Séminaire sur les singularités des surfaces
École Polytechnique

H. Pinkham

Singularités de Klein - II

Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique) (1976-1977), exp. nº 3, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977____A4_0>

© Séminaire sur les singularités des surfaces
(École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire sur les singularités des surfaces implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L E S   S I N G U L A R I T E S

D E S   S U R F A C E S

SINGULARITES DE KLEIN - II

H. PINKHAM

26 Octobre 1976

Dans cet exposé nous résolvons toutes les singularités de Klein. En fait, la méthode employée permet de résoudre toutes les singularités décrites dans la généralisation 3 de l'exposé précédent, donc par le résultat de Dolgachev toutes les singularités normales avec action $\mathbb{C}^*$.

Nous commençons par résoudre les singularités quotients de $\mathbb{C}^2$ par un groupe fini cyclique. Elles admettent une action de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$; ce sont donc des <u>éventails</u> (<u>toroidal embeddings</u> dans la terminologie de [11]). La méthode que nous utilisons est une réalisation géométrique de la résolution par éventails donnée dans [11], p. 35. Elle est tirée de Fujiki [9]. Dans la seconde partie de l'exposé nous utilisons la résolution des quotients cycliques pour résoudre les singularités de Klein (en fait une classe beaucoup plus large : voir plus bas).

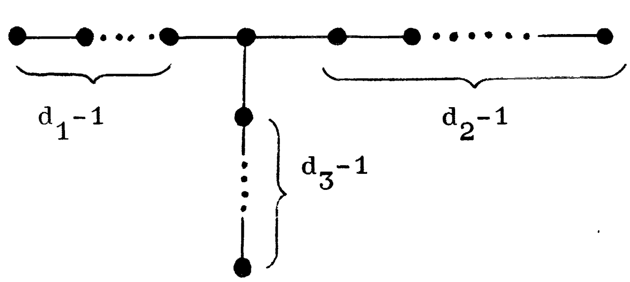
Rappelons que par <u>résolution</u> d'un point $x \in X$, singularité isolée de X nous entendons un morphisme birationnel $f : \tilde{X} \to X$ tel que $\tilde{X}$ soit lisse et que f soit un isomorphisme sur $f^{-1}(X \setminus x)$. La fibre $f^{-1}(x)$ est le <u>diviseur exceptionnel</u>. On note par $\bullet$ la forme intersection sur $\tilde{X}$.

Au diviseur exceptionnel on associe un graphe, le <u>graphe dual pondéré</u> : soient E_i les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel. A E_i correspond un sommet v_i du graphe, pondéré par $E_i \bullet E_i$. v_i et v_j sont liés par un nombre d'arêtes égal à $E_i \bullet E_j$.

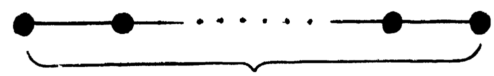
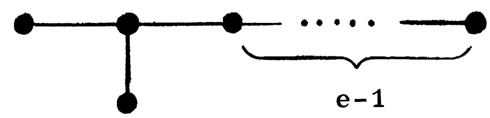
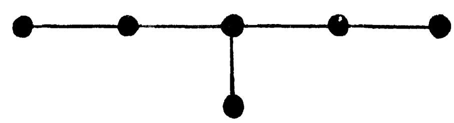
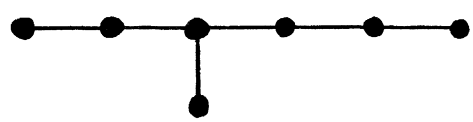
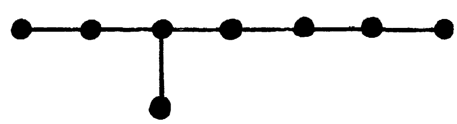
<u>Théorème</u> : Etant donné une singularité de Klein X de groupe G, il existe une résolution $f : \tilde{X} \to X$ telle que :

1) toutes les composantes irréductibles E_i du diviseur exceptionnel sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$, s'intersectent transversalement, et $E_i \cap E_j \cap E_k = \emptyset$, $i \neq j \neq k$;

