# Introduction

*Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique)* (1976-1977), p. 0
<http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977____A1_0>

# INTRODUCTION

Ce volume comprend la plupart des exposés faits au séminaire sur les Singularités des Surfaces organisé au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique pendant l'année académique 1976-1977.

Les deux thèmes généraux du séminaire ont été : diagrammes de Dynkin et polyèdres de Newton pour les singularités des surfaces.

## I. DIAGRAMMES DE DYNKIN.

Nous avons commencé par le cas le plus simple, celui des points doubles rationnels. Une étude locale assez élémentaire est faite dans les exposés de Pinkham sur les "singularités de Klein". D'autre part ces singularités apparaissent sur les surfaces de Del Pezzo, c'est-à-dire sur les surfaces rationnelles projectivement normales de degré d dans $\mathbb{P}^d$ ; ce sont même les seules singularités possibles. Ce phénomène avait déjà été remarqué par Du Val (On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction, I, II, III, Proc. Cambridge Phil. Soc. (1934), 453-465 et 483-491) qui décrit toutes les configurations possibles de singularités sur une surface de Del Pezzo. L'idée fondamentale de la démonstration (en langage moderne) est de calculer le groupe de Picard de la surface (désingularisée) : sur l'orthogonal de la classe canonique la forme intersection est négative non dégénérée ; on y construit un système de racines, et donc un diagramme de Dynkin ... L'étude du système de racines permet d'obtenir les résultats voulus sur les singularités.

Il existe (au moins) deux références modernes sur les surfaces de Del Pezzo, les articles de Nagata (On rational surfaces, I, II, Memoirs of the College of Sc. Univ. of Kyoto, vol. 32, No 3 et vol. 33, No 2 (1960)), et le livre de Manin (Cubic Forms, North Holland 1974). Aucun des deux ne traite la question des surfaces singulières. Les exposés de Demazure fournissent une étude exhaustive des surfaces de Del Pezzo (sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque) avec une attention particulière donnée au cas singulier, en les définissant comme les surfaces obtenues par éclatements successifs du plan projectif. Cette définition n'est pas celle donnée plus haut, et il n'est pas démontré dans ces exposés que toute surface rationnelle, projectivement normale de degré d dans $\mathbb{P}^d$ peut être obtenue par éclatement du plan.

Ce résultat se trouve dans Nagata (loc. cit.).

D'autre part, les surfaces de Del Pezzo illustrent un phénomène particulier aux singularités rationnelles : celui de la résolution simultanée. Grosso modo, pour toute famille (plate) $X \to S$ de surfaces de Del Pezzo, il existe une extension finie $S' \to S$ de la base et une famille lisse $\tilde{X} \to S'$ dont les fibres soient la résolution minimale des fibres de $X \times_S S'$. On retrouve le même phénomène pour les familles de surfaces de type général plongées canoniquement, et pour les familles de surface K - 3.

Ce phénomène est d'abord étudié dans un cadre très général par Teissier (Résolution simultanée I, II) et ensuite par Pinkham pour les singularités rationnelles en dimension 2, après un exposé récapitulatif sur les singularités rationnelles, où il est surtout question de cycle fondamental et de diagramme de Dynkin : en particulier il y est montré a priori que le diagramme de Dynkin d'un point double rationnel (en car. quelconque, sans corps de base) est nécessairement celui d'un groupe de Coxeter fini irréductible et cristallographique, donc celui d'un système de racines irréductible. [La classification des groupes de Coxeter finis irréductibles est faite dans l'exposé A, B, C, D, E, F, etc, suivant une méthode plus rapide que celle suivie dans les textes de références usuels.]

D'autre part, dans "Résolution simultanée de points doubles rationnels", Pinkham montre en affinant des idées de Brieskorn et surtout de Tjurina (G.M. Tjurina, Resolution of singularities for flat deformations of rational double points, Funct. analy. and Appl. 4 (1970) 68-73) comment on peut utiliser les surfaces de Del Pezzo pour étudier les déformations de points doubles rationnels dans les cas les plus délicats, c'est-à-dire $E_6$, $E_7$, $E_8$. On peut d'ailleurs faire de même pour les singularités simplement elliptiques $\tilde{E}_8$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{D}_5$, mais cela n'a pas été exposé dans le séminaire. Rappelons que les mêmes résultats ont été obtenus par Looijenga grâce à son morphisme des périodes local. Ses résultats sont parus dans un preprint "On simple elliptic hypersurface singularities"(voir aussi "A period mapping for certain semi-universal deformations", Comp. Math. 30 (1975) 299-316, pour le morphisme des périodes en général) et son exposé au séminaire n'a donc pas été rédigé.

L'exposé "Conditions d'adjonction" de B. Teissier explique le point de vue classique (celui de Du Val par exemple) sur les singularités rationnelles : ce sont celles qui "ne modifient pas les conditions d'adjonction".

***

## II. POLYEDRE DE NEWTON.

Il y a eu trois exposés (de Brylinski et Merle) consacrés aux variétés toriques (i.e. définies par des éventails) et aux polyèdres de Newton. Ils reprennent quelques points importants de la théorie ; l'introduction de chaque exposé précise ses rapports avec les articles originaux. Il s'agit en grande partie de construire des désingularitsations explicites de certaines variétés, de dimension quelconque d'ailleurs.

Un peu à part, l'exposé de M. Lejeune étudie, en utilisant une idée de Nash, la structure d'arc des singularités de surfaces quasi-homogènes, en particulier pour les quotients cycliques qui sont à la fois des singularités rationnelles et des variétés toriques !

****

Enfin, R.O. Buchweitz a exposé certains résultats de sa thèse, augmentés de résultats nouveaux sur les déformations des courbes monomiales.

Le lecteur constatera que certains des exposés consistent simplement en la rédaction de l'exposé oral, alors que certains autres ont été considérablement amplifiés (c'est le cas notamment de "Résolution simultanée II").

-----