Séminaire sur les singularités des surfaces
École Polytechnique

M. Demazure

Surfaces de Del Pezzo : V - Modèles anticanoniques

Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique) (1976-1977), exp. nº 7, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977____A8_0>

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L E S   S I N G U L A R I T E S   D E S   S U R F A C E S

SURFACES DE DEL PEZZO :

V - MODELES ANTICANONIQUES

M. DEMAZURE

23 Novembre 1976

Comme dans l'exposé IV, on note Z une surface rationnelle lisse telle que $\omega_Z \cdot \omega_Z > 0$ et $\omega_Z . E \le 0$ pour tout diviseur effectif E ; on pose $r = \mathrm{rg}\ \mathrm{Pic}(Z) - 1 \le 8$, et $\omega = \omega_Z$.

Pour tout entier i tel que $i(9-r) \ge 2$ (c'est-à-dire $i \ge 1$ si $r \le 7$, $i \ge 2$ si $r = 8$), on note

$$\varphi_i : Z \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(Z,-i\omega))$$

le morphisme défini par le système linéaire complet sans points fixes $|-i\omega|$ (théorème IV.1.a). On note $\overline{Z}^{(i)}$ l'image de φ_i, $\overline{C}^{(i)}$ le cône projetant de $\overline{Z}^{(i)}$, et $\overline{\varphi}_i : Z \to \overline{Z}^{(i)}$ le morphisme surjectif déduit de φ_i. Avec ces notations, le théorème IV.1 et son corollaire peuvent se traduire en :

Proposition 1 : a) Pour $i(9-r) \ge 3$ (i.e. $i \ge 1$ si $r \le 6$, $i \ge 2$ si $r = 7$, $i \ge 3$ si $r = 8$), les fibres schématiques de $\overline{\varphi}_i$ sont les points de l'ouvert U et les cycles fondamentaux, et $\overline{\varphi}_i$ est birationnel.

b) Pour $i(9-r) = 2$ (i.e. $i = 1$, $r = 7$ ou $i = 2$, $r = 8$), le morphisme $\overline{\varphi}_i$ est de degré 2.

Pour $i(9-r) \ge 3$, on dit que $\overline{Z}^{(i)}$ est le i-ième modèle anticanonique de Z et $\overline{C}^{(i)}$ le i-ème cône anticanonique de Z.

Par ailleurs, on pose

$$\overline{Z} = \mathrm{Proj}(\bigoplus_n H^0(Z,-n\omega)) \quad ,$$

$$\overline{C} = \mathrm{Spec}(\bigoplus_n H^0(Z,-n\omega)) \quad ,$$

et on les appelle respectivement le modèle et le cône anticanonique de Z. On note $f : Z \to \overline{Z}$ le morphisme canonique. L'anneau de $\overline{C}^{(i)}$ (c'est-à-dire l'anneau gradué de $\overline{Z}^{(i)}$) s'identifie naturellement au sous-anneau de $\oplus H^0(Z,-n\omega)$ engendré par $H^0(Z,-i\omega)$. On a par conséquent des morphismes canoniques $\overline{C} \to \overline{C}^{(i)}$ et chaque $\overline{\varphi}_i$ se factorise par un morphisme

$$\tilde{\varphi}_i : \overline{Z} \longrightarrow \overline{Z}^{(i)}$$

(nous verrons ci-dessous que $\tilde{\varphi}_i$ est un isomorphisme pour $i(9-r) \ge 3$ et est fini de degré 2 pour $i(9-r) = 2$).

1. NORMALITE PROJECTIVE DES MODELES ANTICANONIQUES

Lemme 1 : Soient $\Gamma_1 \in |-\omega|$, $\Gamma_2 \in |-\omega|$, $\Gamma_3 \in |-p\omega|$, $p > 0$. Supposons Γ_1 et Γ_2 irréductibles et distincts et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \emptyset$. Soient x_1, $x_2 \in H^0(Z,-\omega)$, $x_3 \in H^0(Z,-p\omega)$ des équations de Γ_1, Γ_2, Γ_3. Alors

a) (x_1,x_2,x_3) est une suite régulière dans l'anneau $\oplus H^0(Z,-n\omega)$;

b) l'idéal engendré par (x_1,x_2,x_3) contient tous les éléments homogènes de degré $\geq p+2$. Si $r \leq 6$ et $p = 1$, il contient tous les éléments homogènes de degré ≥ 2.