2) tous les poids du graphe dual sont -2 (il s'agit donc de la résolution minimale) et le graphe lui-même est



où les d_j sont les indices de ramification de l'action de G sur $\mathbb{P}^1$ (lorsque G est cyclique il faut bien sûr prendre $d_3 = 1$). On a donc le tableau

Groupe	Ordre	d_i	Graphe	Nom
Cyclique	d	d d	 2d-1	A_{2d-1}
Diédral	2e	2 2 e	 e-1	D_{e+2}
Tétraèdre	12	2 3 3		E_6
Octaèdre	24	2 3 4		E_7
Icosaèdre	60	2 3 5		E_8

Pour obtenir toutes les singularités rationnelles de multiplicité 2 il faut ajouter à cette liste la singularité quotient cyclique $X_{d,d-1}$, d impair. C'est le quotient de $\mathbb{C}^2$ par le groupe cyclique d'ordre d agissant par agissant par $(u,v) \to (\varepsilon u, \varepsilon^{-1} v)$, $\varepsilon = e^{2\pi i/d}$. L'équation de $X_{d,d-1}$ est

$$Z^2 + Y^2 + X^d = 0$$

et on trouvera une résolution de $X_{d,d-1}$ satisfaisant 1) du théorème et de graphe dual (tous les poids sont -2)

d-1

C'est donc A_{d-1}. On peut caractériser toutes ces singularités en notant que ce sont toutes les singularités quotients de $\mathbb{C}^2$ par un sous-groupe fini de $SL(2,\mathbb{C})$.

Dans d'autres exposés nous montrerons le lien entre ces singularités et le groupe de Weyl correspondant.

1. SINGULARITES QUOTIENTS D'UN GROUPE CYCLIQUE

Soit G_n le groupe cyclique d'ordre n. On fait agir un générateur de G_n sur l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[x_1,x_2]$ par $(x_1,x_2) \to (\zeta x_1, \zeta^q x_2)$ où $\zeta = e^{2\pi i/n}$ et q est premier à n, $q < n$.

Soient $X = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1,x_2]$ et X_{nq} le quotient de X par G. On appelle X_{nq} la singularité <u>quotient cyclique de type</u> (n,q).

Nous allons construire un morphisme birationnel $W \to X_{nq}$ qui est un isomorphisme en dehors du point singulier de X_{nq} et tel que le diviseur exceptionnel E_1 soit isomorphe à $\mathbb{P}^1$. Si $q = 1$, W est lisse et est donc une résolution de X_{nq}. Autrement W a un seul point singulier au voisinage duquel W est isomorphe à X_{qr} où $n = b_1 q - r$, où $0 < r < q$. En répétant cette construction à X_{qr} on arrive évidemment à une résolution de X_{nq}.

1. Soient $Y = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[y_1,y_2]$ et $f : Y \to X$ le morphisme donné par $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2^q$. On peut considérer $f : Y \to X$ comme le quotient de Y par le groupe G_q cyclique d'ordre q agissant par $(y_1,y_2) \to (y_1, \eta y_2)$, $\eta = e^{2\pi i/q}$. Il est clair que l'action de G_n sur X se relève en une action sur Y donnée par $(y_1,y_2) \to (\zeta y_1, \zeta y_2)$ et qu'elle commute à l'action de G_q.

2. Nous éclatons l'origine de Y : soit $\tilde{Y}$ la clôture dans $Y \times \mathbb{P}^1$ du graphe du morphisme naturel $Y - (0,0) \to \operatorname{Proj} \mathbb{C}[y_1,y_2] = \mathbb{P}^1$. Notons u_1 et u_2 des coordonnées inhomogènes sur $\mathbb{P}^1$, $u_1 = y_2/y_1$, $u_2 = y_1/y_2$. Posons $\mathbb{A}_i = \{p \in \mathbb{P}^1 \mid y_i(p) \neq 0\}$ et $\tilde{Y}_i = \tilde{Y} \cap (Y \times \mathbb{A}_i)$. Alors $\tilde{Y}_1$ est donné dans $Y \times \mathbb{A}_1$ par $y_1 u_1 = y_2$ et $\tilde{Y}_2$ dans $Y \times \mathbb{A}_2$ par $y_2 u_2 = y_1$.

