Séminaire sur les singularités des surfaces
École Polytechnique

H. Pinkham

Singularités de Klein - I

Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 2, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977____A3_0>

© Séminaire sur les singularités des surfaces
(École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire sur les singularités des surfaces implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE SUR LES SINGULARITES DES SURFACES

SINGULARITES DE KLEIN - I

H. PINKHAM

12 Octobre 1976

Nous allons étudier certaines singularités de surface, quotients du plan affine $\mathbb{C}^2$ par un groupe fini de $SL(2,\mathbb{C})$. Nous verrons plus tard dans le séminaire que nous obtenons ainsi précisément les <u>points doubles rationnels</u>, et d'un autre point de vue, précisément les singularités (d'hypersurface) <u>simples</u> dans la terminologie d'Arnold. Dans ce premier exposé nous construisons l'algèbre affine des singularités en question.

Soit $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ la droite projective, G un sous-groupe fini d'ordre d du groupe d'automorphismes $PGL(2,\mathbb{C})$ de $\mathbb{P}^1$. Soit G' l'image inverse de G par le morphisme $SL(2,\mathbb{C}) \to PGL(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})/(\pm I)$. G' a ordre 2d. G' agit de façon naturelle sur $\mathbb{C}^2$ avec un point fixe à l'origine.

<u>Définition 1</u> : On appelle singularité de Klein de groupe G la variété X_G quotient de $\mathbb{C}^2$ par G', G' étant le sous-groupe de $SL(2,\mathbb{C})$ obtenu à partir de G comme ci-dessus.

Du point de vue des algèbres on regarde la sous-algèbre A de $\mathbb{C}[u,v]$ des polynômes invariants par G'. Alors $X_G = \operatorname{Spec} A$. Notons que puisque G' agit linéairement sur u et v, A a une structure d'algèbre graduée. D'autre part un polynôme homogène de degré impair ne peut pas être invariant par G', puisqu'il ne peut pas être invariant par -I qui appartient à G' par définition. Ceci nous amène à poser $A = \bigoplus_{k\geq 0} A_k$, où A_k est l'espace des polynômes homogènes de degré 2k invariants par G'.

Voici maintenant une autre définition qui est souvent plus commode. D'abord quelques généralités. Etant donné n'importe quelle variété algébrique X, on peut faire agir un groupe d'automorphismes G de X sur le faisceau des dérivations $\mathfrak{D}$ de X : si $g \in G$, $D \in \mathfrak{D}$, alors $D^g = g \circ D \circ g^{-1}$. Si X est lisse, $\mathfrak{D}$ est le faisceau tangent θ_X. Finalement, quand un groupe G agit linéairement sur un espace vectoriel V, on note V^G le sous-espace vectoriel des invariants.

<u>Définition 2</u> : On appelle singularité de Klein de groupe G la variété

$$X_G = \operatorname{Spec}\left(\bigoplus_{k\geq 0} H^o(\mathbb{P}^1, \theta_{\mathbb{P}^1}^{\otimes k})^G \right) .$$

Bien sûr, $\theta_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}(2)$. Donc on plonge $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^2$ par $\mathcal{O}(2)$, (on obtient donc une conique) et on prend le cône affine $C \subset \mathbb{C}^3$ sur la conique. G agit sur C. X_G est le quotient de C par G.

Montrons que les deux définitions sont équivalentes. Pour cela il suffit de voir que $A_k = H^o(\mathbb{P}^1, \theta_{\mathbb{P}^1}^{\otimes k})^G$. Mais par définition, $A_k = H^o(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2k))^{G'}$. D'autre part $-I$ agit trivialement sur $H^o(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2k))$. Puisque $\theta_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}(2)$, on a gagné.

