

SÉMINAIRE SUR LES SINGULARITÉS DES SURFACES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. LEJEUNE-JALABERT

Arcs analytiques et résolution minimale des singularités des surfaces quasi homogènes

Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 18, p. 1-33

http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977___A20_0

© Séminaire sur les singularités des surfaces
(École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire sur les singularités des surfaces implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E S U R L E S S I N G U L A R I T E S

D E S S U R F A C E S

ARCS ANALYTIQUES ET RESOLUTION MINIMALE

DES SINGULARITES DES SURFACES QUASI HOMOGENES

M. LEJEUNE-JALABERT

21 Juin 1977

ARCS ANALYTIQUES ET RESOLUTION MINIMALE DES SINGULARITES DES SURFACES QUASI HOMOGENES

par Monique LEJEUNE-JALABERT

INTRODUCTION

Ce travail consacré à l'étude des arcs tracés sur un germe de surface normale quasi homogène a été motivé par une question posée par J. Nash dans un préprint non publié : "Arc structure of singularities". Soit (V, v) un germe d'espace analytique réduit que nous supposons pour simplifier à singularité isolée en v . Rappelons qu'on désigne par arc sur (V, v) ou disque testant en v un germe de morphisme analytique non constant $h : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (V, v)$ où $\mathbb{D} = \{t \in \mathbb{C}, |t| < 1\}$ et que, dans la littérature, les arcs apparaissent dans les critères valuatifs (de propreté, de platitude, de dépendance intégrale sur un idéal), dans les définitions d'exposant idéaliste de contact, de contact maximal, dans des énoncés du type "curve selection lemma". Esquisons très brièvement la construction faite par Nash. \mathfrak{H} , l'ensemble des arcs sur (V, v) ne pouvant être muni d'une structure d'espace analytique, pour tout entier a , (x_1, \dots, x_n) étant un système de coordonnées sur un germe d'espace analytique lisse dans lequel on peut plonger (V, v) , il considère dans \mathbb{C}^{na} le constructible formé des c_{ij} , $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots a$ tel qu'il existe un arc $h \in \mathfrak{H}$ tel que :

$$x_i \circ h(t) \equiv \sum_{j=1 \dots a} c_{ij} t^j \pmod{t^{a+1}}$$

et il désigne par \mathfrak{H}_a son adhérence de Zariski dans \mathbb{C}^{na} . Il montre que le nombre de composantes irréductibles de \mathfrak{H}_a est une fonction croissante de a et est majoré par le nombre de composantes irréductibles de $\pi^{-1}(v)$ pour tout $\pi : V^* \rightarrow V$ qui soit une résolution des singularités de V . Précisément, si E_1, \dots, E_s désignent les composantes irréductibles de $\pi^{-1}(v)$, \mathfrak{H}_{ak} , l'adhérence de Zariski des troncations à l'ordre $a+1$ des images par π des arcs $h^* : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (V^*, v^*)$ où $v^* \in E_k$, est un fermé irréductible de \mathfrak{H}_a et $\mathfrak{H}_a = \bigcup_{k=1 \dots s} \mathfrak{H}_{ak}$.

Le problème posé par Nash est alors de savoir si, lorsque (V, v) est un germe de surface normale, pour a assez grand, la décomposition ainsi obtenue à partir de la résolution minimale $p : \tilde{V} \rightarrow V$ est la décomposition de \mathbb{H}_a en composantes irréductibles.

S'il n'en était pas ainsi, par exemple \mathbb{H}_{a1} serait inclus strictement dans \mathbb{H}_{a2} . Ceci signifierait que si h_{1a} est un élément "général" de \mathbb{H}_{a1} (autrement dit la a -troncation d'un arc h_1 sur (V, v) dont l'unique relèvement \tilde{h}_1 à \tilde{V} est tel que $\tilde{v} = \tilde{h}_1(0)$ soit un point "général" de E_1 et que \tilde{h}_1 soit transverse à E_1 en ce point -un arc sur (V, v) ayant ces deux propriétés relativement à une composante de $p^{-1}(v)$ sera dit "générique"-) il existe un disque $g : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\mathbb{H}_{a2}, h_{1a})$ où $\mathbb{D} = \{\xi \in \mathbb{C}, |\xi| < 1\}$ tel que $g(0) = h_{1a}$ et si $\xi \neq 0$, $g(\xi) \in \mathbb{H}_{a2} - \mathbb{H}_{a1}$ ou plus précisément encore est la a -troncation d'un arc g_ξ sur (V, v) dont le relèvement à \tilde{V} passe par un point "général" de E_2 . Si on pouvait construire un tel g_ξ de façon à ce que $g(\xi, t) = g_\xi(t)$ définisse un germe de morphisme analytique $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (V, v)$, φ ne pourrait se relever à la résolution minimale.

Je me suis donc posée la question plus simple suivante : soit h un arc "générique" sur (V, v) au sens ci-dessus et $\varphi(\xi, t) : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (V, v)$ un germe de morphisme analytique tel que $\varphi(0, t) = h(t)$; φ se relève-t-il à la résolution minimale \tilde{V} . Je donne une réponse affirmative à cette question dans le cas 1) où V a en v une singularité torique normale (§1, prop.3.1.1), 2) où V admet une bonne action de $\mathbb{C}^* - 2_1$) si le genre de la courbe projective quotient de V par cette action est supérieure ou égal à 1 (§2, prop.2.2) - 2₂) s'il est 0 et si la résolution canonique de Orlik-Wagreich coïncide avec la résolution minimale lorsque h est un disque "générique" se relevant en un disque \tilde{h} pour lequel $\tilde{h}(0)$ est un point "général" de la composante représentée dans le graphe associé à cette résolution qui est alors une étoile par le centre de l'étoile (§2, Prop.2.3). Ce dernier cas est techniquement le plus délicat. Dans tous les énoncés, le sens des mots générique et général est convenablement précisé.

§1 - SINGULARITE TORIQUE NORMALE DE DIMENSION 2

1.1. DEFINITION. - Soit T le groupe algébrique \mathbb{C}^{*n} . Un plongement torique affine X est une variété algébrique affine normale contenant T comme ouvert de Zariski partout dense et munie d'une action de T

$$T \times X \rightarrow X$$

prolongeant l'action $T \times T \rightarrow T$.

1.2. DEFINITION. - Soit V un espace analytique complexe et v un point de V . On dit que V a en v une singularité torique, s'il existe un plongement torique affine X , un point x de X et un isomorphisme de \mathbb{C} -algèbres locales :

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathcal{O}}_{V,v} .$$

Rappelons les propriétés suivantes dont on trouvera le détail des démonstrations dans [2] .

1.3. Soit $N = \text{Hom}_{\text{groupe algébrique}}(\mathbb{C}^*, T)$ et $M = \text{Hom}_{\text{groupe algébrique}}(T, \mathbb{C}^*)$. N et M sont des \mathbb{Z} -modules libres de rang n et il existe une dualité naturelle $M \times N \rightarrow \mathbb{Z} \simeq \text{Hom}_{\text{groupe algébrique}}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ défini par $\langle r, a \rangle \mapsto roa$.

Soit U_1, \dots, U_n (resp. τ) un système de coordonnées sur T (resp. \mathbb{C}^*) . On identifie N à \mathbb{Z}^n en associant à $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ le morphisme de $\mathbb{C}^* \rightarrow T$ correspondant au \mathbb{C} -morphisme :

$$\Gamma(T, \mathcal{O}_T) \simeq \mathbb{C}[U_1, U_1^{-1}, \dots, U_n, U_n^{-1}] \rightarrow \Gamma(\mathbb{C}^*, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}) \simeq \mathbb{C}[\tau, \tau^{-1}]$$

$$U_i \mapsto \tau^{a_i} .$$

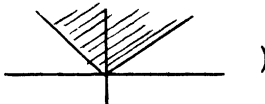
On identifie M à \mathbb{Z}^n en associant à $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}^n$ le morphisme de T dans \mathbb{C}^* correspondant au \mathbb{C} -morphisme :

$$\Gamma(\mathbb{C}^*, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}) \simeq \mathbb{C}[\tau, \tau^{-1}] \rightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T) \simeq \mathbb{C}[U_1, U_1^{-1}, \dots, U_n, U_n^{-1}]$$

$$\tau \rightarrow U_1^{r_1} \dots U_n^{r_n} .$$

La dualité naturelle s'identifie alors à :

$$\langle r, a \rangle \mapsto \sum r_i a_i .$$

Soit $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ un cône convexe rationnel polyédral (c.c.r.p.) i.e. un sous-ensemble de \mathbb{R}^n défini par la positivité d'un nombre fini de formes linéaires à coefficients rationnels. (Si $n = 2$, tout c.c.r.p. est un secteur angulaire convexe ) .

Soit $\check{\sigma} \subset M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ le c.c.r.p. dual de σ , i.e. $\{r \in \mathbb{R}^n : \langle r, a \rangle \geq 0, \forall a \in \sigma\}$.

Soit $S = \check{\sigma} \cap M$, c'est un semi-groupe de \mathbb{Z}^n . Soit $\mathbb{C}[S]$ l'algèbre de ce semi-groupe (la sous-algèbre de $\mathbb{C}[U_1, U_1^{-1}, \dots, U_n, U_n^{-1}]$ engendrée par $U_1^{r_1} \dots U_n^{r_n}$ où $r \in \check{\sigma} \cap M$). Soit $X_{\sigma} = \text{Spec } \mathbb{C}[S]$. La correspondance $\sigma \rightarrow X_{\sigma}$ est une bijection entre l'ensemble des c.c.r.p. de $N_{\mathbb{R}}$ ne contenant aucun sous-espace linéaire et les plongements toriques affines.

1.4. Si $n = 2$, il y a 4 orbites sur un plongement torique affine X_{σ} , une de dimension 2 ouverte isomorphe à T , 2 de dimension 1 et 1 de dimension 0 qui est l'unique orbite fermée. Soit x ce point. C'est l'unique point singulier possible de X_{σ} . De plus l'idéal des fonctions régulières sur X_{σ} qui s'annulent en x est engendré par les $U_1^{r_1} U_2^{r_2}$ où $r \in \check{\sigma} \cap M$, $r \neq 0$ [2] (th.2, ch.I).

1.5. On dit que $f \in \Gamma(X_{\sigma}, \mathcal{O}_{X_{\sigma}})$ est équivariante si $f(t \times x) = f(t) \times f(x)$. Dans l'identification de $\Gamma(X_{\sigma}, \mathcal{O}_{X_{\sigma}})$ à $\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M]$, celles-ci s'identifient aux monômes U^r où $r \in \check{\sigma} \cap M$.

2.1. Soit V un espace analytique complexe ayant en v une singularité torique de dimension 2. On suppose V singulier en v . Soit $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (V, v)$ un germe de morphisme formel. Soient X_σ un plongement torique affine, x son unique point singulier tels que $\hat{\mathcal{O}}_{V, v}$ et $\hat{\mathcal{O}}_{X_\sigma, x}$ s'identifient. On désignera encore par φ le germe de morphisme formel $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (X_\sigma, x)$ qu'on en déduit.

2.1.1. On suppose qu'il existe un disque testant formel $h : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ (où \mathbb{D} désigne le disque unité du plan complexe) tel que $\varphi \circ h$ ne se factorise pas à travers l'immersion fermée de l'adhérence d'aucune des 2 orbites de dimension 1 dans (X_σ, x) .