$\tilde{Y} \to Y$ est un isomorphisme sauf au-dessus de (0,0) où la fibre est une courbe E, le <u>diviseur exceptionnel</u>, qui est isomorphe à $\mathbb{P}^1$ comme on voit facilement. E a pour équation $y_i = 0$ dans $\tilde{Y}_i$.

$\tilde{Y}_i$ est isomorphe au plan affine ; on peut choisir u_i et y_i pour coordonnées. On a les formules de recollement $u_1 = 1/u_2$ et $u_2 y_2 = y_1$. Donc on peut considérer $\tilde{Y}$ comme le fibré en droites affine sur $E = \mathbb{P}^1$ dont le faisceau des sections est $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. La self intersection de E dans $\tilde{Y}$ est -1.

3. On peut relever l'action de G_n et G_q sur $\tilde{Y}$: appelons Z le quotient de $\tilde{Y}$ par G_n.

G_n agit sur $\tilde{Y}_1$: $(u_1,y_1) \mapsto (u_1, \zeta y_1)$. Soit Z_1 le quotient.

G_n agit sur $\tilde{Y}_2$: $(u_2,y_2) \mapsto (u_2, \zeta y_2)$. Soit Z_2 le quotient.

Alors Z_1 et Z_2 sont lisses, et isomorphes au plan affine avec coordonnées $(u_1, z_1 = y_1^n)$ et $(u_2, z_2 = y_2^n)$ respectivement.

G_q agit sur $\tilde{Y}_1$: $(u_1,y_1)\mapsto(\eta u_1,y_1)$

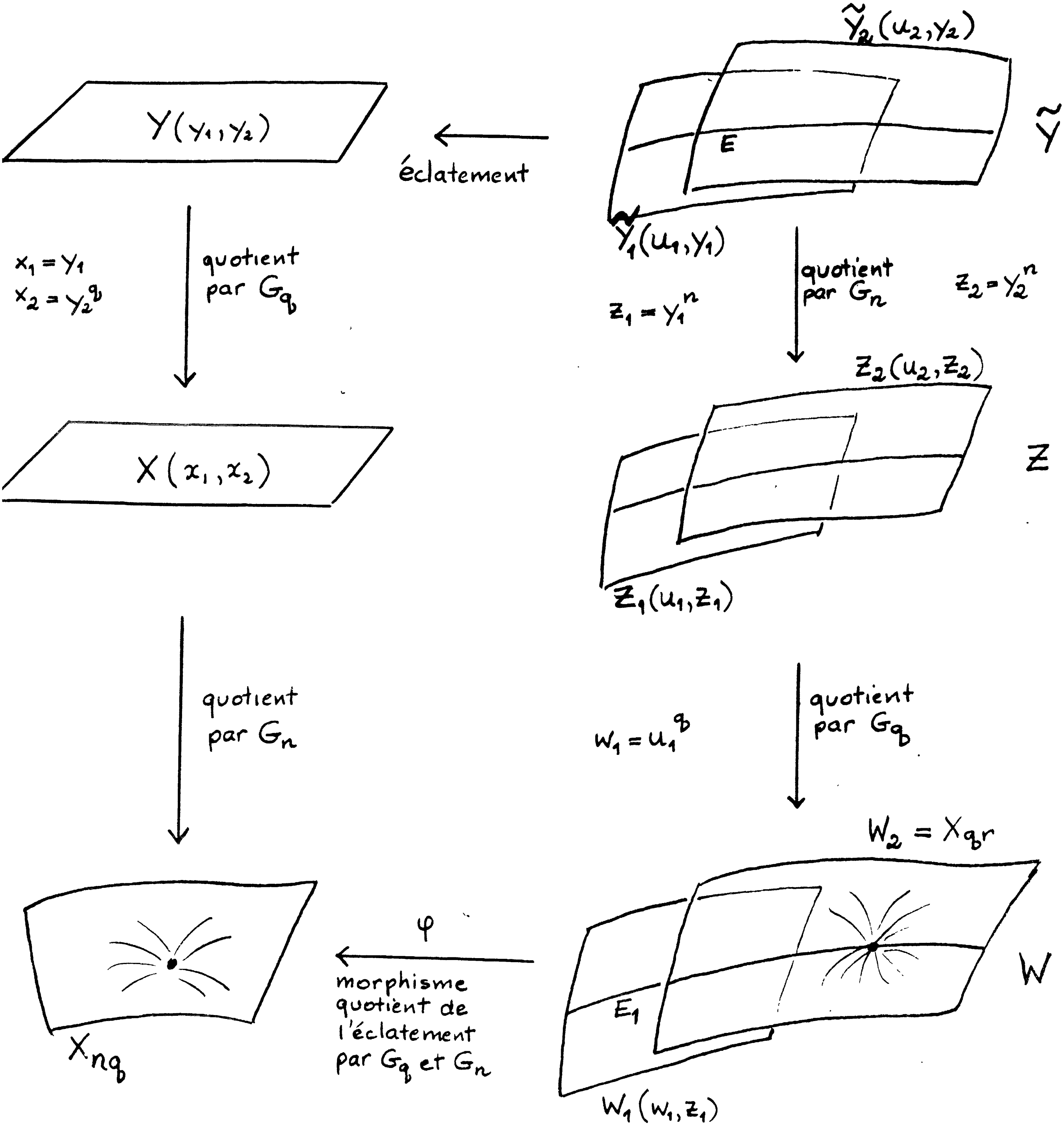
$\tilde{Y}_2$ · $(u_2,y_2)\mapsto(\eta^{-1}u_2,\eta y_2)$.