Posons $A_n = H^0(Z,-n\omega)$; de la suite exacte

$$0 \longrightarrow -(n-1)\omega \xrightarrow{x_1} -n\omega \longrightarrow -n\omega|\Gamma_1 \longrightarrow 0$$

on tire, puisque $H^1(Z,-(n-1)\omega) = 0$, une suite exacte

$$0 \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{x_1} A_n \longrightarrow B_n \longrightarrow 0 \quad ,$$

où $B_n = H^0(\Gamma_1,-n\omega)$. Il s'ensuit que x_1 est non diviseur de zéro et que $A_n/x_1 A_{n-1}$ s'identifie à B_n.
Recommençons à l'aide de la suite exacte

$$0 \longrightarrow -(n-1)\omega|\Gamma_1 \xrightarrow{x_2} -n\omega|\Gamma_1 \longrightarrow -n\omega|\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \longrightarrow 0 \quad ;$$

on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow B_{n-1} \xrightarrow{x_2} B_n \xrightarrow{q_n} C_n \quad ,$$

où $C_n = H^0(\Gamma_1 \cap \Gamma_2, -n\omega)$; de plus, pour $n \geq 2$, q_n est surjectif, puisqu'alors $H^1(\Gamma_1,-(n-1)\omega) = 0$ car $-(n-1)\omega.(-\omega) = (n-1)\omega.\omega > 0$. Il s'ensuit que x_2 est non diviseur de zéro dans l'anneau $\oplus B_n$ et que $B_n/x_2 B_{n-1} = C'_n$ s'injecte dans C_n, bijectivement pour $n \geq 2$.

Notons maintenant que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ est fini et que, par hypothèse l'élément $\overline{x}_3 \in C'_p \subset H^0(\Gamma_1 \cap \Gamma_2,-p\omega)$ ne s'annule en aucun point de $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$, donc que la multiplication par $\overline{x}_3$ induit des isomorphismes $C_n \to C_{n+p}$, $n \geq 0$. Il en résulte que $\overline{x}_3$ est non diviseur de zéro dans l'anneau $\oplus C'_n \subset \oplus C_n$, et que $x_3 C'_n = C'_{n+p}$ dès que $n \geq 2$. Cela implique a) et la première assertion de b).

Supposons alors $p = 1$ et $r \leq 6$, et prouvons que $C'_1 \otimes C'_1 \to C_2$ est surjectif, ce qui impliquera la dernière assertion de b). Comme $\dim C_1' \geq \dim C_1 - 1 = 8-r \geq 2$, C_1' contient un élément y non multiple de x_3. Alors $y^2 \in C_2$ n'est pas multiple de x_3, donc engendre $C_2/x_3 C_1'$ qui est de dimension ≤ 1 ; par conséquent $y C_1' + x_3 C_1' = C_2$, ce qu'on voulait démontrer.

Proposition 2 : *Soit* $i > 0$; *considérons l'anneau gradué* $\bigoplus_n H^0(Z,-ni\omega)$.

a) *Il est de Cohen-Macaulay en l'idéal* $\bigoplus_{n>0} H^0(-ni\omega)$.

b) *Il est engendré par ses éléments homogènes de degré* ≤ 1 *si* $i(9-r) \geq 3$, *de degré* ≤ 2 *si* $i(9-r) = 2$, *de degré* ≤ 3 *si* $i(9-r) = 1$.

En effet (théorème III.1), on peut trouver deux diviseurs $\Gamma_1, \Gamma_2 \in |-\omega|$ irréductibles et distincts, et puisque $|-p\omega|$ est sans points fixes pour $p(9-r) \geq 2$, un diviseur $\Gamma_3 \in |-p\omega|$ avec $p(9-r) \geq 2$ et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \emptyset$. D'après le lemme 1, la suite (x_1, x_2, x_3) est régulière dans $\bigoplus_n H^0(Z,-n\omega)$, donc la suite (x_1^i, x_2^i, x_3^i) est régulière dans l'anneau proposé. De plus l'anneau $\bigoplus H^0(Z,-n\omega)$ est engendré par ses éléments de degré $\geq p+2$, et même de degré ≥ 2 lorsque $r \leq 6$; cela démontre b) pour $i = 1$. Le cas général s'en déduit aussitôt.