La donnée de φ est équivalente à la donnée d'un \mathbb{C} -morphisme $\hat{\mathcal{O}}_{X_\sigma, x} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^n, 0} \simeq \mathcal{O}_n$

où \mathcal{O}_n est l'anneau des séries formelles à n variables à coefficients dans \mathbb{C} . On en déduit avec les notations ci-dessus un \mathbb{C} -morphisme :

$$\Gamma(X_\sigma, \mathcal{O}_{X_\sigma}) \simeq \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M] \rightarrow \mathcal{O}_{X_\sigma, x} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_{X_\sigma, x} \rightarrow \mathcal{O}_n.$$

Soit $r \in \check{\sigma} \cap M$ et U^r le monôme correspondant. Il ne s'envoie pas sur 0 dans \mathcal{O}_n . En effet, U^r appartiendrait à l'idéal définissant (Γ, x) , l'image de $(\mathbb{D}, 0)$ par h . Comme U^r est une fonction équivariante et que T est une orbite dense sur X_σ , on en déduirait que $U^r = 0$ ce qui est absurde (ceci ne signifie pas que $\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M] \rightarrow \mathcal{O}_n$ soit injective). Comme $\check{\sigma} \cap M$ engendre M en tant que \mathbb{Z} -module, on peut écrire :

$$U_i = \frac{U^{r_i}}{U^{s_i}} \quad \text{où } r_i, s_i \in \check{\sigma} \cap M, \quad i = 1, 2$$

et on peut donc associer à chaque U_i , $i = 1, 2$ une fonction méromorphe formelle. \mathcal{O}_n étant un anneau factoriel, on peut écrire :

$$U_1 = c_1 f_1^{\alpha_1} \dots f_k^{\alpha_k}$$

$$U_2 = c_2 f_1^{\beta_1} \dots f_k^{\beta_k}$$

où c_1 et c_2 sont des unités de \mathcal{O}_n , f_1, \dots, f_k des séries formelles irréductibles dans l'idéal maximal de \mathcal{O}_n et où $(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{Z}^2 - \{0,0\}$, $i = 1 \dots k$. De plus, pour tout $r = (r_1, r_2) \in \check{\sigma} \cap M$, l'image de

$U^r = U_1^{r_1} U_2^{r_2}$ dans le corps des fractions de \mathcal{O}_n , autrement dit

$c_1^{r_1} c_2^{r_2} \prod_{i=1}^k f_i^{r_1 \alpha_i + r_2 \beta_i}$ doit être en fait dans \mathcal{O}_n . Ceci entraîne que

$(\alpha_i, \beta_i) \in \sigma$, $i = 1 \dots k$ et que de plus, ces k points n'appartiennent pas à la même face de σ .

Réciproquement, pour définir un $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (X_\sigma, x)$ satisfaisant 2.1.1, il suffit de se donner $k \geq 1$ points de $\sigma \cap N - \{0,0\}$ pas tous situés sur la même face de dimension 1 de σ , k éléments irréductibles de \mathcal{O}_n et deux unités c_1, c_2 . En effet, on reconstruit immédiatement à partir de ces données un \mathbb{C} -morphisme $\hat{\mathcal{O}}_{X_\sigma, x} \rightarrow \mathcal{O}_n$.

Si $(r_1, r_2) \in \check{\sigma} \cap M$, $c_1^{r_1} c_2^{r_2} \prod_{i=1}^k f_i^{r_1 \alpha_i + r_2 \beta_i} \in \mathcal{O}_n$. L'idéal des fonctions de X_σ s'annulant en x étant engendré par U^r où $r \in \check{\sigma} \cap M - \{0,0\}$ une fonction qui ne s'y annule pas est envoyée sur une unité de \mathcal{O}_n tandis qu'une qui s'y annule est envoyée sur un élément de l'idéal maximal de \mathcal{O}_n . De plus, on peut choisir un système de coordonnées t_1, \dots, t_n sur \mathbb{C}^n tel que $f_i(t_1, 0, \dots, 0) = t_1^{e_i}$, $e_i \in \mathbb{N}$, $e_i \geq 1$. On a alors

$$U_1 = t_1^{\sum \alpha_i e_i}$$

$$U_2 = t_1^{\sum \beta_i e_i}.$$

Comme $(\alpha_i, \beta_i) \in \sigma$ et que $\sigma \cap N$ est un semi-groupe de N , $(\sum \alpha_i e_i, \sum \beta_i e_i) \in \sigma$; $h : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ défini par $t_1 \circ h = t$, $t_i \circ h = 0$, $i \geq 2$ satisfait 2.1.1.

2.2. Germe de morphismes finis $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (X_\sigma, x)$.

D'après le théorème de préparation de Weierstrass, la condition de finitude de \mathcal{G}_2 sur $\hat{\mathcal{O}}_{X_\sigma, x}$ est équivalente à :

$$\text{rg } \mathbb{C} \mathcal{G}_2 / M_{X_\sigma, x}^\wedge < \infty.$$

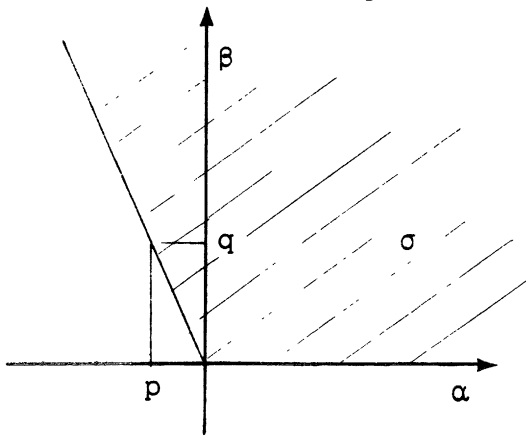
Ceci se traduit par

$$\text{rg}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_2 / (\dots, \prod_{i=1}^k f_i^{r_1 \alpha_i + r_2 \beta_i}, \dots)_{\substack{r \in \check{\sigma} \cap M \\ r \neq 0}} < \infty$$

\mathcal{O}_2 étant factoriel, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que pour tout i , il existe $r_i = (r_{i1}, r_{i2})$ tel que

$$r_{i1} \alpha_i + r_{i2} \beta_i = 0$$

ce qui signifie que (α_i, β_i) appartient à une face de σ . A un changement de coordonnées près sur le tore T , on peut supposer que σ est



le c.c.r.p. défini par $\beta \geq 0$,

$q\alpha - p\beta \geq 0$ où $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0$

et $(p, q) = 1$. Puisque les k points

(α_i, β_i) n'appartiennent pas à la même

face de σ , on peut également en ré-

indexant au besoin les f_i supposer que :

$$\beta_i = 0, \quad i = 1, \dots, r$$

$$q\alpha_i - p\beta_i = 0, \quad i = r+1, \dots, k.$$

On détermine donc $\lambda_i \in \mathbb{N}$, $i = r+1, \dots, k$ tels que $\alpha_i = \lambda_i p$, $\beta_i = \lambda_i q$ et on a

$$2.2.1. \quad U_1 = c_1 (f_1^{\alpha_1} \dots f_r^{\alpha_r}) (f_{r+1}^{\lambda_{r+1}} \dots f_k^{\lambda_k})^p$$

$$U_2 = c_2 (f_{r+1}^{\lambda_{r+1}} \dots f_k^{\lambda_k})^q.$$

Soit $\mathbb{C}[U, V]$ l'anneau de polynômes à 2 indéterminées sur \mathbb{C} et envoyons U_1 sur UV^p et U_2 sur V^q .

2.2.2. On en déduit un morphisme algébrique $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow X_\sigma$ correspondant à celui de $\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M] \rightarrow \mathbb{C}[U, V]$ qui envoie :

$$U_1^{r_1} U_2^{r_2} \mapsto U^1 V^{r_1 p + r_2 q}$$

$\check{\sigma}$ est justement le c.c.r.p. défini par $r_1 \geq 0$, $r_1 p + r_2 q \geq 0$. Consi-

dérons sur \mathbb{C}^2 l'action du sous-groupe cyclique de $GL(2, \mathbb{C})$ engendré par la matrice $\begin{pmatrix} e^{-2i\pi p/q} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi/q} \end{pmatrix}$. Soit $U^r V^{r_1 p + r_2 q}$, $r \in \check{\sigma} \cap M$, l'image d'une fonction régulière sur X_σ . Elle est laissée stable par l'action du groupe.

Réciproquement, une fonction invariante par le groupe doit être somme de monômes invariants. $U^r V^{s_2}$ se transforme en

$$e^{-2i\pi \frac{p}{q} r_1 + 2i\pi \frac{s_2}{q}} U^r V^{s_2}. \text{ On doit donc avoir } \frac{-pr_1}{q} + \frac{s_2}{q} = r_2, r_2 \in \mathbb{Z}$$

ou $s_2 = pr_1 + qr_2$ et $(r_1, r_2) \in \check{\sigma}$ puisque $r_1 \in \mathbb{N}$ et $s_2 = pr_1 + qr_2 \in \mathbb{N}$. X_σ est donc une singularité quotient. Précisément, si p est négatif et écrivant que $-p = aq + r$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r < q$ ($r=0$ est impossible, ceci entraînerait que $q=1$ puisque $(p, q) = 1$ et le simplexe correspondant serait de multiplicité 1 donc X_σ non singulier); on a alors

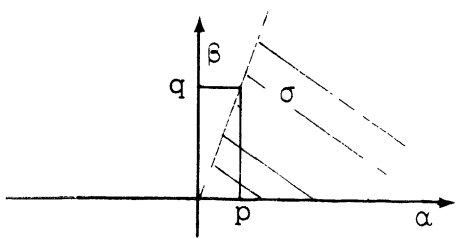
$$\begin{pmatrix} e^{-2i\pi \frac{p}{q}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2i\pi \frac{r}{q}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{q}} \end{pmatrix}$$

et X_σ est la singularité $C_{q,r}$ de Brieskorn [1]. Si p est positif et écrivant que $p = aq + r$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r < q$ ($r=0$ est impossible, car comme ci-dessus, ceci entraînerait $q=1$ et X_σ non singulier); on a alors

$$\begin{pmatrix} e^{-2i\pi \frac{p}{q}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2i\pi \frac{r}{q}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2i\pi \frac{q-r}{q}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{q}} \end{pmatrix}$$

et $1 \leq q-r < q$. X_σ est la singularité $C_{q,q-r}$.

2.2.3. On obtient donc toutes les surfaces toriques singulières en considérant des c.c.r.p. σ définis par $\beta \geq 0$ et $q\alpha - p\beta \geq 0$

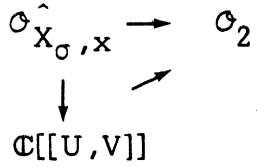


avec $q \geq 1$, $p \geq 1$ ($(p, q) = 1$ et $1 \leq p < q$). X_σ est alors $C_{q,q-p}$. Le morphisme fini $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow X_\sigma$ décrit

ci-dessus est le morphisme canonique décrivant X_σ comme quotient de \mathbb{C}^2 . On a $\pi^{-1}(x) = 0$; en effet U^q et V^q sont dans $M_{X_\sigma, x} \cdot \mathbb{C}[U, V]$ (cf. [4], § 1.4).

2.2.4. PROPOSITION. - Tout germe de morphisme formel fini
 $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (X_\sigma, x)$ se factorise par le morphisme canonique π .