4. Donc G_q agit sur Z : appelons W le quotient de Z par G_q.

G_q agit sur Z_1 : $(u_1,z_1)\mapsto(\eta u_1,z_1)$. Soit W_1 le quotient.

Z_2 : $(u_2,z_2)\mapsto(\eta^{-1}u_2,\eta^n z_2)$. Soit W_2 le quotient.

Il est clair que W_1 est lisse, isomorphe à $\mathbb{C}^2$ avec coordonnées $w_1 = u_1^q$ et z_1. W_2 par contre peut être singulier. Si $q = 1$, alors W est non singulier. Autrement posons $n = b_1 q - r$, $0 \le r < q$. Alors W_2 est singulier, et possède une singularité quotient cyclique de type (q,r).

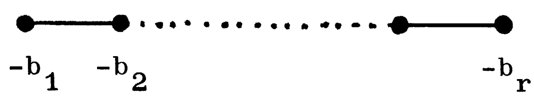


5. D'autre part on a un morphisme $\varphi : W \to X_{n,q}$, qui est un isomorphisme sauf au-dessus de l'origine. En effet ce morphisme est simplement le quotient $\tilde{Y} \to Y$ par les deux groupes G_n et G_q (dans un ordre différent, ce qui est sans importance puisque les actions commutent). Soit E_1 le diviseur exceptionnel de φ. On appelle le W le <u>premier</u> <u>cran</u> de la résolution de X_{nq}.

Recommençons l'opération sur $W_2 = X_{qr}$ et ainsi de suite. Eventuellement nous obtiendrons une résolution $\tilde{X}_{nq} \to X_{nq}$.

Posons $\dfrac{n}{q} = b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{\ddots}{\ddots - \cfrac{1}{b_r}}}$, $b_i \geq 2$.

<u>Théorème</u> : Toutes les composantes du diviseur exceptionnel de $\tilde{X}_{nq}$ sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$ et s'intersectent transversalement. Le graphe dual pondéré est



Puisque tous les $b_i \geq 2$ la résolution est minimale.

<u>Démonstration</u> : Que les composantes du diviseur exceptionnel sont rationnelles est clair.

Montrons d'abord que lorsqu'on résout $W_2 = X_{q,r}$ comme on a fait plus tôt pour X_{nq} le transformé strict de E_1 est lisse et intersecte E_2, le nouveau diviseur exceptionnel, transversalement.