Théorème 1 : a) *La surface* $\overline{Z}$ *est normale* ; *le cône* $\overline{C}$ *est normal et de Cohen-Macaulay.*

b) *Pour* $i(9-r) \geq 3$, *la variété projective* $\overline{Z}^{(i)}$ *est projectivement de Cohen-Macaulay* (*i.e.* $\overline{C}^{(i)}$ *est normal et de Cohen-Macaulay*) *et le morphisme* $\tilde{\varphi}_i : \overline{Z} \to \overline{Z}^{(i)}$ *est un isomorphisme.*

D'après la proposition 2b) l'anneau du cône $\overline{C}^{(i)}$ $(i(9-r) \geq 3)$ est $\bigoplus_n H^0(Z,-ni\omega)$, et il est de Cohen-Macaulay au sommet du cône d'après a). Comme $\overline{Z}^{(i)}$ est non singulière en codimension 1 (proposition 1), il en est de même de $\overline{C}^{(i)}$ qui est donc normal (critère de Serre) et de Cohen-Macaulay. Cela implique b). La partie a) résulte aussitôt de b) et de la proposition 2.

Remarques : 1) Pour $r \leq 6$, le morphisme $\overline{C} \to \overline{C}^{(1)}$ est un isomorphisme.

2) Les cônes $\overline{C}^{(1)}$ $(r = 7$ ou $8)$ et $\overline{C}^{(2)}$ $(r = 8)$ sont aussi normaux et de Cohen-Macaulay (cf. ci-dessous).

3) En fait $\overline{Z}$ et $\overline{C}$ sont de Gorenstein (cf. ci-dessous).

2. LE MORPHISME $f : Z \to \overline{Z}$

Théorème 2 : a) f est birationnel, ses fibres schématiques sont les points de U et les cycles fondamentaux ; on a $f_*(\mathcal{O}_Z) = \mathcal{O}_{\overline{Z}}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $i > 0$, on a $R^i f_*(\omega_Z^{\otimes n}) = 0$.

c) Les points singuliers de $\overline{Z}$ sont les images des cycles fondamentaux ; ils sont rationnels et de multiplicité 2.

d) Posons $\omega_{\overline{Z}} = f_*(\omega_Z)$. Alors $\omega_{\overline{Z}}$ est localement libre de rang 1, et on a pour tout n des isomorphismes canoniques

$$f_*(\omega_Z^{\otimes n}) = \omega_{\overline{Z}}^{\otimes n} \quad , \quad f^*(\omega_{\overline{Z}}^{\otimes n}) = \omega_Z^{\otimes n} \quad .$$

a) Puisque $f : Z \to \overline{Z}$ est isomorphe à $\overline{\varphi}_i : Z \to \overline{Z}^{(i)}$, pour $i(9-r) \geq 3$, la première partie résulte de la prop. 1. La seconde s'en déduit puisque $\overline{Z}$ est normal.

b) Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $i > 0$. Le faisceau $R^i f_*(\omega_Z^{\otimes n})$ est concentré aux points de $\overline{Z}$ images des cycles fondamentaux. Soit Γ un cycle fondamental de Z et $y = f(\Gamma) \in \overline{Z}$. D'après le théorème des fonctions holomorphes de Grothendieck, $R^i f_*(\omega_Z^{\otimes n})_y$ s'identifie à la limite projective des $H^i(m\Gamma, n\omega)$, $m > 0$; mais ceux-ci sont nuls (prop. IV.3).

c) Puisque $R^i f_*(\mathcal{O}_Z) = R^i f_*(\omega_Z) = 0$ pour $i > 0$, les points singuliers de Z sont rationnels par définition. Soient Γ et y comme ci-dessus. Alors, d'après le théorème cité, $\varprojlim_n H^0(m\Gamma, \mathcal{O}_{m\Gamma})$ est le complété de $\mathcal{O}_{\overline{Z},y}$ pour une filtration m_y-bonne ; d'après la prop. IV.3, on a $\dim H^0(m\Gamma, \mathcal{O}_{m\Gamma}) = m^2 = 2(m^2/2)$; donc $\mathcal{O}_{\overline{Z},y}$ est de multiplicité 2, et par conséquent y est singulier. Par ailleurs les points de $f(U) = \overline{U}$ ne sont évidemment pas singuliers.