En effet, il s'agit de construire une flèche $\mathbb{C}[[U, V]] \rightarrow \mathcal{O}_2$ tel que

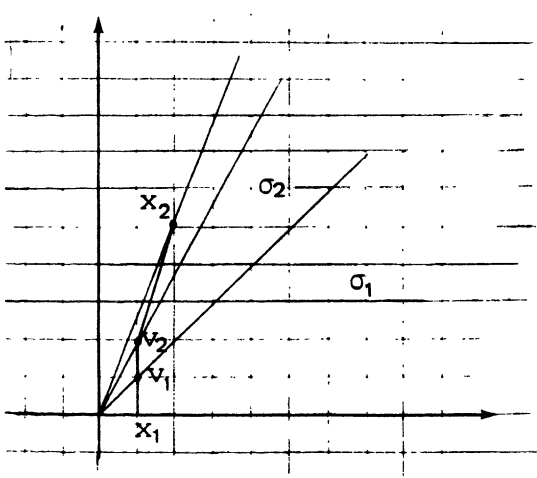


L'application qui consiste à substituer à U la série formelle $f_1^{\alpha_1} \dots f_r^{\alpha_r}$ et à V la série formelle $f_{r+1}^{\lambda_{r+1}} \dots f_k^{\lambda_k}$ convient puisque $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_k \in \mathbb{N}$.

2.3. Condition de relèvement à la résolution minimale d'un germe
 $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (X_\sigma, x)$.

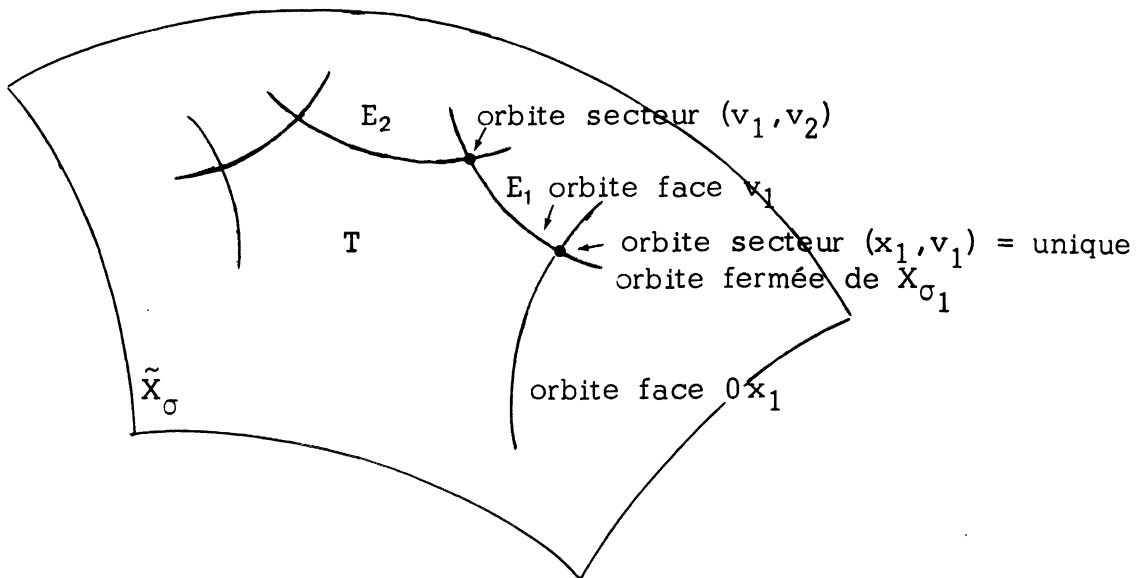
Soit σ le c.c.r.p. déterminant X_σ . Rappelons qu'on obtient la résolution minimale de X_σ de la façon suivante :

Soit Σ l'adhérence convexe de $\sigma \cap N - \{0, 0\}$. Soient $x_1, v_1, \dots, v_k, x_2$ les points de N sur le bord de Σ . On construit les rayons $\overline{\sigma v_i}$ et les secteurs entre eux. La résolution minimale \tilde{X}_σ est la variété obtenue en recollant les différentes cartes affines correspondant à chaque secteur ainsi déterminé.



Soit $\pi : \tilde{X}_\sigma \rightarrow X_\sigma$ le morphisme canonique provenant de l'inclusion de chaque sous-secteur dans σ . Ensemblistement $\pi^{-1}(x) = E_1 \cup \dots \cup E_k$ où chaque E_i est un \mathbb{P}^1 et où $(E_i, E_j) = 0$ si $j \neq i+1, i-1$ $(E_i, E_{i+1}) = 1$.

Géométriquement, on a :

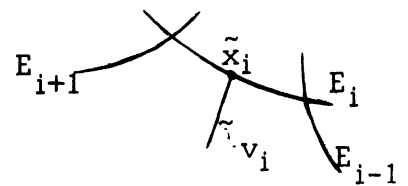


voir [2], page 37. Plus précisément, on a (cf. [4] §§ 1.5 et 1.6) :

2.3.1. PROPOSITION. - L'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X_\sigma, x}$ se remonte sur \tilde{X}_σ en l'idéal inversible correspondant au diviseur $\sum_{i=1}^k E_i$. Soit

$v_i = (a_i, b_i)$ et soit le groupe à 1 paramètre $\mathbb{C}^* \rightarrow T$ défini par $U_1 = t^{a_i}$, $U_2 = t^{b_i}$. Soit $\lambda_{v_i} : \mathbb{C} \rightarrow X_\sigma$ (resp. $\tilde{\lambda}_{v_i} : \mathbb{C} \rightarrow \tilde{X}_\sigma$) son unique prolongement. On a $\pi \circ \tilde{\lambda}_{v_i} = \lambda_{v_i}$; $\tilde{x}_i = \tilde{\lambda}_{v_i}(0) \in E_i - E_{i-1} - E_{i+1}$; $x = \lambda_{v_i}(0)$ et de plus

$$v(\lambda_{v_i}^* \cdot M_{X_\sigma, x}) = 1$$



où v est la valuation naturelle sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}, 0}$.

Démonstration : Soit \tilde{X}_{σ_i} l'ouvert affine de \tilde{X}_σ correspondant au secteur (v_{i-1}, v_i) , $i \geq 1$. Puisque \tilde{X}_σ est non singulier, (v_{i-1}, v_i) est une base de N sur \mathbb{Z} ([2] th.4). Ceci entraîne que

$$\begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i \\ b_{i-1} & b_i \end{vmatrix} = a_{i-1} b_i - a_i b_{i-1} = 1 .$$

(Il doit être inversible dans \mathbb{Z} et l'indexation est faite de façon à ce que la base (v_{i-1}, v_i) ait la même orientation que la base canonique).

Le système

$$\begin{cases} r_1 a_{i-1} + r_2 b_{i-1} = 1 \\ r_1 a_i + r_2 b_i = 1 \end{cases}$$

a donc une unique solution dans M que nous noterons $\rho = (\rho_1, \rho_2)$.

Montrons que $\rho \in \check{\sigma} \cap M$. $\rho_1 \alpha + \rho_2 \beta = 1$

est l'équation de la droite joignant l'extré-

mité de v_{i-1} à celle de v_i . Or c'est

le support de l'un des bords de Σ l'adhé-

rence convexe de $\sigma \cap N - \{0,0\}$, qui est donc situé tout entier du même

côté de cette droite. On a donc

$$\rho_1 \alpha + \rho_2 \beta - 1 \geq 0, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \sigma \cap N - \{0,0\}.$$

En particulier, x_1 et x_2 sont dans $\sigma \cap N - \{0,0\}$ et donc

$$\langle \rho, x_i \rangle - 1 \geq 0, \quad i = 1 \text{ et } 2.$$

Mais tout a de σ peut s'écrire $a = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \geq 0$

et $\langle \rho, a \rangle = \lambda_1 \langle \rho, x_1 \rangle + \lambda_2 \langle \rho, x_2 \rangle \geq \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$ et $\rho \in \check{\sigma} \cap M$. Puisque

$\rho \neq 0$, $U^\rho \in M_{X_\sigma, X}$ et puisque $\rho_1 a_i + \rho_2 b_i = 1$,

$$U^\rho \circ \lambda_{v_i} = t, \quad \text{et} \quad v(\lambda_{v_i}^* M_{X_\sigma, X}) = 1.$$

Remarquons d'autre part que $\check{\sigma}_i$ est le secteur $(b_i, -a_i)$,

$(-b_{i-1}, a_{i-1})$ et que les fonctions $U_1^{b_i} U_2^{-a_i}$, $U_1^{-b_{i-1}} U_2^{a_{i-1}}$ sont un

système de coordonnées sur \tilde{X}_{σ_i} . On a en fait

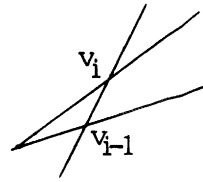
$$\rho_1 = b_i - b_{i-1}, \quad \rho_2 = -a_i + a_{i+1}.$$

Il reste donc à voir que $M_{X_\sigma, X}$ se relève sur \tilde{X}_{σ_i} en un idéal princi-

pal, celui engendré par U^ρ . Ceci est équivalent à voir que $\text{ord } M_{X_\sigma, X}$

coïncide avec la forme linéaire ρ sur σ_i .

Rappelons que si $a \in \sigma_i$, $\text{ord } M_{X_\sigma, X}(a) = \min_{\substack{r \in \check{\sigma} \cap M \\ r \neq 0}} \langle r, a \rangle$. On a



$v_i, v_{i-1} \in \sigma$ et comme ces vecteurs ne sont pas portés par une face, on a

$$\langle r, v_i \rangle > 0 \quad \text{et} \quad \langle r, v_{i-1} \rangle > 0 \quad \text{si} \quad r \in \check{\sigma}, \quad r \neq 0.$$

Si de plus $r \in \check{\sigma} \cap M$, $\langle r, v_{i-1} \rangle$ et $\langle r, v_i \rangle$ sont des entiers. Alors

$$\langle r, v_{i-1} \rangle \geq 1 = \langle \rho, v_{i-1} \rangle$$

$$\langle r, v_i \rangle \geq 1 = \langle \rho, v_i \rangle.$$

Si maintenant $a \in \sigma_i$, il existe λ_{i-1} et λ_i des réels positifs tels que

$$a = \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_i v_i$$

et si $r \in \check{\sigma} \cap M$, $r \neq 0$

$$\langle r, a \rangle = \lambda_{i-1} \langle r, v_{i-1} \rangle + \lambda_i \langle r, v_i \rangle \geq \lambda_{i-1} \langle \rho, v_{i-1} \rangle + \lambda_i \langle \rho, v_i \rangle$$

$$\langle r, a \rangle \geq \langle \rho, a \rangle.$$

Remarquons enfin que $U_1^{b_i} U_2^{-a_i} \circ \tilde{\lambda}_{v_i} = 1$ et $U_1^{-b_{i-1}} U_2^{a_{i-1}} \circ \tilde{\lambda}_{v_i} = t$.

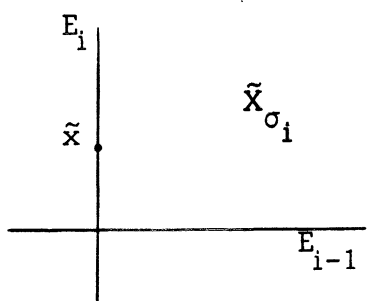
2.3.2. Soit donc $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (X_\sigma, x)$ un germe de morphisme formel satisfaisant la condition 2.1.1 et soient (f_1, \dots, f_k) et (α_i, β_i) $i = 1 \dots k$, les k éléments irréductibles de \mathcal{O}_2 et les k points de $\sigma \cap N - \{0, 0\}$ non tous sur la même face qui le décrivent. Supposons que φ se relève à la résolution minimale \tilde{X}_σ en $\tilde{\varphi} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\tilde{X}_\sigma, \tilde{x})$ tel que $\pi \circ \tilde{\varphi} = \varphi$.