Répétons le construction ci-dessus à X_{qr} : remplaçons u par q, q par r et appelons les quantités correspondantes par le même nom suivi d'un prime. On a donc $x_1' = u_2$, $x_2' = z_2$ et G_q opère sur $X' = Z_2$ par $(u_2, z_2) \mapsto (\eta u_2, \eta^r z_2)$
donc par $(x_1', x_2') \mapsto (\eta x_1', \eta^r x_2')$.

L'image inverse de E_1 dans Z_2 est donnée par $z_2 = 0$, donc par $x_2' = 0$ dans la nouvelle notation. Donc pour savoir si l'image de E_1 est lisse dans le second cran de la résolution, il suffit de voir que le transformé (strict) de $(x_2 = 0)$ est lisse dans W. $x_2 = 0$ donne $y_2^q = 0$ dans Y, donne $u_1^q = 0$ dans $\tilde{Y}_1$, donne $u_1^q = 0$ dans Z_1, donne $w_1 = 0$ dans W_1 et est donc lisse.

D'autre part pour savoir si E_1 et E_2 s'intersectent transversalement, il suffit de voir que $(x_2 = 0)$ et E_1 le font dans W_1. Mais W_1 a pour coordonnées (w_1, z_1). Le transformé de $(x_2 = 0)$ a pour équation $w_1 = 0$ comme on a vu. E_1 a pour équation $z_1 = 0$. On a gagné.

Finalement il faut calculer les self-intersections des diviseurs exceptionnels. Il suffit, bien entendu, de montrer qu'au second cran de la résolution la surface obtenue est lisse le long du transformé strict de E_1 (que nous appelons $\tilde{E}_1$), et que $\tilde{E}_1 \cdot \tilde{E}_1 = -b_1$. Nous avons déjà établi le premier point. En remontant d'un cran, on voit que $\tilde{E}_1$ est contenu dans W_1 et W'_1. Les coordonnées de ces deux espaces affines sont (w_1, z_1) et (w'_1, z'_1).

Par définition $z'_1 = (y'_1)^q = (x'_1)^q = (u_2)^q$. Puisque $w_1 = u_1^q$, on a

$$\boxed{w_1 = 1/z'_1} \quad .$$

D'autre part

$$w'_1 = (u'_1)^r = \frac{(y'_2)^r}{(y'_1)^r} = \frac{x'_2}{(x'_1)^r} = \frac{z_2}{(u'_1)^r}$$

$$= \frac{y_2^{n+r}}{y_1^r} = u_1^{n+r}\, y_1^n = (u_1^q)^{b_1}\, y_1^n \quad .$$

Mais $u_1^q = w_1$ et $y_1^n = z_1$, donc

$$\boxed{w'_1 = w_1^{b_1}\, z_1} \quad .$$

Remarquons finalement que $\tilde{E}_1$ est donné par $z_1 = 0$ dans W_1,
et $w'_1 = 0$ dans W'_1.

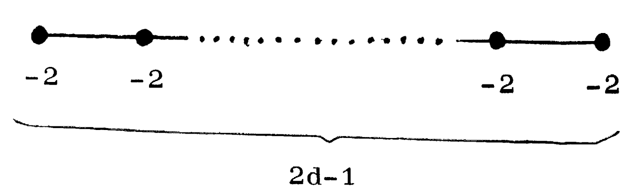
Les deux formules encadrées veulent bien dire que $\tilde{E}_1 \cdot \tilde{E}_1 = -b_1$, ce qui termine la démonstration.

2. SINGULARITES DE KLEIN

Remarquons que nous pouvons déjà disposer du cas G cyclique d'ordre d. En effet, nous avons vu que G' agit sur $\mathbb{C}^2$ par $(u,v) \mapsto (\varepsilon u, \varepsilon^{-1} v)$, $\varepsilon = e^{\pi i/d}$, donc la singularité est quotient cyclique de type $(2d, 2d-1)$. Comme

$$\frac{2d}{2d-1} = 2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{\ddots}}$$

le graphe pondéré est



De même on obtient la résolution de $X_{d,d-1}$, d impair. Le théorème de l'introduction est donc démontré dans ces cas. Passons aux autres singularités de Klein.

En fait nous allons résoudre les singularités suivantes (il s'agit d'un cas particulier des singularites considérées dans la remarque 3 de I).