Nous allons maintenant classifier les groupes G en question, suivant la méthode de Klein. Mettons-nous d'abord dans une situation un peu plus générale. Soient X une surface de Riemann compacte de genre g, G un groupe fini d'automorphismes de X d'ordre d. Le quotient de X par G existe, c'est une surface de Riemann compacte Y de genre g'. Soit $\pi : X \to Y$ le morphisme quotient. Soient $P_1, \ldots, P_N \in Y$ les points de ramification de π, d_i l'indice de ramification de P_i (c'est-à-dire l'ordre du stabilisateur d'un quelconque des points Q_i au-dessus de $P_i = \pi(Q_i)$) Donc si $P \neq P_i$, il y a d points au-dessus de P, et il y a d/d_i points au-dessus de P_i.

La formule d'Hurwitz dit que si K est un diviseur canonique de Y, alors

$$K' = \pi^{-1}(K) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{Q_i \to P_i} (d_i - 1)\, Q_i$$

est un diviseur canonique sur X. Si on calcule le degré de chaque côté, on obtient l'égalité

$$2g - 2 = d(2g' - 2) + \sum_{i=1}^{N} (d_i - 1) \frac{d}{d_i} \quad .$$

Quand $g = 0$, on voit sans difficulté sur cette équation que $g' = 0$ (théorème de Luroth). Donc

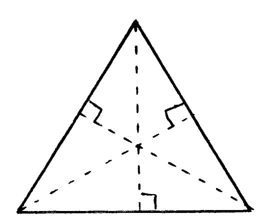
$$(*) \qquad 2d - 2 = \sum_{i=1}^{N} (d_i - 1) \frac{d}{d_i} \quad .$$

De cette égalité on obtient la liste complète des possibilitéstés pour les d_i (voir plus bas). En utilisant des arguments élémentaires de théorie des groupes, on montre que pour chaque possibilité pour les d_i il existe exactement un groupe d'automorphismes G la réalisant.

Voici la liste :

N	d	d_i			G
2	d	d	d		cyclique
3	2e	2	2	e	diédral
3	12	2	3	3	groupe de symétries du tétraèdre ($\simeq \mathfrak{A}_4$)
3	24	2	3	4	groupe de symétries de l'octaèdre ($\simeq \mathfrak{S}_4$)
3	60	2	3	5	groupe de symétries de l'icosaèdre ($\simeq \mathfrak{A}_5$)

Dans les trois derniers cas on peut réaliser l'action de G très joliment. Prenons le polyèdre régulier correspondant, et inscrivons-le dans la sphère. Subdivisons chaque face du polyèdre (qui est un triangle équilatéral) en 6 triangles rectangles, en joignant le centre de la face aux sommets et au milieu des côtés :



Projetons la figure obtenue du centre de la sphère sur la sphère ($= \mathbb{P}^1$). On obtient un pavage de $\mathbb{P}^1$ par triangles géodésiques (pour la métrique usuelle) d'angles $\pi/d_1 = \pi/2$, π/d_2 et π/d_3. Soit G^* le groupe engendré par réflexions dans les côtés. G est alors le sous-groupe d'indice 2 des éléments de G^* préservant l'orientation. On voit que G agit simplement transitivement sur les triangles.

Une construction analogue existe pour le cas dièdral. Voir [4].

Nous allons maintenant construire l'anneau de X_G. Ceci consiste primo à trouver un ensemble de générateurs des polynômes $f \in \mathbb{C}[u,v]$ invariants par G', et secundo à écrire toutes les relations entre les générateurs. Nous verrons que pour toutes les singularités de Klein, il y a trois générateurs, et donc une seule relation.

La façon la plus simple de procéder est de représenter explicitement l'action de G' et de calculer directement les invariants. Cette méthode marche dans les cas sauf dans celui de l'icosaèdre. Illustrons-la dans le cas cyclique et le cas dièdral.