d) Soit C une courbe irréductible de $|-\omega|$; alors $C \subset U$; posons $V = Z - C$; alors Z est réunion des ouverts U et V, $\overline{Z}$ réunion des ouverts $\overline{U} = f(U)$ et $\overline{V} = f(V)$, et on a $U = f^{-1}(\overline{U})$, $V = f^{-1}(\overline{V})$. De plus, f induit un isomorphisme de U sur $\overline{U}$ et $\omega_{|V} = \mathcal{O}_{Z|V}$. Sur chacun des ouverts $\overline{U}$ et $\overline{V}$ de $\overline{Z}$ les assertions de d) sont triviales, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1 : Le morphisme $Z \to \overline{Z}$ a la propriété universelle suivante : pour qu'un morphisme de Z dans un schéma (ou espace annelé) T se factorise par $\overline{Z}$ (et alors de manière unique), il faut et il suffit qu'il contracte les cycles fondamentaux.

En effet, un tel morphisme définit une application continue de $\overline{Z}$ dans T, et celle-ci est un morphisme puisqu'elle "applique" $\mathcal{O}_T$ dans $f_*\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_{\overline{Z}}$.

<u>Corollaire 2</u> : <u>Soit</u> F <u>un faisceau localement libre sur</u> Z. <u>Alors</u> $H^i(\overline{Z},F) = H^i(Z,f^*F)$; <u>de plus</u> $H^i(\overline{Z},F)$ <u>et</u> $H^{2-i}(\overline{Z},\underline{Hom}(F,\omega_{\overline{Z}}))$ <u>sont en dualité</u>.

Comme $R^i f_*(f^*F) = F \otimes R^i f_*(f^*F) = 0$ pour $i > 0$, la première assertion résulte de la suite spectrale de Leray. Comme $f^*\underline{Hom}(F,\omega_{\overline{Z}}) = \underline{Hom}(f^*F, f^*\omega_{\overline{Z}}) = \underline{Hom}(f^*F,\omega_Z)$, la seconde en résulte, <u>via</u> la dualité de Serre sur Z.

On retrouve ainsi le fait que $\overline{Z}$ est de Gorenstein, son module dualisant $\omega_{\overline{Z}}$ étant localement libre.

<u>Corollaire 3</u> : a) <u>On a</u> $H^1(\overline{Z},\omega_{\overline{Z}}^{\otimes i}) = 0$ <u>pour tout i</u> ; <u>on a</u> $H^0(\overline{Z},\omega_{\overline{Z}}^{\otimes i}) \neq 0 \Leftrightarrow i \leq 0$, $H^2(\overline{Z},\omega_{\overline{Z}}^{\otimes i}) \neq 0 \Leftrightarrow i > 0$.

b) <u>Le faisceau</u> $\omega_{\overline{Z}}^{\otimes -i}$ <u>est engendré par ses sections si et seulement si</u> $i(9-r) \geq 2$; <u>il est très ample si et seulement si</u> $i(9-r) \geq 3$. <u>On a</u> $\dim H^0(\overline{Z},\omega_{\overline{Z}}^{\otimes -i}) = \frac{i(i+1)}{2}(9-r) + 1$ <u>pour</u> $i \geq 0$.

Cela résulte du corollaire 2 ci-dessus, du théorème 1, et des énoncés analogues pour Z.
En particulier, les morphismes $\tilde{\varphi}_i : \overline{Z} \to \overline{Z}^{(i)}$ définis ci-dessus, sont simplement les morphismes associés aux systèmes linéaires $|-i\omega_{\overline{Z}}|$.

Si D est un diviseur sur Z, notons f(D) le diviseur (de Weil) image sur $\overline{Z}$, que l'on peut aussi définir comme "l'adhérence" du diviseur $f(D \cap U)$ de $\overline{U} \subset \overline{Z}$. Par passage aux classes, on obtient l'homomorphisme composé

$$cl(Z) = Pic(Z) \longrightarrow Pic(U) \simeq Pic(\overline{U}) = cl(\overline{U}) \simeq cl(\overline{Z}) \quad .$$

On appellera <u>courbes exceptionnelles</u> de $\overline{Z}$ les diviseurs f(D), où D est un diviseur exceptionnel <u>irréductible</u> sur Z. Notons que, si Δ est un diviseur (de Weil) sur $\overline{Z}$, on peut toujours définir sans difficulté $\Delta\cdot\omega_{\overline{Z}}$ soit parce que $\omega_{\overline{Z}}$ est un diviseur de Cartier, soit simplement en se restreignant à $\overline{U}$. Si Δ est effectif et $\neq 0$, on a $\Delta\cdot\omega_{\overline{Z}} < 0$.