Soient C' une surface de Riemann compacte, G un groupe fini d'automorphismes de C', $\pi : C' \to C = C'/G$ le morphisme quotient, P_i, $1 \le i \le n$, les points de ramification de π et d_i l'indice de ramification au point P_i. Soit D' un diviseur sur C' de degré <u>positif</u>, de la forme

$$D' = \pi^{-1}(D) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{Q_i \to P_i} e_i \, Q_i \quad ,$$

où e_i est premier à d_i, et $e_i < d_i$. Par définition D' est invariant par G, donc $\mathcal{O}_{C'}(D')$ admet une action de G canonique. Soit $F' = \mathbb{V}(\mathcal{O}_{C'}(-D'))$ le fibré affine associé à $\mathcal{O}_{C'}(D')$. La section nulle de F' que nous identifions à C', a self intersection négative ; sa contraction donne

$$X' = \operatorname{Spec} \bigoplus_{k \ge 0} H^0(C', \mathcal{O}_{C'}(kD'))$$

G agit canoniquement sur F' et X'.
Soient F et X les quotients correspondants. L'image de $C' \subset F'$ dans F est isomorphe à C, auquel nous l'identifions donc, de sorte que le morphisme quotient $q : F' \to F$ induise $\pi : C' \to C$.
X peut s'écrire

$$X = \operatorname{Spec}\Big(\bigoplus_{k \ge 0} H^0(C', \mathcal{O}_{C'}(kD'))^G \Big)$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$X = \operatorname{Spec}\Big(\bigoplus_{k \ge 0} H^0(C, \mathcal{O}_C(D^{(k)})) \Big) \quad ,$$

où $D^{(k)}$ est le diviseur sur C qui s'écrit

$$D^{(k)} = kD - \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{e_i k}{d_i} \right\} P_i \quad .$$

Comme dans I on a posé $\{a\}$ = le plus petit entier $\ge a$.

Nous allons résoudre la singularité X. On a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
Q_i \arrow[d] & \in & C' \arrow[d, "\pi"'] & \subset & F' \arrow[d, "q"] \arrow[r, "\text{contraction de } C'"] & X' \arrow[d, "\text{quotient par } G"] \\
P_i & \in & C & \subset & F \arrow[r, "\text{contraction de } C"'] & X
\end{tikzcd}$$

Remarquons que pour obtenir les singularités de Klein il suffit de prendre $C' \approx \mathbb{P}^1$, $e_i = d_i - 1$ et D un diviseur de degré 2 sur $C \approx \mathbb{P}^1$.

Nous allons étudier le résolution $\tilde{F}$ de X obtenue par résolution minimale des singularités de F.

<u>Lemme 1</u> : L'action de G sur F' est libre sauf aux points $Q_i \in C'$, $\pi(Q_i) = P_i$, pour tout i. Le quotient F est donc lisse sauf aux points P_i. Au voisinage de P_i , F est isomorphe à la singularité quotient cyclique de type (d_i, e_i).

<u>Preuve</u> : Il faut d'abord expliciter l'action de G sur F'.
Recouvrons C' par des U_i , $1 \le i \le n$, ouverts (de Zariski) affines et invariants par G, tels que $P_i \in \pi(U_i)$ et $P_j \notin \pi(U_i)$, $i \neq j$. Soit $h_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O})$ une équation locale pour le diviseur $\sum_{Q_i \to P_i} Q_i$. Puisque $d_i \sum_{Q_i \to P_i} Q_i = \pi^{-1}(P_i)$ on peut choisir des h_i tels que $h_i^{d_i}$ soit invariant par G. Donc si $g \in G$ opère sur h_i par $g(h_i) = a_{ig} h_i$, a_{ig} est une racine d_i-ième de l'unité. Soient $f_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*)$ des fonctions de transition pour le faisceau inversible $\mathcal{O}_{C'}(D')$. Alors, à un facteur invariant par G près, on a $f_{ij} = h_j^{e_j} / h_i^{e_i}$. Donc f_{ij} transforme sous $g \in G$ par $g(f_{ij}) = a_{ig}^{e_i} f_{ij} a_{jg}^{-e_j}$ ce qui dit bien que les classes de $\{f_{ij}\}$ et $\{g(f_{ij})\}$ dans $H^1(C', \mathcal{O}^*)$ sont les mêmes.