■ ou \tilde{x} est un point singulier de $\pi^{-1}(x)$. Par exemple, $\tilde{x} = E_{i-1} \cap E_i$, $2 \leq i \leq k$ est l'orbite correspondant au secteur (v_{i-1}, v_i) . Alors $\tilde{x} \in \tilde{X}_{\sigma_i}$ et puisque \tilde{X}_{σ_i} est un ouvert de \tilde{X}_σ , $(\tilde{X}_{\sigma_i}, \tilde{x}) = (X_\sigma, \tilde{x})$. Dans ce cas

2.3.2.1. $(\alpha_\ell, \beta_\ell) \in \sigma_i$, $\ell = 1 \dots k$ et ils ne sont pas tous situés sur une même face de σ_i .

■ ou \tilde{x} est un point lisse de $\pi^{-1}(x)$. Par exemple, $\tilde{x} \in E_i$.
 Si $i \neq 1$ (resp. $i \neq k$), la partie lisse de E_i coïncide exactement avec l'orbite correspondant à la face v_i ; sinon, il faut rajouter un point celui correspondant au secteur (x_1, v_1) (resp. (v_k, x_2)).

Dans le premier cas, \tilde{X}_{σ_i} a pour système de coordonnées $U_1^{b_i} U_2^{-a_i}$, $U_1^{-b_{i-1}} U_2^{a_{i-1}}$ et l'équation de E_i est $U_1^{-b_{i-1}} U_2^{a_{i-1}} = 0$.



Le germe d'application $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\tilde{X}_{\sigma_i}, \tilde{x})$ étant décrit par :

$$\begin{cases} U_1^{b_i} U_2^{-a_i} = c_1^{b_i} c_2^{-a_i} \prod_{j=1}^k f_j^{b_i \alpha_j - a_i \beta_j} \\ U_1^{-b_{i-1}} U_2^{a_{i-1}} = c_1^{-b_{i-1}} c_2^{a_{i-1}} \prod_{j=1}^k f_j^{-b_{i-1} \alpha_j + a_{i-1} \beta_j} \end{cases}$$

et on doit avoir $U_1^{b_i} U_2^{-a_i}(\varphi(0)) = U_1^{b_i} U_2^{-a_i}(\tilde{x}) \neq 0$. Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que $b_i \alpha_j - a_i \beta_j = 0$, $j = 1 \dots k$ et ceci suffit car alors $-b_{i-1} \alpha_j + a_{i-1} \beta_j > 0$.

Si $\tilde{x} \in E_1 - E_2$ et si $\tilde{x} \in$ orbite correspondant à la face v_1 , alors $b_1 \alpha_j - a_1 \beta_j = 0$, $j = 1 \dots k$.

Si $\tilde{x} \in$ orbite correspondant à la face (x_1, v_1) alors $(\alpha_j, \beta_j) \in \sigma_1$, $\forall j = 1 \dots k$ et ils ne sont pas tous situés sur la même face de σ_1 .

2.3.3. DEFINITION. - Soit $h : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (X_\sigma, x)$ un disque testant.

On dira que h est un disque "générique" si désignant par $\tilde{h} : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\tilde{X}_\sigma, \tilde{x})$ l'unique relèvement de h , on a :

- 1) \tilde{x} est un point non singulier de $\pi^{-1}(x)$ (appartient à un seul E_i) ;
- 2) $\nu(\tilde{h}^* M_{\tilde{X}_\sigma, \tilde{x}}) = 1$;
- 3) l'image de \tilde{h} est une courbe non singulière transverse à E_i en \tilde{x} .

(i.e. l'application h^* est transverse à E_i en \tilde{x}).

Si h vérifie 2.1.1, alors écrivant que

$$\begin{cases} U_1 = c_1 t^\alpha \\ U_2 = c_2 t^\beta \end{cases} \quad \text{où } \mathcal{O}_1 = \mathbb{C}[[t]] \quad \text{et où } c_1 \text{ et } c_2 \text{ sont des unités.}$$

■ S'il existe i tel que \tilde{x} soit dans l'orbite d'une face v_i , on doit avoir puisque

$$\begin{cases} U_1^i U_2^{-a_i} = c_1^i c_2^{-a_i} t^{\alpha b_i - \beta a_i} \\ U_1^{-b_{i-1}} U_2^{a_{i-1}} = c_1^{-b_{i-1}} c_2^{a_{i-1}} t^{-\alpha b_{i-1} + \beta a_{i-1}} \end{cases}$$

$\alpha b_i - \beta a_i = 0$, i.e. $\exists k \in \mathbb{N}$, $\alpha = k a_i$, $\beta = k b_i$

ce qui entraîne que

$$\begin{cases} U_1^i U_2^{-a_i} - U_1^i U_2^{-a_i}(\tilde{x}) = c_1^i c_2^{-a_i} - c_1^i(0) c_2^{-a_i}(0) = \sum_{m \geq 1} a_m t^m \\ U_1^{-b_{i-1}} U_2^{a_{i-1}} = c_1^{-b_{i-1}} c_2^{a_{i-1}} t^{k(-a_i b_{i-1} + b_i a_{i-1})} = V(t) t^k \end{cases}$$

où V est une unité.

La condition 3) de généricité implique alors que $k \leq \inf_{a_m \neq 0} m$

puisque la tangente à l'image de \tilde{h} doit être transverse à E_i donc pas l'axe des $U_1^i U_2^{-a_i}$. On a donc $v(\tilde{h}^* M_{\tilde{X}_\sigma, \tilde{x}}) = k$ et la condition

2) entraîne $k = 1$. h doit donc être décrit par :

$$\begin{cases} U_1 = c_1 t^{a_i} \\ U_2 = c_2 t^{b_i} \end{cases} \quad \text{où } c_1 \text{ et } c_2 \text{ sont des unités}$$

et ceci est suffisant.

■ Si \tilde{x} est le point de E_1 appartenant à l'orbite correspondant au secteur (x_1, v_1) , $\mathbb{C}[\check{\sigma}_1 \cap M] = \mathbb{C}[U_2, U_1 U_2^{-1}]$ et $U_2(\tilde{x}) = U_1 U_2^{-1}(\tilde{x}) = 0$. Ici $E_1 \cap \tilde{X}_{\sigma_1}$ est défini par $U_2 = 0$. On obtient donc :

$$U_1^{b_1} U_2^{-a_1} = U_1 U_2^{-1} = c_1 c_2^{-1} t^{\alpha-\beta}$$

$$U_2 = c_2 t^\beta .$$

Puisque l'axe E_1 ne doit pas être tangent, on doit avoir $\beta \leq \alpha - \beta$, puis $\beta = 1$. Réciproquement $\beta = 1$, $\alpha \geq 2$ entraîne que h est géométrique.

Il reste un cas à examiner, c'est celui où h ne vérifie pas 2.1.1. Par exemple, $\text{Im } h$ est l'orbite de la face x_1 , c'est-à-dire l'axe des U_2 sur \tilde{X}_{σ_1} . Il est donc décrit par : $U_2 = t$, $U_1 U_2^{-1} = 0 = t^\infty$. On peut donc considérer que ce disque est un cas limite du précédent quand α devient de plus en plus grand.

3.1. Une condition suffisante de relèvement d'un germe $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (V, x)$ à la résolution minimale.

3.1.1. PROPOSITION. - Soit V un espace analytique complexe ayant en v une singularité torique de dimension 2 . Soit $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (V, v)$ un germe de morphisme formel. On suppose que identifiant $\hat{\mathcal{O}}_{V, v}$ à $\hat{\mathcal{O}}_{X_\sigma, x}$ et $\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^2, 0}$ à $\mathbb{C}[[\xi, \tau]]$, l'application

$$\hat{\mathcal{O}}_{X_\sigma, x} \rightarrow \mathbb{C}[[\xi, \tau]] \xrightarrow{\xi \rightarrow 0, \tau \rightarrow \tau} \mathbb{C}[[\tau]]$$

se factorise par : $\hat{\mathcal{O}}_{X_\sigma, x} \rightarrow \mathbb{C}[[\tau^e]] \rightarrow \mathbb{C}[[\tau]]$, où

$\hat{\mathcal{O}}_{X_\sigma, x} \rightarrow \mathbb{C}[[t]] \simeq \mathbb{C}[[\tau^e]]$ est un disque testant générique au sens de 2.3.3.

Soit Z_1 l'éclatement de 0 dans \mathbb{C}^2 et 0_1 le point de Z_1 correspondant à la direction de l'axe des τ ; soit Z_2 l'éclatement de 0_1 et 0_2 le point de Z_2 sur la transformée stricte de l'axe des τ, \dots ; soit Z_{e-1} l'éclatement de 0_{e-2} et 0_{e-1} le point de Z_{e-1} sur la transformée stricte de l'axe des τ .

Soit $\pi : \tilde{X}_\sigma \rightarrow X_\sigma$ la résolution minimale de X_σ . Il existe \tilde{x} et $\tilde{\omega} : (Z_{e-1}, 0_{e-1}) \rightarrow (\tilde{X}_\sigma, \tilde{x})$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 (Z_{e-1}, 0_{e-1}) & \xrightarrow{\quad} & (\tilde{X}_\sigma, \tilde{x}) \\
 \downarrow p & & \downarrow \pi \\
 (Z_1, 0_1) & & \\
 \downarrow & & \\
 (\mathbb{C}^2, 0) & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & (X_\sigma, x)
 \end{array}$$

commute.

Démonstration : Supposons que φ vérifie 2.1.1 et écrivons avec les notations précédentes que :

$$\begin{cases}
 U_1 = c_1 f_1^{\alpha_1} \dots f_k^{\alpha_k} & c_i \text{ unités de } \mathbb{C}[[\xi, \tau]] \\
 U_2 = c_2 f_1^{\beta_1} \dots f_k^{\beta_k} & (\alpha_i, \beta_i) \in \sigma \cap \mathbb{N} - \{0, 0\} \text{ non tous situés sur une} \\
 & \text{même face de dim 1 de } \sigma.
 \end{cases}$$

D'autre part $\mathcal{O}_{Z_1, 0_1} \hat{\simeq} \mathbb{C}[[\xi_1, \tau]]$, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_1, 0_1}$ étant le morphisme envoyant ξ sur $\xi_1 \tau$ et τ sur $\tau, \dots, \mathcal{O}_{Z_{e-1}, 0_{e-1}} \hat{\simeq} \mathbb{C}[[\xi_{e-1}, \tau]]$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0} = \mathbb{C}[[\xi, \tau]] \rightarrow \mathcal{O}_{Z_{e-1}, 0_{e-1}}$ étant le morphisme envoyant ξ sur $\xi_{e-1} \tau^{e-1}$ et τ sur τ .

