-1}(0),0)$ est réduit de dimension 1. (Comme d'habitude, nous raisonnons sur un représentant "suffisamment petit" de f, encore noté $f : X \to Y$.) Puisque $(f^{-1}(0),0)$ est à singularité isolée, le sous-espace critique de f est fini au-dessus de Y (théorème de préparation). Rappelons que f étant plat, $x \in X$ est critique pour f si et seulement si il est singulier dans sa fibre. On peut donc trouver $h \in \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ tel que :

1) h_x soit non-diviseur de zéro dans $\mathcal{O}_{X,x}$ pour tout $x \in X$,

2) Le diviseur D défini par h contienne le sous-espace critique de f et soit

fini sur Y.

La platitude de f entraîne alors que $f|D : D \to Y$ est aussi plat, et comme il est fini, on peut définir le degré d de D au-dessus de Y, qui n'est autre que le rang du $\mathcal{O}_Y$-module libre $f_*\mathcal{O}_D$ (= $\mathcal{O}_D$ vu comme $\mathcal{O}_Y$-module).

Remarquons maintenant que pour tout $y \in Y$, le conducteur de $\overline{\mathcal{O}}_{X_y} = \mathcal{O}_{\overline{X}_y}$ dans $\mathcal{O}_{X_y}$ (où $X_y = f^{-1}(y)$) définit un sous-espace de X_y concentré aux points singuliers de X_y, et donc par le théorème des zéros, il existe un entier N_y tel que

$h(y)^{N_y} \cdot \mathcal{O}_{\overline{X}_y} \subseteq \mathcal{O}_{X_y}$ où $h(y) = h \cdot \mathcal{O}_{X_y}$ bien sûr.

Maintenant par lissité générique, il existe un fermé analytique rare $F \subset Y$ tel que si $y \in Y - F$ on ait $\overline{X}_y = (\overline{X})_y$ (où $n : \overline{X} \to X$ est la normalisation et $(\overline{X})_y = p^{-1}(y)$, où $p = f \circ n$) et $\mathfrak{C}_X | X_y = \mathfrak{C}_{X_y}$ où $\mathfrak{C}_X$ désigne le conducteur de $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ dans $\mathcal{O}_X$.

On vérifie ainsi (en se restreignant ensuite à $X \underset{Y}{\times} F \to F$) que l'application qui à $y \in Y$ fait correspondre le plus petit entier N_y tel que $h(y)^{N_y} \cdot \mathcal{O}_{\overline{X}_y} \subset \mathcal{O}_{X_y}$ est constructible sur Y, donc localement bornée. Soit $N = \sup_{y \in Y} N_y$. En remplaçant h par h^N on peut donc supposer que h vérifie, en sus de (1) et (2) :

(3) $h(y) \cdot \mathcal{O}_{\overline{X}_y} \subset \mathcal{O}_{X_y}$ pour $y \in Y$.

Considérons maintenant le faisceau $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{O}_X$-modules

$$\mathfrak{J} = \mathcal{O}_X \cdot e_1 \oplus \mathcal{O}_X \cdot e_2 \big/ (e_1 - h \cdot e_2)$$

et remarquons immédiatement que d'autre part le morphisme canonique $\mathcal{O}_X \to \mathfrak{J}$ envoyant 1 sur e_1 est une injection de $\mathcal{O}_X$-modules et que d'autre part le conoyau de cette injection est isomorphe à $\mathcal{O}_D$. $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_D$ étant tous deux des $\mathcal{O}_Y$-modules plats, $\mathfrak{J}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module plat.

Remarquons aussi que le morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules

$$\Psi : \mathfrak{J} \longrightarrow \mathrm{Tot}\ \mathcal{O}_X$$

défini par $\Psi(e_1) = 1$, $\Psi(e_2) = \frac{1}{h}$ est injectif et induit donc un isomorphisme sur son image $\widetilde{\mathfrak{J}} \subset \mathrm{Tot}\ \mathcal{O}_X$. De même pour tout $y \in Y$, on a un morphisme $\mathfrak{J}(y) \to \mathrm{Tot}(\mathcal{O}_{X_y})$ puisque h(y) n'est diviseur de 0 dans aucune fibre, et ce morphisme est encore une injection dont l'image sera notée $\widetilde{\mathfrak{J}(y)}$. On a, grâce à la définition de h :

$$\mathcal{O}_{\overline{X}_y} \subset \widetilde{\mathfrak{J}(y)} \quad \text{pour tout } y \in Y \ .$$