<u>Proposition 3</u> : <u>Soit</u> Σ <u>une courbe irréductible sur</u> $\overline{Z}$.

a) <u>Si</u> $r \leq 7$, Σ <u>est exceptionnelle si et seulement si</u> $\Sigma\cdot\omega_{\overline{Z}} = -1$.

b) <u>Supposons</u> $r = 8$. <u>Alors</u> Σ <u>est exceptionnelle si et seulement si</u>, <u>soit</u>

$\Sigma\cdot\omega_{\overline{Z}} = -1$ et $cl(\Sigma) \neq -\omega_{\overline{Z}}$, soit $cl(\Sigma) = -\omega_{\overline{Z}}$ et Σ passe par un des points singuliers de $\overline{Z}$; ce second cas est celui où Σ est l'image par f d'un diviseur exceptionnel spécial de Z.

En effet, écrivons $\Sigma = f(D)$, où D est un diviseur irréductible sur Z. D'après le lemme III.9, on a pour $r \neq 8$, "D exceptionnel" $\Leftrightarrow$ "$D.\omega_Z = -1$", et pour $r = 8$, "D exceptionnel" $\Leftrightarrow$ "$D.\omega_Z = -1$ et $cl(D) \neq -\underset{\sim}{\omega}_Z$". Le seul point à démontrer est donc le suivant : supposons $r = 8$, soit $\tilde{\Sigma}$ l'élément de $|-\omega_Z|$ associé canoniquement à $\Sigma \in |-\omega_{\overline{Z}}|$; alors $\tilde{\Sigma} \neq D$ si et seulement si Σ passe par un point singulier de $\overline{Z}$. Or, si Σ ne passe par aucun point singulier de $\overline{Z}$, on a $\tilde{\Sigma} = D$; inversement, si Σ passe par un point singulier de $\overline{Z}$, alors D rencontre un cycle fondamental Γ, et d'après la discussion faite à l'exposé précédent, $\tilde{\Sigma}$ est la somme de Γ et d'un diviseur exceptionnel spécial $\tilde{D}$. Donc $\tilde{D} = D$, et $\Sigma = f(\tilde{D})$ est exceptionnel.

3. LES MODELES $\overline{Z}^{(1)}$, $\overline{Z}^{(2)}$, $\overline{Z}^{(3)}$

Supposons $r \leq 6$. Alors $\omega_{\overline{Z}}^{\otimes -1}$ est très ample et correspond au plongement projectif $\varphi_1 : \overline{Z} \xrightarrow{\sim} \overline{Z}^{(1)} \subset \mathbb{P}(H^0, \omega_{\overline{Z}}^{\otimes -1}))$. Notons que $\overline{Z}^{(1)}$ est de degré $d = \omega.\omega = 9-r$ dans un espace projectif de dimension d ; on a $3 \leq d \leq 9$. Par exemple pour $r = 6$, $\overline{Z}^{(1)}$ est une surface cubique dans $\mathbb{P}^3$.
Les courbes exceptionnelles de $\overline{Z}^{(1)}$ sont les droites contenues dans $\overline{Z}^{(1)}$ (proposition 3) ; par exemple pour $r = 6$, il y en a au plus 27 ; pour qu'il y en ait 27, il faut et il suffit que $\overline{Z}^{(1)}$ soit lisse (théorème II.1).

Pour $r = 7$, il faut prendre $\omega_Z^{\otimes -2}$; on obtient un plongement projectif $\tilde{\varphi}_2 : \overline{Z} \xrightarrow{\sim} \overline{Z}^{(2)} \subset \mathbb{P}^6$. Comme $2\omega - 2\omega = 8$, $\overline{Z}^{(2)}$ est de degré 8 dans $\mathbb{P}^6$. Les courbes exceptionnelles de $\overline{Z}^{(2)}$ sont les coniques irréductibles qu'elle contient (proposition 3) ; il y en a au plus 56 ; il y en a 56 si et seulement si $\overline{Z}^{(2)}$ est lisse.