<u>G cyclique d'ordre d</u> : Alors on voit que G' est cyclique d'ordre 2d avec un générateur agissant par $(u,v) \mapsto (\varepsilon u, \varepsilon^{-1} v)$, où $\varepsilon = e^{\pi i/d}$. On voit facilement qu'on engendre les invariants par uv, u^{2d} et v^{2d}. Si on écrit $X = 4uv$, $Y = u^{2d} + v^{2d}$, $Z = u^{2d} - v^{2d}$ on a la relation

$$Y^2 - Z^2 = X^{2d} \quad .$$

<u>G dièdral d'ordre d = 2e</u> : G' est engendré par $(u,v) \to (\varepsilon u, \varepsilon^{-1} v)$ et $(u,v) \mapsto (iv, iu)$. On obtient pour invariants $X = u^2v^2$, $Y = u^{2e} + (-v^2)^e$, $Z = uv(u^{2e} - (-v^2)^e)$ et la relation

$$Z^2 = X(Y^2 - 4X^e) \quad .$$

Dans les autres cas nous procédons différemment : on construira l'anneau de X_G sans connaître l'action de G sur $\mathbb{P}^1$, uniquement à partir des indices de ramification d_i .

<u>Définition</u> : Soit $\pi : X \to Y$ un revêtement Galois de surfaces de Riemann compactes, D un diviseur de X. On appelle le <u>diviseur écrasé</u> de D, noté $\tilde{D}$, le plus grand diviseur de Y (pour la relation d'ordre usuelle des diviseurs) tel que $\pi^{-1}(\tilde{D}) \leq D$. Evidemment, si $D = \pi^{-1}(E)$, alors $\tilde{D} = E$.

Revenons à notre situation $X = \mathbb{P}^1$, et calculons le diviseur écrasé de -kK', où K' est un diviseur canonique de X écrit selon la formule de Hurwitz (voir plus haut) dont nous gardons les notations.

Lemme : $\widetilde{-kK'} = -kK - \sum_{i=1}^{N} \left\{\frac{k(d_i-1)}{d_i}\right\} P_i$, où pour $a \in \mathbb{R}$, $\{a\}$ est le plus petit entier $\geq a$.

Pour simplifier l'écriture nous appelons $D^{(k)}$ ce diviseur sur Y. La démonstration du lemme est claire, si on se souvient que $\pi^{-1}(P_i) = \sum_{Q_i \to P_i} d_i\ Q_i$.

Rappelons que $X_G = \text{Spec } A$, $A = \bigoplus_{k \geq 0} A_k$.

Théorème : $A_k = H^o(Y, \mathcal{O}(D^{(k)}))$, et on peut trouver un système de générateurs de A de degrés < 2m, où m est le p.p.c.m. des d_i .

Preuve : Il s'agit d'abord de démontrer que $H^o(X, \mathcal{O}(-kK'))^G = H^o(Y, \mathcal{O}(D^{(k)}))$. L'inclusion $\supset$ est claire, puisque $\pi^{-1}(D^{(k)}) \leq -kK'$ par définition de $D^{(k)}$. Pour l'autre inclusion, prenons $f \in H^o(X, \mathcal{O}(-kK'))^G$. f est une fonction méromorphe sur X. Comme f est invariante par G, on peut la considérer comme une fonction méromorphe sur Y. Soit E son diviseur sur Y. Alors le diviseur de f sur X est $\pi^{-1}(E)$. Donc $\pi^{-1}(E) \geq kK'$, puisque $f \in H^o(X, \mathcal{O}(-kK'))$. Par définition de $D^{(k)}$, $\pi^{-1}(E) \geq -\pi^{1}(D^{(k)})$, donc $f \in H^o(X, \mathcal{O}(\pi^{-1}(D^{(k)})))$ et donc $f \in H^o(Y, \mathcal{O}(D^{(k)}))$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour la seconde assertion remarquons d'abord que pour tout k $D^{(k)} = D^{(m)} + D^{(k-m)}$. Supposons $k \geq 2m$. Nous montrerons que $D^{(k)}$, $D^{(m)}$ et $D^{(k-m)}$ sont de degré ≥ 0. On voit alors facilement que tout $f \in H^o(Y, \theta(D^{(k)})$ peut s'écrire gh, où $g \in H^o(Y, \mathcal{O}(D^{(m)}))$ et $h \mathcal{O} H^o(Y, \mathcal{O}(D^{(k-m)}))$. En effet soit E le diviseur de f. Donc $f = E + D^{(k)}$ est un diviseur positif, de degré positif égal au degré de $D^{(k)}$. Ecrivons $F = F' + F''$, où F' est positif de degré égal au degré de $D^{(m)}$ et F" positif de degré égal au degré de $D^{(k-m)}$. Puisque Y est rationnelle, on peut trouver des fonctions g et h de diviseur $F' - D^{(m)}$ et $F'' - D^{(k-m)}$ respectivement. A un scalaire près, $f = fh$ et $g \in H^o(Y, \mathcal{O}(D^{(m)}))$ et $h \in H^o(Y, \mathcal{O}(D^{(k-m)}))$. En recommençant le même procédé sur h, si $k-m \geq 2m$, on obtient la seconde assertion du théorème.