Pour chaque $y \in Y$, on peut donc considérer le quotient

$$\mathcal{H}(y) = \widetilde{\mathfrak{J}(y)} \Big/ \mathcal{O}_{\overline{X}_y} \cong \mathcal{O}_D(y) \Big/ \mathcal{O}_{\overline{X}_y} / \mathcal{O}_{X_y}$$

et d'après notre hypothèse "δ constant" et le fait vu plus haut que $\mathcal{O}_D$ est libre de rang p sur $\mathcal{O}_Y$, nous voyons que pour tout $y \in Y$, $\mathcal{H}(y)$ est un quotient de $\mathcal{O}_D(y)$ qui est de dimension $d - \delta$.

Considérons maintenant le morphisme $g_y : G_Y \to Y$, grassmannienne des quotients localement libres de rang $d - \delta$ du $\mathcal{O}_Y$-module $\mathcal{O}_D$. g_Y a la propriété que pour tout $y \in Y$, $g^{-1}(y)$ s'identifie à la grassmannienne des quotients de dimension $d - \delta$ de l'espace vectoriel de dimension d $\mathcal{O}_D(y)$.

Ainsi, pour chaque $y \in Y$, nous obtenons un point $\sigma_y \in g_Y^{-1}(y)$ correspondant à $\mathcal{H}(y)$.

Soit $Z_Y = \bigcup_{y \in Y} \sigma_y$. Utilisant à nouveau le fait qu'il existe un fermé analytique rare $F \subset Y$ à l'extérieur duquel la normalisation commute aux fibres, on peut voir que Z est un sous-ensemble constructible de G.

Maintenant il faut remarquer que toutes les constructions faites jusqu'à présent sont compatibles aux changements de base $Y' \to Y$ (Y' réduit) et en particulier que $G_{Y'} = G_Y \times_Y Y'$, $Z_{Y'} = Z_Y \times_Y Y' \subset G_{Y'}$, etc. Or nous avons déjà traité en A) le cas où $(Y',0) = (\mathbb{C},0)$ et vu dans ce cas que l'on avait $\mathcal{O}_{\overline{X}_y} = \mathcal{O}_{\overline{X}(y)}$, et que l'on pouvait choisir h tel que $h.\mathcal{O}_{\overline{X}} \subseteq \mathcal{O}_X$, i.e. $\mathcal{O}_{\overline{X}} \subset \widetilde{\mathfrak{J}}$ et finalement que l'on pouvait définir un $\mathcal{O}_Y$-module <u>plat</u> $\mathcal{H} = \mathcal{O}_D / \mathcal{O}_{\overline{X}} / \mathcal{O}_X$ (puisque $\mathcal{O}_{\overline{X}} / \mathcal{O}_X$ est $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$-plat dans ce cas comme nous l'avons vu) tel que $\mathcal{H}(y) = \mathcal{O}_D(y) \Big/ \mathcal{O}_{\overline{X}_y} \Big/ \mathcal{O}_{X_y}$ pour tout $y \in Y$.

Ainsi, d'une part notre construction est compatible aux changements de base, et d'autre part lorsque $(Y,0) = (\mathbb{C},0)$, Z_Y est en fait l'image d'une section (analytique complexe) unique de g_Y. (D'après la propriété universelle de la grassmannienne d'un faisceau cohérent de modules.) Ceci montre que dans le cas général, notre diagramme :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "q"'] & & G_Y \arrow[dl, "g_Y"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

a la propriété que tout arc analytique tracé sur $(Y,0)$ se relève de façon unique en un arc analytique de G_Y contenu dans Z. Comme par ailleurs Z est constructible dans G_Y, on en déduit que $q : Z \to Y$ est un homéomorphisme, et que Z est en fait fermé dans G. Il existe donc un sous-espace analytique fermé réduit $Z \subset G$ (dont l'ensemble sous-jacent est Z !) tel que $q : Z \to Y$ soit un homéomorphis-