Soit t_i la coordonnée de la fibre de F' sur U_i. Alors par définition $t_i = f_{ij} t_j$ sur $U_i \cap U_j$. On voit donc que G agit sur t_i par

$$g(t_i) = a_{ig}^{e_i} t_i \quad . \tag{*}$$

L'action de G sur F' est complètement décrite.

Il est clair que l'action de G est libre sauf peut-être sur les fibres au-dessus des points Q_i. Soit g un générateur du stabilisateur d'un point Q_i donné. Alors a_{ig} est une racine d_i-ième <u>primitive</u>, puisqu'autrement l'indice de ramification serait $< d_i$. Donc par (*) les seuls points de stabilisateur non trivial sont les Q_i. D'autre part h_i et t_i sont des coordonnées au point Q_i (ils ont chacun un zéro d'ordre 1 à Q_i) et les formules de transition de h_i et t_i sous g montrent que la singularité au point P_i de la surface quotient est de type (d_i, e_i).

Rappelons que $\tilde{F}$ est la résolution minimale des singularités de F construite au § 1 de cet exposé, $\tilde{C}$ le transformé strict de C dans $\tilde{F}$.

<u>Lemme 2</u> : $\tilde{C}$ intersecte les autres composantes du diviseur exceptionnel de $\tilde{F} \to X$ transversalement, et le faisceau normal de $\tilde{C}$ dans $\tilde{F}$ est $i^* \mathcal{O}_C(-D)$, où i est l'isomorphisme $\tilde{C} \to C$ induit par $\tilde{F} \to F$.

<u>Preuve</u> : La première assertion découle immédiatement de la description de la résolution des quotients cycliques donnée dans le § 1 de cet exposé. Au lieu de la seconde partie du lemme 2, nous démontrerons l'assertion plus faible (mais équivalente dans le cas $C = \mathbb{P}^1$ qui nous intéresse) suivante :

<u>Lemme 2'</u> : La self intersection de $\tilde{C}$ dans $\tilde{F}$ est -b, où b est le degré de D.

(Pour une démonstration du lemme 2 voir [7]). Le lemme 2' est démontré dans [12], theorème 4.3.

<u>Preuve</u> : On imite celle de Brieskorn [1], p. 349.
Soit b' le degré de D'. On a

$$b' = d\left(b - \sum_{i=1}^{n} e_i / d_i\right)$$

UNIVERSITÉ DE GR I

où d est l'ordre de G.
On a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\tilde{F} \arrow[dr, "\Psi"'] & & F' \arrow[dl] \arrow[dr, "\varphi'"] & \\
& F \arrow[dr, "\varphi"'] & & X' \arrow[dl, "p"] \\
& & X &
\end{tikzcd}$$

UT FOU

Soit $f \in H^0(C', \mathcal{O}_{C'}(kC'))$, invariante par G. On peut donc considérer f comme une fonction sur X. Le diviseur $(\varphi'^* p^* f)$ de $\varphi'^* p^* f$ s'écrit $kC' + B'$. Après avoir choisi k convenablement on peut supposer que $\varphi'^* p^* f$ n'est nulle sur aucune des fibres de $F' \to C'$ au-dessus de $Q_i \in C'$, $\pi(Q_i) = P_i$. B' consiste donc en kb' fibres distinctes de $F' \to C'$.