L'application $\varphi \circ p : (Z_{e-1}, 0_{e-1}) \rightarrow (X_\sigma, x)$ donne lieu au système

$$\begin{cases}
 U_1 = c_1 (\xi_{e-1} \tau^{e-1}, \tau) \prod_{j=1}^k f_j (\xi_{e-1} \tau^{e-1}, \tau)^{\alpha_j} \\
 U_2 = c_2 (\xi_{e-1} \tau^{e-1}, \tau) \prod_{j=1}^k f_j (\xi_{e-1} \tau^{e-1}, \tau)^{\beta_j}.
 \end{cases}$$

L'hypothèse signifie qu'il existe $d_1(t), d_2(t)$ des unités de $\mathbb{C}[[t]]$, $(a_1, b_1) \in \partial \Sigma \cap \mathbb{N}$ ou $(a, 1), a \geq 2$ tels que

$$\begin{aligned} c_1(0, \tau) \prod f_j(0, \tau)^{\alpha_j} &= d_1(\tau^e) \tau^{ea_i} \\ c_2(0, \tau) \prod f_j(0, \tau)^{\beta_j} &= d_2(\tau^e) \tau^{eb_i} \end{aligned} \quad \text{resp.} \quad \begin{aligned} d_1(\tau^e) \tau^{ea} \\ d_2(\tau^e) \tau^e . \end{aligned}$$

Or on a montré qu'il existe ρ_1 et ρ_2 (2.3.1) tels que $\rho_1 a_i + \rho_2 b_i = 1$ et que $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in \check{\sigma} \cap M - \{0, 0\}$ (si $i=1$, $\rho = (0, 1)$ convient). On a donc

$$\begin{aligned} U_1^{\rho_1}(0, \tau) U_2^{\rho_2}(0, \tau) &= c_1(0, \tau)^{\rho_1} c_2(0, \tau)^{\rho_2} \prod_j f_j^{\rho_1 \alpha_j + \rho_2 \beta_j}(0, \tau) \\ &= d_1(\tau^e)^{\rho_1} d_2(\tau^e)^{\rho_2} \tau^e , \end{aligned}$$

c_i et d_i étant des unités, $f_j(0, \tau) \in \mathbb{C}[[\tau]]$, $j = 1 \dots k$ n'étant pas une unité et $\rho_1 \alpha_j + \rho_2 \beta_j$ étant un entier strictement positif puisque $(\rho_1, \rho_2) \in \check{\sigma}$ et $(\alpha_j, \beta_j) \in \sigma$ et que (ρ_1, ρ_2) ne correspond pas à l'équation d'une face de $\dim 1$, ceci entraîne

- ou bien que chaque $f_j(0, \tau)$, $j = 1 \dots k$ est d'ordre en τ inférieur ou égal à $e-1$;
- ou bien que $k = 1$.

Dans le premier cas, on a

$$f_j(\xi, \tau) = g_j(\tau) + \xi h_j(\xi, \tau) \quad \text{où} \quad v(g_j(\tau)) \leq e-1$$

et

$$\begin{aligned} f_j(\xi_{e-1} \tau^{e-1}, \tau) &= g_j(\tau) + \xi_{e-1} \tau^{e-1} h_j(\xi_{e-1} \tau^{e-1}, \tau) \\ &= W_j(\xi_{e-1}, \tau) \tau^{v(g_j(\tau))} = V_j(\xi_{e-1}, \tau) g_j(\tau) \\ &= V_j(\xi_{e-1}, \tau) f_j(0, \tau) \end{aligned}$$

où W_j et V_j sont des unités de $\mathbb{C}[[\xi_{e-1}, \tau]]$. On a donc

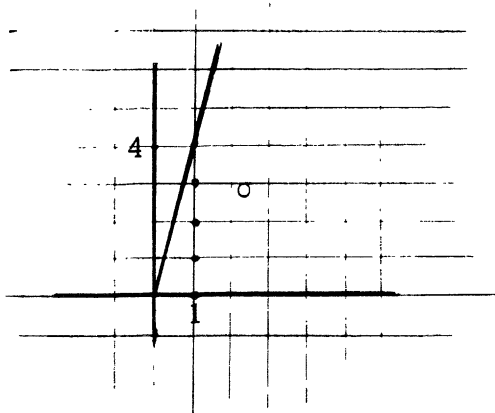
$$\begin{aligned} U_1 &= H_1(\xi_{e-1}, \tau) \prod_{j=1}^k f_j(0, \tau)^{\alpha_j} = G_1(\xi_{e-1}, \tau) \tau^{ea_i} \\ U_2 &= H_2(\xi_{e-1}, \tau) \prod_{j=1}^k f_j(0, \tau)^{\beta_j} = G_2(\xi_{e-1}, \tau) \tau^{eb_i} \end{aligned}$$

ceci montre que $\varphi \circ \rho$ est représenté par l'unique point (ea_i, eb_i) et par

suite $\omega \circ \rho$ se relève à la résolution minimale.

Dans le deuxième cas, φ lui-même est représenté par le seul point (α_1, β_1) , φ lui-même se relève donc à \tilde{X}_σ .

3.1.2. Un exemple : Considérons la singularité A_3 . Elle est représentée par σ ci-contre et $M_{X_\sigma, x}$ est engendré par $x = U_1^4 U_2^{-1}$,



$y = U_2$, $z = U_1$ lié par la relation $xy = z^4$. Considérons l'application

$\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (X_\sigma, x)$ défini par

$$x = t(\xi+t^2)^4, \quad y = t^3, \quad z = t(\xi+t^2)$$

on a

$$\begin{cases} U_1 = t(\xi+t^2) \\ U_2 = t^3 \end{cases}$$

φ est donc représenté par les 2 points (1,3) et (1,0) et ne se remonte pas à la résolution minimale.

L'hypothèse de 3.1.1 est satisfaite avec $e = 3$. En effet

$$x(0,t) = t^9, \quad y(0,t) = t^3, \quad z(0,t) = t^3$$

$$U_1(0,t) = t^3, \quad U_2(0,t) = t^3.$$

Après un éclatement $\varphi_1 : (Z_1, 0_1) \rightarrow (X_\sigma, x)$ est représenté par

$$\begin{cases} U_1 = t(\xi+t^2) = t^2(\xi+t) \\ U_2 = t^3 \end{cases}.$$

φ_1 est représenté par les 2 points (2,3) et (1,0) et φ_1 ne se relève pas. Après éclatement de 0_1 , $\varphi_2 : (Z_2, 0_2) \rightarrow (X_\sigma, x)$ est représenté par

$$\begin{cases} U_1 = t(\xi t^2 + t^2) = t^3(\xi+1) \\ U_2 = t^3 \end{cases}$$

φ_2 est représenté par l'unique point (3,3). φ_2 se remonte.

§ 2 - SURFACES QUASI-HOMOGENES A SINGULARITE ISOLEE

Soit V une surface algébrique affine munie d'une action de \mathbb{C}^* n'ayant d'autre point fixe que 0 . On rappelle qu'on peut plonger V dans \mathbb{C}^{n+1} de façon à ce que l'action de \mathbb{C}^* soit induite par une bonne action de \mathbb{C}^{n+1} décrite par

$$\sigma(\lambda; z_0, \dots, z_n) = (\lambda^{q_0} z_0, \dots, \lambda^{q_n} z_n), \lambda \in \mathbb{C}^*, z = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$$

où q_0, \dots, q_n sont des entiers strictement positifs. En changeant au besoin l'action de \mathbb{C}^* , on peut supposer q_0, \dots, q_n premiers entre eux dans leur ensemble.

On suppose que V a une singularité isolée en 0 . Soit X la courbe projective non singulière quotient de $V - \{0\}$ par \mathbb{C}^* et soit \tilde{V} la normalisation de l'adhérence dans $V \times X$ du graphe de l'application canonique $V - \{0\} \rightarrow X$. \tilde{V} n'est d'ailleurs rien d'autre que l'éclatement normalisé de l'idéal $(\dots, z_j^{q_0 \dots \hat{q}_j \dots q_n}, \dots)$ où selon les conventions habituelles $q_0 \dots \hat{q}_j \dots q_n$ signifie que, dans le produit, q_j surmonté d'un chapeau a été omis. Alors \tilde{V} a au plus un nombre fini de points singuliers toriques [3]. Soit $\tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}$ la résolution minimale de ces singularités. L'action de \mathbb{C}^* se remonte à \tilde{V}_1 . $\pi: \tilde{V}_1 \rightarrow V$ est appelé la résolution canonique équivariante de V [3]. De plus, écrivant que $\pi^{-1}(0) = X_0 \cup \dots \cup X_r$ où $X_i, i = 0 \dots r$ sont les composantes irréductibles de $\pi^{-1}(0)$ et où X_0 désigne la transformée stricte de X par l'application $\tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}$, alors X_0 est une courbe projective non singulière isomorphe à X . $X_i, i \geq 1$ est une courbe non singulière de genre 0 et la matrice (X_i, X_j) qui est définie négative est de la forme

$-b_0$	1 0 ... 0	1 0 ... 0	
1	$-b_{11}$ 1 0		
0	1 $-b_{12}$ 1	0	
⋮	⋮ ⋮ ⋮		
0	0 1 $-b_{1s_1}$		
1		$-b_{21}$ 1 0	
0	0	1 1 0	
⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮	
0		0 1 $-b_{2s_2}$	

où $b_{ij} \geq 2$ et
 où $b_0 \geq 1$.

Ceci signifie encore que le graphe construit à partir de $\pi^{-1}(0)$ en associant un point à chaque X_i et en joignant 2 points par un trait si les composantes correspondantes se coupent est une étoile.

La résolution canonique n'est pas nécessairement la résolution minimale. Il en est ainsi si et seulement si le genre de X_0 est 0 et sa self-intersection $-b_0 = -1$. (voir [3]).

On suppose que le genre de X_0 est ≥ 1

2.1. DEFINITION. - Soit $h : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (V, 0)$ un disque testant. On dira que h est un disque "générique", si désignant par $\tilde{h} : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\tilde{V}_1, \tilde{x})$ l'unique relèvement de h à la résolution canonique qui coïncide alors avec la résolution minimale, on a :

- 1) \tilde{x} est un point non singulier de $\pi^{-1}(0)$,
- 2) l'image de \tilde{h} est une courbe non singulière transverse à $\pi^{-1}(0)$ en \tilde{x} ,
- 3) $\nu(\tilde{h}^* M_{\tilde{V}_1, \tilde{x}}) = 1$.

2.2. PROPOSITION. - Soit $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (V, 0)$ un germe de morphisme analytique. On suppose que identifiant $\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^2, 0}$ à $\mathbb{C}[[\xi, \tau]]$, l'application

$$\hat{\mathcal{O}}_{V, 0} \rightarrow \mathbb{C}[[\xi, \tau]] \rightarrow \mathbb{C}[[\tau]]$$

$\xi \rightarrow 0, \tau \rightarrow \tau$

qu'on en déduit est un disque testant "générique" au sens de 2.1.

Alors, il existe $\tilde{x} \in \tilde{V}_1$ et $\tilde{\varphi} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\tilde{V}_1, \tilde{x})$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^2, 0) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & (\tilde{V}_1, \tilde{x}) \\ & \searrow \varphi & \downarrow \pi \\ & & (V, 0) \end{array}$$

commute.