me. Si Y est normal, on en déduit que en fait q est un isomorphisme analytique et donc que Z est en fait l'image d'une section σ de g_Y, qui correspond par la propriété universelle des grassmanniennes des faisceaux cohérents, à un quotient $\mathcal{H}$ de $\mathcal{O}_D$ (localement sur Y) libre de rang $d-\delta$.
$K = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_D \to \mathcal{H})$ est donc un sous-$\mathcal{O}_Y$-module de $\mathcal{O}_D$, libre de rang δ, et tel que pour tout $y \in Y$, on ait

$$K(y) = \mathcal{O}_{\overline{X}_y} \Big/ \mathcal{O}_{X_y} \quad \text{dans } \mathcal{O}_D(y) \quad .$$

Considérons maintenant le sous-$\mathcal{O}_Y$-module $\mathcal{M}$ de $\mathfrak{J} \subset \mathrm{Tot}(\mathcal{O}_X)$ défini par $\mathcal{M} = \mathrm{Ker}\ \varphi$ où φ est le morphisme composé

$$\tilde{\mathfrak{J}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{J} \to \mathcal{O}_D \longrightarrow \mathcal{H}$$

$\mathcal{M}$ est formé des éléments de $\tilde{\mathfrak{J}}$ qui peuvent s'écrire dans la forme $a + \frac{b}{h}$ ($a, b \in \mathcal{O}_X$, i.e. $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$) de telle façon que $a(y) + \frac{b(y)}{h(y)} \in \mathrm{Tot}(\mathcal{O}_{X_y})$ appartienne en fait à $\mathcal{O}_{\overline{X}_y}$ où $a(y) = a \cdot \mathcal{O}_{X_y}$, etc. On en déduit que $\mathcal{M}$ est en fait un sous-anneau de $\mathrm{Tot}(\mathcal{O}_X)$ contenant $\mathcal{O}_X$, et comme il est contenu dans $\tilde{\mathfrak{J}}$ qui est un $\mathcal{O}_X$-module de type fini, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{O}_{\overline{X}}$.

Par ailleurs, le même argument qu'en A) nous permet d'appliquer la propriété universelle de la normalisation, pour obtenir un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & (\mathcal{O}_{\overline{X}})(y) \arrow[dr] & \\ \mathcal{O}_{X_y} \arrow[ur, hook] \arrow[rr, hook] & & \mathcal{O}_{\overline{X}_y} \end{tikzcd}$$

qui nous suffit pour montrer que $\mathcal{O}_{\overline{X}} \subseteq \mathcal{M}$, donc finalement $\mathcal{M} = \mathcal{O}_{\overline{X}}$.
Comme $\mathfrak{J}$ et $\mathcal{H}$ sont plats sur $\mathcal{O}_Y$, il en est de même de $\mathcal{M}$, et de plus, on a

$$\mathcal{M}/\mathcal{O}_X = K$$

ce qui montre que pour tout $y \in Y$, on a

$$\mathcal{O}_{\overline{X}_y} = \mathcal{O}_{\overline{X}_y}$$

donc à nouveau nous avons montré que $p : \overline{X} \to X \to Y$ est un morphisme plat et à fibre lisse, donc le résultat annoncé. $\square$

Réciproquement soit $f : (X,0) \to (Y,0)$ plat et à fibres réduites de dimension 1 admettant un représentant tel que le morphisme composé $p = f \circ n : \overline{X} \xrightarrow{n} X \to Y$ soit plat et à fibres lisses. Alors l'invariant δ des fibres de f est constant. En effet, l'application $Y \to \mathbb{N}$, définie par $y \to \delta(X_y)$ est constructible sur Y, et on vérifie facilement que l'on peut se ramener par changement de base au cas où $(Y,0) = (\mathbb{C},0)$. On peut alors remonter la démonstration de A), en utilisant le fait que $v.\overline{A} \cap A = v.A$ pour montrer que la platitude de $\overline{A}$ sur $\mathcal{O}_Y$ implique celle de $\overline{A}/A$.