D'autre part $(\Psi^* \varphi^* f)$ s'écrit

$$\alpha\tilde{C} + \Sigma\, \alpha_j\, E_j + B \quad , \quad 1 \le j \le N$$

où les E_j sont les composantes du diviseur exceptionnel de $\tilde{F} \to X$ différentes de $\tilde{C}$ et B ne contient aucun des diviseurs exceptionnels. Il est clair que $\alpha = k$ et par hypothèse $\tilde{C}.B = \frac{kb'}{d}$, $E_j.B = 0$.
Puisque $(\Psi^* \varphi^* f)$ est principal, on a

(1) $$(\Psi^* \varphi^* f) . \tilde{C} = 0$$

(2) $$(\Psi^* \varphi^* f) . E_j = 0 \quad \text{pour tout } j \ .$$

Mais supposons que E_i, $1 \le i \le n$, est l'unique diviseur exceptionnel de $\tilde{F} \to X$ qui intersecte $\tilde{C}$ au point P_i. En utilisant le § 1 de cet exposé, on trouve facilement par résolution du système d'équations linéaires (2) que $\alpha_i = k\, e_i / d_i$, $1 \le i \le n$. L'équation (1) donne alors

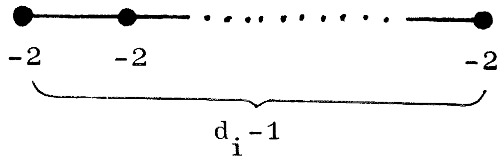
$$k\tilde{C}.\tilde{C} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \frac{kb'}{d} = 0$$

donc que

$$-\tilde{C}.\tilde{C} = \frac{b'}{d} + \sum_{i=1}^{n} e_i / d_i = b \quad , \qquad \text{c. q. f. d.}$$

On établit aussi le lemme 2 en utilisant la résolution des quotients cycliques du § 1.

Il est clair que les lemmes 1 et 2 déterminent "la résolution de X". En particulier on a démontré le théorème de l'introduction : en effet on a toujours $e_i = d_i - 1$, donc les singularités de F ont pour résolution :



Les autres assertions sont claires.

Remarques :

1. Soit Y une singularité normale de dimension 2 dont il existe une résolution $Z \to Y$, telle que tous les diviseurs exceptionnels soient rationnels et s'intersectent transversalement. Supposons d'autre part que le graphe dual pondéré de $Z \to Y$ soit celui d'une singularité de Klein (plus généralement de n'importe quelle singularité quotient de $\mathbb{C}^2$ par un groupe fini). Alors Y est analytiquement isomorphe à la singularité de Klein X de même graphe. On dit que les singularités de Klein sont "taut" ("starr" en allemand). Voici une esquisse rapide de la démonstration de Brieskorn [1] : soit π_1 le groupe fondamental de Y-{point singulier} (pour une définition plus précise, voir [1]). On voit alors que π_1 ne dépend que du graphe pondéré de $Z \to Y$, en donnant une présentation de π_1 en termes de ce graphe. D'autre part Brieskorn montre que π_1 fini $\Leftrightarrow$ Y singularité quotient de $\mathbb{C}^2$ par π_1 (il utilise le théorème de Mumford que $\pi_1 = 0 \Leftrightarrow$ Y lisse, pour une singularité de surface Y). Comme X est une singularité quotient, son π_1 est fini. Donc le π_1 de Y est fini, donc Y est une singularité quotient. Mais les singularités quotients sont uniquement déterminées par leur graphe dual, c.q.f.d.

2. Brieskorn me fait remarquer qu'il conviendrait plutôt d'appeler les singularités de Klein singularités de Schwarz, puisque H.A. Schwarz les a étudiées (et a établi leurs équations) avant Klein.

3. Il conviendrait d'ajouter aux références de I l'article [10].

4. Une autre façon d'étudier les points doubles rationnels est de les représenter commes "plans doubles" $Z^2 = f(X,Y)$. C'est un point de vue classique : voir [8].

REFERENCES

[8] P. Du Val, On isolated singularities which do not affect the conditions of adjunction, Part I, II, III, Proc. Cambridge Phil. Soc., 30 (1934), 453-465 and 483-491.

[9] A. Fujiki, On resolutions of cyclic quotient singularities, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 10 (1974), 293-328.

[10] P.J. Giblin, Quotient singularities I, II, Lecture Notes, Liverpool University (May 1975).

[11] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford and B. Saint-Donat, Toroidal embeddings I, Lecture Notes in Math. 339, Springer (1973).

[12] P. Orlik, P. Wagreich, Singularities of algebraic surfaces with $\mathbb{C}^*$ action, Math. Ann. 193 (1971), 121-135.