Démonstration : Soit $\varphi : \Omega \rightarrow V$ un représentant du germe de morphisme où Ω est un ouvert de \mathbb{C}^2 contenant 0 . Soit $\tilde{f} : \tilde{Z} \rightarrow \Omega$ l'image réciproque de $p : \tilde{V} \rightarrow V$ par φ . \tilde{f} est un morphisme propre. $\Omega - \varphi^{-1}(0)$ est un ouvert analytique partout dense et le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} Z - \tilde{f}^{-1}(\varphi^{-1}(0)) = \tilde{f}^{-1}(\Omega - \varphi^{-1}(0)) & \longrightarrow & \tilde{V} - p^{-1}(0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega - \varphi^{-1}(0) & \longrightarrow & V - \{0\} \end{array}$$

étant cartésien, puisque la flèche de droite est un isomorphisme, il en est de même de celle de gauche. $\tilde{Z} - \tilde{f}^{-1}(\varphi^{-1}(0))$ est connexe et contenu dans la partie non singulière de \tilde{Z} puisque isomorphe à un ouvert analytique d'un ouvert de \mathbb{C}^2 . Son adhérence $\tilde{\tilde{Z}}$ est donc un sous-espace analytique fermé irréductible de \tilde{Z} de dimension pure 2 . Soit $\tilde{f} : \tilde{\tilde{Z}} \xrightarrow{i} \tilde{Z} \xrightarrow{\tilde{f}} \Omega$. \tilde{f} est donc une modification et un morphisme propre. Soit $Z \rightarrow \tilde{\tilde{Z}}$ une résolution des singularités de $\tilde{\tilde{Z}}$ et soit $f : Z \rightarrow \Omega$ le morphisme qu'on en déduit. C'est aussi une modification et un morphisme propre et à la fois Z et Ω sont lisses et connexes de dimension 2 . f est donc une suite d'éclatements de points. Quitte à restreindre Ω , il existe $f_i : Z_i \rightarrow Z_{i-1}$, $i = 1 \dots r$ tel que $Z_0 = \Omega$ et $f = f_r \circ f_{r-1} \circ \dots \circ f_1$ et des points $q_i \in Z_i$, $i = 0 \dots r-1$ tels que $q_0 = 0, \dots$ $f_i(q_i) = q_{i-1}$ et que f_i soit l'éclatement de q_{i-1} sur Z_{i-1} . Soit $C_r = f_r^{-1}(q_{r-1})$, C_r est isomorphe à \mathbb{P}^1 , et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\theta} & \tilde{V} \\ f \downarrow & & \downarrow p \\ \Omega & \longrightarrow & V \end{array} :$$

Bien que θ ne soit pas propre, $\theta|_{C_r}$ l'est. $\theta(C_r)$ est un fermé analytique irréductible dans $p^{-1}(0) = X$. Ce n'est pas X tout entier, car d'après la formule de Hurwitz , ceci impliquerait que le genre de X et de X_0 serait 0 . $\theta(C_r)$ est donc un point \tilde{x} .

f_r induisant un isomorphisme analytique $Z - C_r \rightarrow Z_{r-1} - q_{r-1}$, θ fournit une application analytique $Z_{r-1} - q_{r-1} \rightarrow \tilde{V}$. Nous allons voir qu'elle se prolonge à Z_{r-1} , c'est-à-dire qu'une fonction analytique sur \tilde{V} au voisinage de \tilde{x} se remonte sur $Z_{r-1} - q_{r-1}$ en une fonction analytique qui se prolonge analytiquement en q_{r-1} . D'après le principe d'extension de Riemann, il suffit que cette dernière soit bornée. Or f_r étant propre, il existe une base de voisinage de q_{r-1} dont l'image réciproque est un voisinage relativement compact de C_r . θ se factorise donc à travers f_{r-1} .

Par récurrence, ceci entraîne que θ se factorise à travers f en un morphisme $\tilde{\varphi} : \Omega \rightarrow \tilde{V}$. Soit $\tilde{x} = \tilde{\varphi}(0)$

- ou bien \tilde{x} est un point non singulier de \tilde{V} . Alors $\tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}$ est un isomorphisme au voisinage de \tilde{x} et $\tilde{\varphi}$ fournit le relèvement de φ à la résolution minimale souhaité (sans hypothèse sur la généralité de $\varphi(0, \tau)$);

- ou bien \tilde{x} est un point singulier de \tilde{V} . \tilde{V} a alors en \tilde{x} une singularité torique. Le germe $\tilde{\varphi} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\tilde{V}, \tilde{x})$ satisfait les hypothèses de § 1, 3.1.1 avec $e = 1$. Il existe alors $\tilde{x}_1 \in X_i$, $i \geq 1$ et, puisque \tilde{V}_1 est la résolution minimale de \tilde{V} , un germe $\tilde{\varphi}_1 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\tilde{V}_1, \tilde{x}_1)$ relevant φ .

On suppose que le genre de X_0 est 0.

2.3. PROPOSITION. - Soit $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (V, 0)$ un germe de morphisme analytique. On suppose que identifiant $\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^2, 0}$ à $\mathbb{C}[[\xi, \tau]]$, l'application :

$$\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^2, 0} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_{V, 0} \rightarrow \mathbb{C}[[\xi, \tau]] \rightarrow \mathbb{C}[[\tau]] ,$$

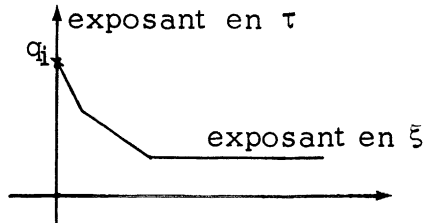
$\xi \rightarrow 0$
 $\tau \rightarrow \tau$

qu'on en déduit est défini par :

$$z_i = a_i \tau^{q_i} + \dots, \quad a_i \neq 0, \quad i = 0 \dots n \quad \text{où } q_i \text{ est le poids de } z_i .$$

Alors, il existe \tilde{x} un point de X_0 n'appartenant à X_i , $i \geq 1$ et $\tilde{\varphi} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\tilde{V}_1, \tilde{x})$ relevant φ , si $-b_0$ la self-intersection de X_0 est différente de -1 .

Démonstration : Pour chaque série $z_i(\xi, \tau)$, construisons le polygone de Newton et soit d_i l'opposé de l'inverse de la pente du 1er côté.



Soit $d = \inf_{i=0 \dots n} d_i$, d est ou ∞ ou un nombre rationnel strictement positif.

Dans le premier cas, on peut écrire :

$$z_i(\xi, \tau) = a_i V_i(\xi, \tau) \tau^{q_i} \text{ où } V_i(0, 0) = 1.$$

Soit $P = (\dots, z_i^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n}, \dots)$. P se relève à $\mathbb{C}\{\xi, \tau\}$ en l'idéal principal $\tau^{q_0 \dots q_n}$ et φ se factorise par \tilde{V} l'éclatement de P en $\tilde{\varphi}$ tel que $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{x}$ soit non singulier.

Dans le deuxième cas, soit $d = \frac{m}{n}$ la forme irréductible de d .

On peut écrire :

$$z_i = L_i + R_i$$

où L_i est quasi-homogène de degré $q_i m$ si on donne à ξ le poids n et à τ le poids m et R_i est somme de monômes de poids strictement plus grands. V étant stable par l'action de \mathbb{C}^* est défini par un idéal homogène I . Soit f un élément homogène de poids q de I . On a :

$$f = \sum c_{A_0 \dots A_n} z_0^{A_0} \dots z_n^{A_n}$$

$$\sum q_i A_i = q$$

$$f(\dots, z_i(\xi, \tau), \dots) \equiv 0.$$

Ceci entraîne que

$$\begin{aligned} & \sum c_{A_0 \dots A_n} (L_0 + R_0)^{A_0} \dots (L_n + R_n)^{A_n} \\ &= \sum c_{A_0 \dots A_n} L_0^{A_0} \dots L_n^{A_n} + \text{somme de monômes en } (\xi, \tau) \text{ de poids } > dm \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

On doit donc avoir $f(L_0, \dots, L_n) \equiv 0$ et on détermine une application algè-

brique $\mathbb{C}^2 \rightarrow V$ définie par

$$z_i(\xi, \tau) = L_i(\xi, \tau) = a_i \tau^{q_i} + a_{q_i-n, m}^i \tau^{q_i-n} \xi^m + \dots$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$z_i(\xi, \tau) = a_i \tau^{\alpha_{i1}} \prod_j (\tau^{n-\lambda_j} \xi^m)^{\alpha_{ij}}, \quad i = 0 \dots n, \quad j = 2 \dots k$$

où α_{ij} sont des entiers positifs ou nuls, λ_j des nombres complexes $\neq 0$ et où

$$q_i = \alpha_{i1} + n \sum_{j>1} \alpha_{ij}$$

et $\alpha_{0j}, \dots, \alpha_{nj}$ non tous nuls pour chaque $j = 2 \dots k$.

Soit encore f un élément quelconque de poids q de I . On a

$$\begin{aligned} & \sum c_{A_0 \dots A_n} a_0^{A_0} \dots a_n^{A_n} \tau^{\sum A_i (q_i - n \sum_{j>1} \alpha_{ij})} \prod_{j>1} (\tau^{n-\lambda_j} \xi^m)^{\sum A_i \alpha_{ij}} = 0 \\ & = \tau^q \left(\sum c_{A_0 \dots A_n} \frac{a_0^{A_0} \dots a_n^{A_n} \prod_{j>1} (\tau^{n-\lambda_j} \xi^m)^{\sum A_i \alpha_{ij}}}{(\tau^n)^{\sum_{i, j>1} A_i \alpha_{ij}}} \right). \end{aligned}$$

La fraction rationnelle en (τ, ξ) , (1), écrite dans la parenthèse est donc elle-même nulle.

Considérons l'application $\mathbb{C}[\tau_1, \xi_1] \rightarrow \mathbb{C}[\tau, \xi]$ qui envoie τ_1 sur τ^n et ξ_1 sur ξ^m . C'est une injection. Elle s'étend au corps des fractions en une application également injective. Or la fraction rationnelle (1) est l'image de (2)

$$\sum c_{A_0 \dots A_n} \frac{a_0^{A_0} \dots a_n^{A_n} \prod_{j>1} (\tau_1^{n-\lambda_j} \xi_1^m)^{\sum A_i \alpha_{ij}}}{\tau_1^{\sum_{i, j>1} A_i \alpha_{ij}}}$$

(2) est donc aussi identiquement nulle, ainsi que la fraction obtenue après multiplication par τ_1^q . Or, ce n'est autre, puisque $q = \sum q_i A_i$,

que

$$\sum c_{A_0 \dots A_n} a_0^{A_0} \dots a_n^{A_n} \tau_1^{\sum_i A_i (q_i - \sum_{j>1} \alpha_{ij})} \prod_{j>1} (\tau_1 - \lambda_j \xi_1)^{\sum_i A_i \alpha_{ij}}$$

$$= f(\dots, a_i \tau_1^{q_i - \sum_{j>1} \alpha_{ij}} \prod_j (\tau_1 - \lambda_j \xi_1)^{\alpha_{ij}}, \dots) .$$

Ceci détermine donc une autre application algébrique $\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow V$ définie par

$$z_i(\xi, \tau) = a_i \tau^{q_i - \sum_{j>1} \alpha_{ij}} \prod_{j>1} (\tau - \lambda_j \xi)^{\alpha_{ij}} = \Lambda_i(\xi, \tau) , i = 0 \dots n$$

où $\Lambda_i(\xi, \tau)$ sont des polynômes homogènes de degré q_i si on donne à ξ et τ le degré 1 .

2.3.1. LEMME. - Soit $f : Z \rightarrow \mathbb{C}^2$ l'éclatement de centre 0 ,
 $p : \tilde{V} \rightarrow V$ l'éclatement normalisé de $(\dots, z_i^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n}, \dots)$.
Il existe $\phi_1 : Z \rightarrow \tilde{V}$ tel que $p \circ \phi_1 = \phi \circ f$.

Démonstration : Z étant normal, il suffit de montrer que $\phi \circ f$ se factorise à travers l'éclatement, ou encore que

$P = (\dots, z_j^{q_0 \dots \hat{q}_j \dots q_n}, \dots)$ se remonte sur Z en un Idéal inversible.