Donc il suffit de montrer que si $k \geq m$, alors $D^{(k)}$ est de degré ≥ 0. Ecrivons $k = qm + r$, $0 \leq r < m$ et $q \geq 1$. Alors $D^{(k)} = D^{(qm)} + D^{(r)}$. $D^{(qm)}$ est de degré strictement positif, puisque $D^{(qm)} = qD^{(m)}$ et par (*)

$D^{(m)}$ est de degré stritement positif : $D^{(m)} = m/d\ D^{(d)}$, et le degré de $D^{(d)}$ est 2. D'autre part on peut vérifier directement, cas par cas, que le degré $D^{(r)}$ est ≥ -1. (En réalité c'est une conséquence du fait que X_G est rationnelle : voir [7]). Donc $D^{(k)}$ est de degré ≥ 0, ce qu'il fallait démontrer.

Nous allons maintenant utiliser le théorème pour construire l'anneau de X_G dans les trois derniers cas. On prend pour $-K$ le diviseur $2P_3$ et on note t une fonction méromorphe sur $Y = \mathbb{P}^1$, de degré 1 avec un pôle au point P_3, un zéro au point P_1 et qui prend la valeur 1 au point P_2.

<u>G groupe du tétraèdre</u> : Alors $D^{(k)} = 2kP_3 - \left\{\frac{k}{2}\right\} P_1 - \left\{\frac{2k}{3}\right\} P_2 - \left\{\frac{2k}{3}\right\} P_3$, m=6.
On calcule les degrés des $D^{(k)}$, $k < 2m$, et on s'aperçoit qu'on peut choisir un ensemble de générateurs X, Y, Z de A en degrés 3, 4 et 6 :

$$D^{(3)} = 4P_3 - 2P_1 - 2P_2 \quad , \quad X = t^2(t-1)^2$$

$$D^{(4)} = 5P_3 - 2P_1 - 3P_2 \quad , \quad Y = t^2(t-1)^3$$

$$D^{(6)} = 8P_3 - 3P_1 - 4P_2 \quad , \quad Z = t^3(t-1)^4(t/2-1)$$

et la relation homogène de plus bas degré entre X, Y et Z est

$$\frac{X^4}{4} - Y^3 = \frac{t^8(t-1)^8}{4} - t^6(t-1)^q = t^6(t-1)^8\left(\frac{t^2}{4} - t + 1\right) = Z^2 .$$

On normalise les coefficients et on obtient $X^4 + Y^3 + Z^2 = 0$.