Pour $r = 8$, on doit prendre $\omega_{\overline{Z}}^{\otimes -3}$. Alors $\overline{Z}^{(3)}$ est de degré $3\omega.3\omega = 9$ dans $\mathbb{P}^6$; les courbes exceptionnelles de $\overline{Z}^{(3)}$ sont des cubiques irréductibles (nécessairement gauches ou singulières puisque de genre 0) ; il y en a au plus 240.

En fait, dans le deux derniers cas on obtient une description géométrique plus agréable de $\overline{Z}$ par l'intermédiaire des morphismes de degré 2 $\overline{Z} \to \overline{Z}^{(1)}$ $(r = 7)$, $\overline{Z} \to \overline{Z}^{(2)}$ $(r = 8)$, appelés involutions de Kayser et de Bertini.

4. L'INVOLUTION DE KAYSER

Prenons $r = 7$ et considérons le morphisme de degré 2

$$\tilde{\varphi}_1 : \overline{Z} \longrightarrow \overline{Z}^{(1)} = P \quad .$$

Comme P est une surface contenue dans $\mathbb{P}(H^o(\overline{Z},\omega_{\overline{Z}}^{\otimes 1})) \simeq \mathbb{P}^2$, c'est ce plan projectif tout entier ; par conséquent l'application canonique $S^n H^o(\overline{Z},\omega_{\overline{Z}}^{\otimes -1}) \to H^o(\overline{Z},\omega_{\overline{Z}}^{\otimes -n})$ est injective pour tout n. Posons $A^n = H^o(\overline{Z},\omega_{\overline{Z}}^{\otimes -n})$; d'après la prop. 2, $A = \oplus A^n$ est engendré par A^1 et A^2 ; mais $\dim S^n A^1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ et $\dim A^n = n^2 + n + 1$, et par conséquent $\dim A^n = \dim S^n A^1 + \dim S^{n-2} A^1$. Par ailleurs, comme $\dim A^2 = 7 = \dim S^2 A^1 + 1$, il existe $\sigma \in A^2$ tel que A soit engendré par σ et A^1 ; comme $\tilde{\varphi}_1$ n'est pas birationnel, σ ne peut pas s'exprimer comme quotient d'éléments de SA^1, donc $\sigma S^{n-2} A^1 \cap S^n A^1 = 0$ pour tout n ; par conséquent $A^n = S^n A^1 \oplus \sigma S^{n-2} A^1$, donc A est un SA^1-module libre de base $\{1,\sigma\}$, et il existe $a \in S^2 A^1$, $b \in S^4 A^1$ tels que $A = SA^1[\sigma]/(\sigma^2 - a\sigma - b)$.

Si x, y, z est une base de A^1, alors $A = k[x,y,z,\sigma]/(\sigma^2 - a(x,y,z)\sigma - b(x,y,z))$ et on a $\overline{C} = \operatorname{Spec} A$, $\overline{Z} = \operatorname{Proj} A$. De façon plus jolie, on a $S^n A^1 \simeq H^o(P,\mathcal{O}_P(n))$, donc a et b s'identifient à des sections

$$a \in H^o(P,\mathcal{O}_P(2)) \quad , \quad b \in H^o(P,\mathcal{O}_P(4)) \quad ,$$

et on a aussitôt

$$\overline{C} = \underline{\operatorname{Spec}}\ \mathcal{A} \quad , \quad \overline{Z} = \underline{\operatorname{Proj}}\ \mathcal{A} \quad ,$$

où $\mathcal{A}$ est le $\mathcal{O}_P$-module $\mathcal{O}_P \oplus \mathcal{O}_P(-2)$ muni de la structure d'algèbre associée aux morphismes $\mathcal{O}_P(-2) \otimes \mathcal{O}_P(-2) \xrightarrow{\bar{a}} \mathcal{O}_P(-2)$ et $\mathcal{O}_P(-2) \otimes \mathcal{O}_P(-2) \xrightarrow{\bar{b}} \mathcal{O}_P$ déduits de a et b. comme on dit,"$\overline{Z}$ est un <u>plan double</u>".