Or Z est recouvert par 2 cartes Z_1 et Z_2 . Soit (ξ', τ') (resp. (ξ'', τ'')) un système de coordonnées sur Z_1 (resp. Z_2) tel que $\xi \circ f|_{Z_1} = \xi' \tau'$, $\tau \circ f|_{Z_1} = \tau'$ (resp. $\xi \circ f|_{Z_2} = \xi''$, $\tau \circ f|_{Z_2} = \xi'' \tau''$) et on a :

$$z_i^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n} \circ \phi \circ f|_{Z_1} = a_i^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n} \tau'^{q_0 \dots q_n} \prod_{j>1} (1 - \lambda_j \xi')^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n \alpha_{ij}} .$$

Sur Z_1 le diviseur exceptionnel C a pour équation $\tau' = 0$. En un point c de C de coordonnées $\tau' = 0$, ξ' différent de tous les

$1/\lambda_j$, $j>1$, $P \cdot \mathcal{O}_{Z,c} = \tau'^{q_0 \dots q_n} \mathcal{O}_{Z,c}$. Au point c_j de coordonnées

$$\tau' = 0 , \xi' = 1/\lambda_j , P \cdot \mathcal{O}_{Z,c_j} = \tau'^{q_0 \dots q_n} (1 - \lambda_j \xi')^{\inf_i q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n \alpha_{ij}}$$

$$z_i^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n} \circ \phi \circ f|_{Z_2} = a_i^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n} \xi^{q_0 \dots q_n} \tau^{q_0 \dots (q_i - \sum_{j>1} \alpha_{ij}) \dots q_n} \prod_{j>1} (\tau^{-\lambda_j})^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n \alpha_{ij}} .$$

Sur Z_2 , le diviseur exceptionnel C a pour équation $\xi = 0$. Au point $c = (0,0)$ qui est le seul qui reste à examiner

$$P.O_{Z,C} = \xi^{q_0 \dots q_n} \tau^{q_0 \dots (q_i - \sum_{j>1} \alpha_{ij}) \dots q_n} .$$

2.3.2. LEMME. - Le fermé algébrique irréductible de $X = p^{-1}(0)$ image du diviseur exceptionnel C de f n'est pas X tout entier.

Démonstration : Supposons que $\phi_1(C) = X$ et soit $\varphi_1 : C \rightarrow X$ le morphisme algébrique surjectif nécessairement fini et plat qu'on en déduit. Soit n le degré de φ_1 . Soient $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_k$ les points de C où φ_1 est ramifié et soit e_i l'indice de ramification de φ_1 en \tilde{y}_i . Puisque C et X sont des courbes projectives non singulières de genre 0, la formule de Hurwitz entraîne que

$$2 = 2n - \sum_{i=1 \dots k} (e_i - 1)$$

ou

$$\sum_{i=1 \dots k} (e_i - 1) = 2(n-1) .$$

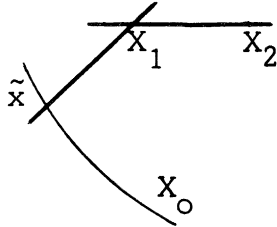
Soit \tilde{y} un point quelconque de C ; si $\varphi_1(\tilde{y})$ est un point non singulier de \tilde{V} , \tilde{V} coïncide avec la résolution minimale de V au voisinage de ce point; si $\varphi_1(\tilde{y})$ est un point singulier de \tilde{V} , \tilde{V} y a une singularité torique. Soit \tilde{x} le point du cycle exceptionnel de \tilde{V}_1 appartenant à X_O la transformée stricte de X au-dessus de $\varphi_1(\tilde{y})$ et considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 (X_0, \tilde{x}) & \xrightarrow{\quad} & (\tilde{V}_1, \tilde{x}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (X, \varphi_1(\tilde{y})) & \xrightarrow{(1)} & (\tilde{V}, \varphi_1(\tilde{y})) \\
 \uparrow & & \uparrow \tilde{\pi}_1 \\
 (C, \tilde{y}) & \xrightarrow{\quad} & (Z, \tilde{y})
 \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des immersions.

Ensemblistement, C s'envoie sur X qui se relève en X_0 .

Soient X_1, X_2, \dots les composantes de $\pi^{-1}(0)$ qui s'envoient sur $\varphi_1(\tilde{y})$ par le morphisme canonique $\tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}$.



On peut supposer ces composantes indexées de façon que $\tilde{x} \in X_0 \cap X_1$. X_0 est alors une courbe lisse transverse à X_1 en \tilde{x} . La flèche (1) est un disque testant "générique" au sens de §1, 2.3.3,

puisque $(X_0, \tilde{x}) \rightarrow (X, \varphi_1(\tilde{y}))$ est un isomorphisme. La flèche

$(C, \tilde{y}) \rightarrow (\tilde{V}, \varphi_1(\tilde{y}))$ satisfait les hypothèses de §1, 3.1.1 où

$e =$ indice de ramification de φ_1 en \tilde{y} . On en déduit que si $e = 1$

$(Z, \tilde{y}) \rightarrow (\tilde{V}, \varphi_1(\tilde{y}))$ admet un relèvement à (\tilde{V}_1, \tilde{x}) . Si $\tilde{y} = \tilde{y}_1$ par exemple,

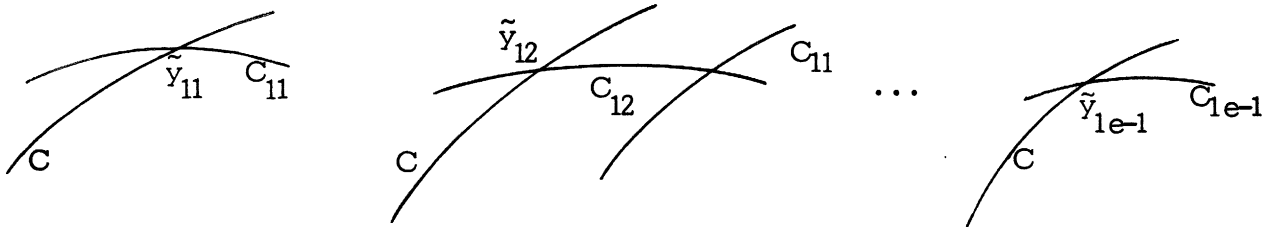
désignons par Z_{11} l'éclatement de \tilde{y}_1 , par C_{11} le nouveau diviseur exceptionnel obtenu et notons C (par abus de notation) la transformée stricte de C .

Soit \tilde{y}_{11} le point de C_{11} sur C . Soient Z_{12} l'éclatement de \tilde{y}_{11} ,

C_{12} le nouveau diviseur exceptionnel obtenu et notons encore C et C_{11} les transformées strictes de C et C_{11} .

Soient Z_{13} l'éclatement de \tilde{y}_{12} , C_{13} le nouveau diviseur exceptionnel obtenu et notons encore C et C_{11} les transformées strictes de C et C_{11} .

Soient Z_{14} l'éclatement de \tilde{y}_{13} , C_{14} le nouveau diviseur exceptionnel obtenu et notons encore C et C_{11} les transformées strictes de C et C_{11} .



etc...

D'après 3.1.1, $(Z_{1e-1}, \tilde{y}_{1e-1}) \rightarrow (\tilde{V}, \varphi_1(\tilde{y}))$ se relève à \tilde{V}_1 .

D'autre part, le morphisme $C \rightarrow X$ obtenu après transformée stricte étant

isomorphe à φ_1 , ses seuls points de ramification sont les transformées strictes de $\tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_k$. Finalement, on construit $f_1 : Z_1 \rightarrow Z$ obtenu par suite finie d'éclatements de points tel que, désignant par C_1 la transformée stricte de C

$$(C_1, C_1) \geq -1 - \sum_{i=1 \dots k} (e_i - 1) = -1 - 2(n-1) = -2n+1$$

et tel qu'au voisinage de tout point \tilde{y}_1 de C_1 , $(Z_1, \tilde{y}) \rightarrow (\tilde{V}, \phi_1 \circ f_1(\tilde{y}))$ se relève à \tilde{V}_1 . C_1 étant compact, il existe U_1 un voisinage de C_1 et $\theta : U_1 \rightarrow \tilde{V}_1$ tel que $\pi \circ \theta = p \circ \phi_1 \circ f_1|_{U_1}$ (un éclatement fait diminuer la self intersection de -1).

Toujours à cause de la compacité de C_1 et bien que θ ne soit pas propre, nous pouvons appliquer la formule de projection :

$$\theta_*(C_1, \theta^*X_0) = (\theta_*(C_1), X_0) .$$

Nous allons montrer que $\theta^*X_0 = C_1 + \sum n_i \Gamma_i$, où n_i sont des entiers non négatifs.

Soit $h : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (V, 0)$ le disque testant défini par

$$z_i(\tau) = \Lambda_i(0, \tau) = a_i \tau^{q_i}, \quad i = 0 \dots n .$$

Soit \tilde{h} son relèvement à \tilde{V} et soit $\tilde{x} = \tilde{h}(0)$. \tilde{x} est un point de X où \tilde{V} est non singulier. Soit $g : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ le disque testant défini par

$$\xi \circ g = 0, \quad \tau \circ g = \tau \tag{*}$$

On a $\phi \circ g = h$. Soit \tilde{g} le relèvement de g à Z et soit $\tilde{y} = \tilde{g}(0)$. On a $\phi_1 \circ \tilde{g} = \tilde{h}$ et donc $\phi_1(\tilde{y}) = \tilde{x}$. \tilde{x} étant non singulier sur \tilde{V} , \tilde{y} n'est pas un des points de C qu'on a dû faire éclater. \tilde{g}_1 le relèvement de g à Z_1 est donc tel que $\tilde{y}_1 = \tilde{g}_1(0) \in C_1$ et il existe un système de coordonnées (ξ', τ') sur Z_1 au voisinage de \tilde{y}_1 tel que $\tau' = 0$ soit l'équation de C_1 et que

$$\xi' \circ \tilde{g}_1 = 0, \quad \tau' \circ \tilde{g}_1 = \tau .$$

D'autre part, soient \tilde{h}_1 le relèvement de h à \tilde{V}_1 et $\tilde{x}_1 = \tilde{h}_1(0)$. Il existe un système de coordonnées (u, v) sur \tilde{V}_1 au voisinage de

\tilde{x}_1 tel que $v = 0$ soit l'équation de X_0 et que

$$u \circ \tilde{h}_1 = 0 \quad , \quad v \circ \tilde{h}_1 = \tau \quad . \quad (**)$$

On a aussi $\theta \circ \tilde{g}_1 = \tilde{h}_1$ et écrivant que

$$u \circ \theta = R(\xi', \tau') \quad , \quad v \circ \theta = S(\xi', \tau')$$

on doit avoir compte tenu de (*) et (**)

$$R(0, \tau) = 0 \quad \text{et} \quad S(0, \tau) = \tau$$

et il existe $R_1(\xi', \tau')$ et $S_1(\xi', \tau')$ dans $\mathbb{C}\{\xi', \tau'\}$ tels que

$$R(\xi', \tau') = \xi'^k R_1(\xi', \tau') \quad , \quad k \in \mathbb{N} \quad , \quad k \geq 1$$

$$S(\xi', \tau') = \tau' + \xi' S_1(\xi', \tau') \quad .$$

Or localement, l'image de C_1 est tout X_0 . Celle-ci est décrite paramétriquement par $u = \xi'^k R_1(\xi', 0)$, $v = \xi' S_1(\xi', 0)$; $v = 0$ étant l'équation de X_0 on doit avoir $R_1(\xi', 0) \neq 0$ et $S_1(\xi', 0) = 0$. Il existe donc $S_2(\xi', \tau') \in \mathbb{C}\{\xi', \tau'\}$ tel que $S_1 = \tau' S_2(\xi', \tau')$ et $S(\xi', \tau') = \tau'(1 + \xi' S_2(\xi', \tau'))$. Ceci montre qu'au voisinage de \tilde{y}_1 l'image réciproque du diviseur X_0 est C_1 et que $\theta^* X_0 = C_1 + \sum n_i \Gamma_i$. On en déduit que

$$(C_1, C_1) + \sum n_i (C_1, \Gamma_i) = n(X_0, X_0)$$

et que

$$n(X_0, X_0) \geq (C_1, C_1)$$

puisque $(C_1, \Gamma_i) > 0$. Comme $(C_1, C_1) \geq -2n+1$, $n(X_0, X_0) \geq -2n+1$ et $(X_0, X_0) \geq -2 + \frac{1}{n}$. Comme $(X_0, X_0) = -b_0$ est un entier négatif, cette inégalité entraîne que $-b_0 = -1$ contrairement à l'hypothèse. L'image de C par $\tilde{\phi}_1$ est donc un point.