<u>Corollaire</u> : Soit Y un espace analytique normal, et soit $X \subset Y \times \mathbb{P}^N$ sous-espace fermé tel que les fibres de $f = pr_1|X : X \to Y$ soient des courbes projectives réduites connexes. Alors, il y a équivalence entre :

1) la famille $f : X \to Y$ de courbes projectives admet (localement sur Y) une résolution simultanée très faible donnée par la normalisation, i.e.

$$p = f \circ n : \overline{X} \longrightarrow X \longrightarrow Y$$

fait de $\overline{X}$ une famille plate de courbes (projective) non singulières $(\overline{X})_y$.

2) La caractéristique d'Euler-Poincaré topologique $\chi_{top}(\overline{X}_y)$ est (localement sur Y) indépendante de $y \in Y$.

<u>Démonstration</u> : $1) \Rightarrow 2)$ est clair car p est en fait alors une fibration différentiable.

Pour montrer la réciproque, remarquons que

$$\chi_{top}(\overline{X}_y) = -2g(\overline{X}_y) + 2r_y$$

où r_y désigne le nombre de composantes connexes de $\overline{X}_y$.

Des résultats classiques de cohomologie cohérente nous donnent (cf. "Faisceaux algébriques cohérents", et "Groupes algébriques et corps de classes" de J.P. Serre) :

1) $p_a(X_y) = g(X_y) - (r_y - 1) + \delta(X_y)$

2) puisque f est plat, le <u>genre arithmétique</u> $p_a(X_y)$ qui intervient dans 1) est indépendant de X_y.

On déduit alors de l'hypothèse de 2) que $\delta(X_y)$ est constant, et on applique le résultat précédent après avoir localisé au voisinage de chacun des points singuliers d'une fibre de f, en remarquant que la propriété de "résolution simultanée par la normalisation" est en fait locale sur X.

Retenons donc que pour les familles de courbes, l'existence d'une résolution simultanée très faible ne dépend que de la géométrie des fibres.

Exemples :

1) La famille de courbes planes :

$$\begin{tikzcd} X \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} \arrow[dr, "0"'] \arrow[d, "pr_2"] & \\ \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

où X est défini dans $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}\ (x,y,v)$ par $y^2 - x^3 + vx^2 = 0$ est à δ constant (= 1) et possède une résolution simultanée très faible.

2) Etant donné un germe de courbe plane irréductible $(X_o,0)$ donné paramétriquement par $x(t)$, $y(t)$, on peut considérer la famille de courbes planes décrite paramétriquement par

$$(*) \quad \begin{cases} x = x(t) + \alpha v.t \\ y = y(t) + \beta v.t \end{cases} \qquad (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 \quad .$$

Il existe une hypersurface $H \subset \mathbb{C}^2$, dépendant de $x(t)$ et $y(t)$, telle que si $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 - H$, pour toute valeur v_o de v assez petite et non nulle, la courbe X_{v_o} décrite par (*) pour $v = v_o$ a pour seules singularités $\delta(X_o,0)$ points doubles ordinaires distincts (tendant vers 0 quand $v_o \to 0$). La famille de courbes planes ainsi décrite a une résolution simultanée très faible, qui est précisément sa donnée sous forme paramétrique. Ce résultat s'étend sans mal aux germes de courbes réductibles.

[Pour des détails, cf. : "Sur diverses conditions numériques d'équisingularité des familles de courbes, et un principe de spécialisation de la dépendance intégrale", tirage du Centre de Maths. de l'Ecole Polytechnique No M208.0675, Juin 1975).]

3) Soit s un entier, on peut considérer la famille de courbes décrite dans $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}\ (z_o,z_1,z_2,v)$ par :

$$\begin{cases} z_1^2 - z_o^3 + vz_2 = 0 \\ z_2^2 - z_o^{s+2}\ z_1 = 0 \end{cases} \quad .$$

Elle possède une résolution simultanée très faible, et la fibre spéciale est la courbe monomiale donnée paramétriquement par $z_o = t^4$, $z_1 = t^6$, $z_2 = t^{2s+7}$, alors que pour $v \neq 0$, la fibre X_y correspondante est la courbe plane d'équation $(z_1^2 - z_o^3)^2 - v^2 z_o^{s+2} z_1 = 0$.

[La théorie d'où est tiré cet exemple se trouve dans l'appendice au cours de Zariski sur les modules de branches planes (Publication du Centre de Maths.).]