<u>Supposons maintenant la caractéristique</u> $\neq 2$. Alors, remplaçant σ par $\sigma - a/2$, on peut supposer $a = 0$. Posons alors $\operatorname{div}(\sigma) = \Gamma \in |-2\omega_{\overline{Z}}|$, $\operatorname{div}(b) = \Delta \in |\mathcal{O}_P(4)|$; alors Δ est une quartique de P, on a $\tilde{\varphi}_1^{-1}(\Delta) = 2\Gamma$ et $\tilde{\varphi}_1$ est ramifié exactement aux points de Γ ("$\overline{Z}$ <u>est un plan double ramifié le long d'une quartique</u>"). On vérifie aussitôt que la projection $\Gamma \to \Delta$ est un isomorphisme, que les points singuliers de $\overline{Z}$ sont exactement les points de Γ au-dessus des points singuliers de Δ et par conséquent que, ni Γ, ni Δ, n'ont de composantes multiples.

Par construction, les courbes de $|-\omega_{\overline{Z}}|$ sont les images réciproques des droites de P. Pour toute courbe exceptionnelle Σ sur $\overline{Z}$, $\tilde{\varphi}_1(\Sigma)$ est une droite D de P (proposition 3), et la projection $\Sigma \to D$ est un isomorphisme. Inversement, si D est une droite de P, alors $\tilde{\varphi}_1^{-1}(D) \cdot \omega_{\overline{Z}} = -\omega_{\overline{Z}} \cdot \omega_{\overline{Z}} = -2$, donc, <u>ou bien</u> $\tilde{\varphi}_1^{-1}(D)$ est irréductible, <u>ou bien</u> $\tilde{\varphi}_1^{-1}(D) = \Sigma + \Sigma'$ où Σ et Σ' sont des courbes exceptionnelles (prop. 3). Notons que l'on peut avoir $\Sigma = \Sigma'$, auquel cas Σ est une composante de Γ, et D une composante de Δ. Pour que $\tilde{\varphi}_1^{-1}(D)$ soit réductible, il faut et il suffit que $b_{|D}$ ait deux zéros doubles, c'est-à-dire que D soit <u>bitangente</u> à la courbe Δ ; les points de contact de D avec Δ correspondent alors aux points d'intersection de Σ et Σ'. Par exemple, si $\overline{Z}$ est lisse, <u>i.e.</u> si Δ est lisse, alors on trouve 56/2 bitangentes à la quartique Δ.

Supposons maintenant être en <u>caractéristique</u> 2, avec $a \neq 0$; alors si $\Delta' = \mathrm{div}_P(a)$ et $\Gamma = \mathrm{div}_{\overline{Z}}(a)$, on a $\tilde{\varphi}_1^{-1}(\Delta') = \Gamma$, le morphisme $\Gamma \to \Delta'$ est totalement ramifié de degré 2, et les points de Γ sont les points de ramification de $\tilde{\varphi}_1$. Si, toujours en caractéristique 2, on a de plus $a = 0$, alors le morphisme $\overline{Z} \to P$ est partout ramifié ; les points singuliers de $\overline{Z}$ correspondent aux zéros de la forme différentielle db.

5. L'INVOLUTION DE BERTINI

Prenons $r = 8$, et considérons le morphisme de degré 2

$$\tilde{\varphi}_2 : \overline{Z} \longrightarrow \overline{Z}^{(2)} = \Lambda \subset \mathbb{P}(H^0(\overline{Z}, \omega_{\overline{Z}}^{\otimes -2})) = P \quad .$$

Posons toujours $A^n = H^0(\overline{Z}, \omega_{\overline{Z}}^{\otimes -n})$ et $A = \oplus A^n$. On a $\dim A^n = n(n+1)/2 + 1$, donc $\dim A^1 = 2$, $\dim A^2 = 4$, $\dim A^3 = 7$. Notons (u,v) une base de A^1, et w un élément de A^2 qui n'est pas dans $S^2 A^1$. Alors (u,v,w) forment une suite régulière et l'anneau A' engendré par A^1 et A^2 est l'anneau des polynômes en u, v, w (lemme 1 et prop. 2). Une base de $A^2 = A'^2$ est (ℓ, m, n, w) avec $\ell = u^2$, $m = uv$, $n = v^2$. Par conséquent, $\overline{Z}^{(2)}$ est le cône quadratique Λ d'équation $m^2 = \ell n$ dans $P \simeq \mathbb{P}^3$; le sommet de Λ est l'image du point fixe de $|-\omega_{\overline{Z}}|$ puisqu'il est donné par $u = v = 0$. Soit $\sigma \in A^3$, $\sigma \notin A'^3$ (noter que $\dim A^3 = 7$, $\dim A'^3 = 6$) ; comme tous les éléments de $A'^3 = A^1 . A^2$ s'annulent au point $u = v = 0$, et que ce dernier n'est pas point fixe de $|-3\omega_{\overline{Z}}|$, σ <u>ne s'annule pas au point fixe</u> de $|-\omega_{\overline{Z}}|$; par ailleurs, comme $\dim A^n = \dim A'^n + \dim A'^{n-3}$, on voit comme au No précédent que A est engendré par u, v, w, σ, et qu'il existe $a \in A'^3$, $b \in A'^6$ avec