2.3.3. LEMME. - Si $\varphi_1 : C \rightarrow X$ n'est pas surjectif, ou bien $\Lambda_i(\xi, \tau) = a_i \tau^{q_i}$, $i=0 \dots n$ ou bien il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ tel que $\Lambda_i(\xi, \tau) = a_i (\tau - \lambda \xi)^{q_i}$.

Démonstration : Soit $q : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ l'éclatement de l'idéal

$Q = (\dots, z_i^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n}, \dots)$ et $\phi_2 : Z \rightarrow \mathcal{X}$; le morphisme obtenu en composant le morphisme canonique $\tilde{V} \rightarrow \mathcal{X}$ avec ϕ_1 . Puisque Q est engendré par une suite régulière, $q^{-1}(0) \simeq \mathbb{P}^n$ et $\varphi_2 : C \simeq \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ induit par φ_1 est décrit par :

$$(\xi; \tau) \longmapsto \left(\dots ; a_i^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n} \tau^{q_0 \dots (q_i - \sum_{j>1} \alpha_{ij}) \dots q_n} \prod_j (\tau - \lambda_j \xi)^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n \alpha_{ij}} ; \dots \right)$$

et puisque l'image de C par φ_1 est un point, il en est de même de celle par φ_2 . Ceci entraîne que $q_k \alpha_{ij} = q_i \alpha_{kj}$, $k = 0 \dots n$, $i = 0 \dots n$, $j > 1$. (On remarque que ceci est d'ailleurs la condition pour que Q se remonte sur \mathbb{C}^2 en un idéal inversible.) Il existe donc $p_j \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_{ij} = p_j q_i$ et q_0, \dots, q_n étant le système des poids de z_0, \dots, z_n , on a en fait $p_j \in \mathbb{N}$. Ou bien $p_j = 0$, $j > 1$ et $L_1(\xi, \tau) = a_i \tau^{q_i}$, ou bien, puisque $q_i - \sum_{j>1} \alpha_{ij} = q_i - q_i (\sum_{j>1} p_j)$ doit être un entier positif ou nul, il y a un seul λ_j non nul et $\alpha_{ij} = q_i$, de sorte que

$$L_1(\xi, \tau) = a_i (\tau - \lambda_1 \xi)^{q_i} .$$

Revenons maintenant à la considération de φ . Puisque

$$q_i = \alpha_{i1} + n \prod_{j>1} \alpha_{ij} = \alpha_{i1} + n q_i \quad ,$$

on doit avoir $\alpha_{i1} = 0$, $i = 0 \dots n$ et $n = 1$, ce qui entraîne que :

$$L_i(\xi, \tau) = a_i (\tau - \lambda_1 \xi^m)^{q_i} \quad , \text{ pour tout } i$$

puisque'on a supposé $d = \frac{m}{n} = m < \infty$.

Effectuons le changement de variable $\tau_1 = \tau - \lambda_1 \xi^m$, $\xi_1 = \xi$. Les hypothèses de 2.3 ne sont pas affectées avec ces nouvelles variables. La construction des polygones de Newton des $z_i(\tau_1 + \lambda_1 \xi_1^m, \xi_1)$ nous fournit d_1 ou ∞ ou rationnel strictement plus grand que d . Dans le 1er cas, on obtient immédiatement le relèvement $\tilde{\varphi}$, dans le 2e cas, un

nouveau changement de variables $\tau_2 = \tau_1 - \lambda_2 \xi_1^{m_2}$, $\xi_2 = \xi_1$, $m_2 > m_1$, etc... Si aucun des d fournit par les polygones de Newton n'est infini, on construit de proche en proche un changement de variable formel

$$\tau_\infty = \tau - \lambda_1 \xi^m - \lambda_2 \xi^{m_2} - \dots, \quad \xi_\infty = \xi$$

tel que $z_i(\tau_\infty + \sum \lambda_i \xi_\infty^{m_i}, \xi_\infty) = a_i V_i(\xi_\infty, \tau_\infty) \tau_\infty^{q_i}$ où $V_i(0,0) = 1$. Il reste à voir que ce changement de variable est en fait analytique. Soit $(X_i, 0)$ le germe de courbe analytique de $(\mathbb{C}^2, 0)$ défini par l'équation $z_i(\xi, \tau)$, $(\hat{X}_i, 0)$ le germe de courbe algébrique de $(\mathbb{C}^2, 0)$ défini par la même équation vu comme série formelle. Nous venons de montrer que $(\hat{X}_i, 0)_{\text{red}}$ est un germe de courbe algébrique non singulier indépendant de i .

$(X_i, 0)_{\text{red}}$ est donc un germe de courbe analytique non singulier indépendant de i . L'équation $\tau = \sum \lambda_i \xi^{m_i}$ définissant $(\hat{X}_i, 0)_{\text{red}}$ dans $(\mathbb{C}^2, 0)$ définit donc aussi $(X_i, 0)_{\text{red}}$ et $\tau - \sum \lambda_i \xi^{m_i} \in \mathbb{C}\{\xi, \tau\}$.

2.4. Remarque : On a montré en fait que $z_i(0, \tau) = a_i \tau^{q_i} + \dots$, $a_i \neq 0$, il existe $\tau + \sum \lambda_i \xi^{m_i} \in \mathbb{C}\{\xi, \tau\}$ tel que $z_i(\tau + \sum \lambda_i \xi^{m_i}, \xi) = a_i V_i(\xi, \tau) \tau^{q_i}$ où $V_i(0,0) = 1$, $V_i \in \mathbb{C}\{\xi, \tau\}$ pourvu que $(X_0, X_0) \neq -1$, ce qui signifie exactement que $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (V, 0)$ se relève à la résolution canonique.

ex.1 : Soit V défini par $x^3 + y^3 + z^4 = 0$. La résolution minimale de V est obtenu en éclatant une fois l'origine. Le cycle exceptionnel est composé de $3\mathbb{P}^1$ se coupant transversalement 2 à 2 en un même point. La résolution canonique de V est obtenu en éclatant ce point. L'application $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow V$ défini

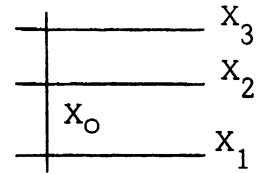
$$x = -2\tau(\tau^2 + 3\xi^2)(\tau + \xi)$$

$$y = -2\tau(\tau^2 + 3\xi^2)(\tau - \xi)$$

$$z = -2\tau(\tau^2 + 3\xi^2)$$

se relève à la résolution minimale (puisque $z(\xi, \tau)$ engendre l'idéal $x(\xi, \tau)$, $y(\xi, \tau)$, $z(\xi, \tau)$) et non à la résolution canonique.

Soit $f : Z \rightarrow \mathbb{C}^2$ l'éclatement de 0 . Il existe $\varphi : Z \rightarrow \tilde{V}_1$ tel que $\pi \circ \varphi = \varphi \circ f$. Soit $\pi^{-1}(0) = X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3$;



Soit $C = f^{-1}(0)$; $\varphi^{-1}(0) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, Γ_1 , $\tau = 0$, Γ_2 , $\tau + i\sqrt{3}\xi = 0$, $\Gamma_3 = \tau - i\sqrt{3}\xi = 0$. Soit $\tilde{\Gamma}_i$ la transformée stricte de Γ_i , $i = 1 \dots 3$, $\varphi(\tilde{\Gamma}_i) = X_i$, $i = 1 \dots 3$ et $\varphi^*(X_0) = C$ (en tant que cycle). Ici $n = \deg \varphi_1 : C \rightarrow X_0 = 1$ et $(C, C) = -1 = (X_0, X_0)$.

ex. 2 : Soit V défini par $x^2 + y^2 + z^3 = 0$ la singularité A_2 .

La résolution minimale est obtenue en éclatant une fois l'origine. Le cycle exceptionnel est composé de $2\mathbb{P}^1$ se coupant transversalement en un point. La résolution canonique de V est obtenu en éclatant ce point. L'application $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow V$ défini par

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left[\frac{9}{8} \tau^3 + \frac{3}{4} \tau^2 \xi + \frac{3}{2} \tau \xi^2 + \xi^3 \right] = \frac{1}{2} (\tau^3 + (\frac{1}{2} \tau + \xi)^3) \\ y &= \frac{1}{2i} \left[\frac{7}{8} \tau^3 - \frac{3}{4} \tau^2 \xi - \frac{3}{2} \tau \xi^2 - \xi^3 \right] = \frac{1}{2i} (\tau^3 - (\frac{1}{2} \tau + \xi)^3) \\ z &= -\frac{1}{2} \tau^2 - \tau \xi = -\tau (\frac{1}{2} \tau + \xi) \end{aligned}$$

ne se relève ni à la résolution minimale, ni à la résolution canonique.

Soit $f : Z \rightarrow \mathbb{C}^2$ l'éclatement de 0 et $\varphi_1 : C = f^{-1}(0) \rightarrow X = p^{-1}(0)$ l'application qu'on déduit. Son degré n est 3 . Il y a 2 pts de ramification y_1 et y_2 d'indice de ramification 2 chacun. Soit Z_1 l'espace obtenu en faisant éclater y_1 et y_2 . C_1 la transformée stricte de C , C_{11} et C_{12} les 2 nouveaux diviseurs exceptionnels. Il existe un voisinage de C_1 dans Z_1 , U_1 et $\theta : U_1 \rightarrow \tilde{V}_1$ tel que $\pi \circ \theta = \varphi \circ f \circ f_1|_{U_1}$. Soit $\pi^{-1}(0) = X_0 \cup X_1 \cup X_2$. C_{11} s'envoie sur X_1 , C_{12} s'envoie sur X_2 et $\theta^* X_0 = C_1$. On a

$$(C_1, C_1) = -3 = n(X_0, X_0) .$$

ex. 3 : Soit V défini par $x^2 + y^3 + z^5 = 0$, x est de poids 15, y de poids 10, z de poids 12. L'application $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow V$ défini

$$x = -t^{12}(t+\xi)^{10}(2t+\xi)^8$$

$$y = -t^8(t+\xi)^7(2t+\xi)^5$$

$$z = -t^5(t+\xi)^4(2t+\xi)^3$$

ne se relève pas à la résolution minimale qui coïncide avec la résolution canonique.

REFERENCES

- [1] BRIESKORN - Rationale Singularitäten komplexer Flächen. Inventiones Math. 1968, vol.4.
- [2] KEMPF-KNUDSON - MUMFORD - SAINT DONAT - Toroidal Embeddings Lecture. Notes 339.
- [3] P. ORLIK - Serfert manifolds. Lecture notes 291.
- [4] G. GONZALEZ-SPRINBERG - Eventails en dimension 2 et transformé de Nash. Publications du Centre de Mathématiques de l'E.N.S. 45, rue d'Ulm, Paris.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES
INSTITUT FOURIER

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)