<u>G groupe de l'octaèdre</u> : $D^{(k)} = 2kP_3 - \left\{\frac{k}{2}\right\} P_1 - \left\{\frac{2k}{3}\right\} P_2 - \left\{\frac{3k}{4}\right\} P_3$, m = 12.
On obtient un ensemble de générateurs X, Y, Z de A en degrés 4, 6 et 9 :

$$D^{(4)} = 5P_3 - 2P_1 - 3P_2 \quad , \quad X = t^2(t-1)^3$$

$$D^{(6)} = 7P_3 - 3P_1 - 4P_2 \quad , \quad Y = t^3(t-1)^4$$

$$D^{(9)} = 11P_3 - 5P_1 - 6P_2 \quad , \quad Z = t^5(t-1)^6 .$$

La relation minimale est $Y^3 + X^3Y = Z^2$.

G groupe de l'icosaèdre : $D^{(k)} = 2kP_3 - \left\{\frac{k}{2}\right\} P_1 - \left\{\frac{2k}{3}\right\} P_2 - \left\{\frac{4k}{5}\right\} P_3$, $m = 30$.

Générateurs X, Y, Z en degrés 6, 10 et 15 :

$$D^{(6)} = 7P_3 - 3P_1 - 4P_2 \quad , \quad X = t^3(t-1)^4$$

$$D^{(10)} = 12P_3 - 5P_1 - 7P_2 \quad , \quad Y = t^5(t-1)^7$$

$$D^{(15)} = 18P_3 - 8P_1 - 10P_2 \quad , \quad Z = t^8(t-1)^{10}$$

La relation minimale est $X^5 + Y^3 = Z^2$.

Voici maintenant quelques généralisations des singularités de Klein.

1. On peut généraliser la définition 1, en remplaçant G' par n'importe quel sous-groupe fini de $GL(2,\mathbb{C})$. On obtient ainsi les singularités quotient, étudiées par Brieskorn dans [1].

2. Remplaçons $\mathbb{P}^1$ par $\mathbb{C}$ ou H (= demi plan supérieur), pavé par des triangles géodésiques d'angles π/p, π/q, π/r, tels que $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1}$ égale 1 dans le cas euclidien, <1 dans le cas hyperbolique. Soit Γ le sous-groupe d'indice deux du groupe de réflexions dans les côtés du trinagle. On étudie alors l'anneau des formes automorphes pour Γ. Les singularités obtenues sont étudiées par Dolgachev [2,3] et Milnor [6].

3. Soient X une surface de Riemann de genre arbitraire, G un groupe fini d'automorphismes de X, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible de rang 1, ample et invariant par G. On prend la variété

$$\operatorname{Spec}\left(\bigoplus_{k\geq 0} H^0(X,\mathcal{L}^{\otimes k})^G\right) .$$

Dolgachev [3] affirme qu'on obtient par cette construction toutes les singularités de surface normales avec action $\mathbb{C}^*$. Voir aussi [7] où l'on établit un théorème généralisant celui de cet article. Ces singularités, qui généralisent la seconde définition, sont appelées quotient-conical par Dolgachev. Evidemment, lorsque $X = \mathbb{P}^1$, on obtient toutes les singularités quotient.

Remarquons finalement que le calcul des invariants des singularités de Klein se trouve dans [5]. Une référence plus récente est [4].

REFERENCES

[1] E. Brieskorn, Rationale Singularitäten komplexer Flächen, Inv. Math., 4 (1968), 336-358.

[2] I. Dolgachev, Quotient-conical singularities on complex surfaces, Funk. Anal., 8 (1974), 160-161.

[3] I. Dolgachev, Automorphic forms and quasi-homogeneous singularities, Funk. Anal., 9 (2) (1975), 67-68.

[4] P. Du Val, Homographies quaternions and rotations, Oxford Univ. Press (1964).

[5] F. Klein, The icosahedron and the general 5th degree equation, (Dover reprint).

[6] J. Milnor, On the 3-dimensional Brieskorn manifolds M (p,q,r). In : Knots, groups, and 3-manifolds, Ann. Math. Studies, 84 (1975), 175-225.

[7] H. Pinkham, Deformations of normal surface singularities with $\mathbb{C}^*$ action (preprint).