$$A = k[u,v,w,\sigma]/(\sigma^2 - a\sigma - b) \quad .$$

Rappelons que $\overline{C} = \operatorname{Spec} A$, $\overline{Z} = \operatorname{Proj} A$.
De façon équivalente, considérons sur $\operatorname{Proj} k[u,v,w] = \Lambda$ les faisceaux $\mathcal{O}_\Lambda(n)$; ils sont inversibles pour n pair, non inversible pour n impair. (Par exemple $\mathcal{O}_\Lambda(1)$ est la classe des génératrices du cône Λ, qui sont des diviseurs de Weil, non principaux au sommet). Le faisceau $\mathcal{O}_\Lambda(2n)$ est la classe des diviseurs de Cartier sections de Λ par les hypersurfaces de degré n de P.

Posons alors $\mathfrak{B} = \mathcal{O}_\Lambda \oplus \mathcal{O}_\Lambda(-3)$ muni de la structure d'algèbre définie par $a \in H^0(\Lambda, \mathcal{O}_\Lambda(3))$, $b \in H^0(\Lambda, \mathcal{O}_\Lambda(6))$; on a $\overline{Z} = \operatorname{Proj}(\mathfrak{B})$ ("$\overline{Z}$ est un cône quadratique double, avec un point de ramification isolé au sommet").

Supposons maintenant la caractéristique $\neq 2$. Alors, remplaçant σ par $\sigma - a/2$, on peut supposer $a = 0$; posons alors $\operatorname{div}(\sigma) = \Gamma \in |-3\omega_{\overline{Z}}|$, $\operatorname{div}(b) = \Delta \in |\mathcal{O}_\Lambda(\sigma)|$; alors Δ est une section de Λ, intersection de Λ avec une surface cubique de P, qui ne passe pas par le sommet de Λ, on a $\tilde{\varphi}_2^{-1}(\Delta) = 2\Gamma$, et $\tilde{\varphi}_1$ est ramifié exactement au sommet de Λ et aux points de Γ. La projection $\Gamma \to \Delta$ est isomorphisme, les points singuliers de $\overline{Z}$ sont les points de Γ au-dessus des points singuliers de Δ, et par conséquent, ni Γ, ni Δ n'ont de composantes multiples.

Les diviseurs de $|-\omega_{\overline{Z}}|$ sont les images réciproques par $\tilde{\varphi}_2$ des génératrices de Λ, ceux de $|-2\omega_{\overline{Z}}|$ les images réciproques des sections planes de Λ. D'après la prop. 3, les courbes exceptionnelles de $\overline{Z}$ ont pour image dans Λ soit des génératrices passant par les points singuliers de Δ, soit des sections planes irréductibles de Λ, dont on voit comme au No 4 qu'elles doivent être tritangentes à Δ. Inversement l'image réciproque d'une génératrice passant par un point singulier de Δ est une courbe exceptionnelle de $\overline{Z}$, l'image réciproque d'une conique de Λ tritangente à Δ se décompose de deux courbes exceptionnelles de $\overline{Z}$ (éventuellement égales).

En caractéristique 2, la situation est analogue à celle du No 4.
Notons enfin que, si γ est une conique irréductible de Λ, qui n'est pas l'image d'une courbe exceptionnelle, alors son image réciproque C dans $\overline{\Sigma}$ est irréductible et de genre 2. Comme $\omega_C^1 \simeq (-2\breve{\omega} + \bar{\omega})|_C = -\bar{\omega}|_C$, le faisceau $2\bar{\omega}|_C$ est le faisceau bicanonique de C ; donc l'involution de Bertini $\overline{Z} \to \Lambda$ induit sur C l'involution bicanonique. La projection $C \to \gamma$ est donc la représentation usuelle de C comme courbe hyperelliptique, et les 6 points d'intersection de C avec Γ sont les 6 points de Weierstrass de C.
