Séminaire sur les singularités des surfaces
École Polytechnique

M. Merle

Les anneaux coniques sont de Cohen-Macaulay, d'après A. G. Kouchnirenko

Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 17, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977____A19_0>

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone . 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L E S   S I N G U L A R I T E S

D E S   S U R F A C E S

LES ANNEAUX CONIQUES SONT DE COHEN-MACAULAY

d'après A.G. Kouchnirenko

M. MERLE

10 Mai 1977

Nous explicitons ici la démonstration du théorème de Hochster [2] esquissée par Kouchnirenko dans [1]. La méthode est proche de celle utilisée par Hochster bien que plus "géométrique".

§ 0. DEFINITIONS.

Soit P' un <u>cône polyédral</u> (i.e. un cône convexe défini dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par un nombre fini d'égalités et d'inégalités à coefficients rationnels, voir [3] 1.3). Nous appellerons $\mathbb{Z}^n$ le réseau standard de $\mathbb{R}^n$ et $P = P' \cap \mathbb{Z}^n$. P est un semi-groupe <u>quasi-conique</u>. Si de plus P' ne contient aucune droite, P est dit <u>conique</u>.

On note k[[P]] (resp. k[P]) la k-algèbre des fonctions sur un semi-groupe conique P à valeurs dans un corps <u>algébriquement clos</u> k (resp. des fonctions à support fini sur un semi-groupe quasi-conique P). De telles algèbres sont appelées <u>anneaux coniques</u>.

Le semi-groupe P possédant un nombre fini de générateurs ([3],1.3) on voit que k[[P]] (resp. k[P]) est quotient d'un anneau de séries formelles (resp. de polynômes) à un nombre fini de variables. En particulier k[[P]] et k[P] sont <u>nœthériens</u>.

§ 1. FILTRATIONS DE NEWTON SUR LES ANNEAUX CONIQUES.

Soit P un semi-groupe quasi-conique, I un ensemble fini d'homomorphismes de P dans $\mathbb{Z}$. Définissons $\Phi : P \to \mathbb{Z}$ par

$$\Phi = \inf_{\varphi \in I} \varphi \quad .$$

Si nous notons $\mathcal{A}$ l'un des anneaux k[P] ou k[[P]], Φ permet de définir une filtration décroissante sur $\mathcal{A}$ appelée <u>filtration de Newton</u> donnée par

$$\mathcal{A}_q = \{g \in \mathcal{A} \; ; \; \text{support } g \subset \Phi^{-1}(q + \mathbb{N})\} \quad .$$

(1.1) <u>Exemple</u> : $\mathcal{A} = k[x_1,\dots,x_n]$ (resp. $k[[x_1,\dots,x_n]]$). Soit f un polynôme (resp. une série) commode (i.e. dont le support rencontre chaque axe de coordonnées de $\mathbb{R}^k$) et $\Gamma(f)$ la frontière de Newton de f (voir [1]). Construisons une application $h : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ homogène de degré 1 telle que $h(\Gamma(f)) = 1$. Il existe un plus petit entier M tel que $h(\mathbb{N}^n) \subset \frac{1}{M}\mathbb{Z}$.

Posons alors $\Phi = M(h_{|\mathbb{N}^n})$.

On a dans ce cas $f \in \mathcal{A}_M$. $\mathcal{A}_o = \mathcal{A}$, $\forall\ p > 0$, $\mathcal{A}_{-p} = 0$.

(1.2) <u>Exemple</u> : $\mathcal{A} = k[x_1,\dots,x_n]$. Soit f un polynôme commode et $\tilde{\Gamma}(f)$ sa frontière de Newton à l'infini (voir [1]). De manière similaire à (1.1) on construit

- $h : \mathbb{R}^k_+ \to \mathbb{R}$ homogène de degré 1 telle que $h(\tilde{\Gamma}(f)) = -1$;
- $\Phi = M(h_{|\mathbb{N}^n})$ avec M le plus petit entier tel que $h(\mathbb{N}^n) \subset \frac{1}{M}\mathbb{Z}$.

On a cette fois $f \in \mathcal{A}_{-M}$, $\mathcal{A}_o = k$ et $\mathcal{A}_p = 0$ pour $p > 0$.

(1.3) <u>Exemple</u> : Soit f un polynôme de Laurent et $\Gamma^*(f)$ sa frontière de Newton (voir [1]). Supposons que 0 soit strictement intérieur à $\Gamma^*(f)$. On construit alors une fonction homogène h telle que $h(\Gamma^*(f)) = -1$ puis une filtration de $k[\mathbb{Z}^n]$ d'une manière analogue à (1.1).

S'il existe un point strictement intérieur à $\Gamma^*(f)$ nous aurons un automorphisme de $k[\mathbb{Z}^n]$ qui enverra f sur un polynôme de Laurent g tel que $\Gamma^*(g)$ contienne 0 dans son intérieur.

Si $\Gamma^*(f)$ n'a aucun point intérieur il existe un morphisme fini $r : k[\mathbb{Z}^n] \to k[\mathbb{Z}^n]$ tel que l'image inverse de f par r soit un polynôme de Laurent $\tilde{f}$ tel que $\Gamma^*(\tilde{f})$ admet des points de $\mathbb{Z}^n$ strictement intérieurs.

(1.4) <u>Exemple</u> : Soit P' un cône polyédral de dimension n ne contenant pas de droite et $P = P' \cap \mathbb{Z}^k$ le semi-groupe conique associé. Supposons que P' ne soit pas simplicial (i.e. un cône à n arêtes). Il existe alors une arête γ' telle que l'ensemble I_o des faces de dimension n-1 qui ne contiennent pas γ' a au moins 2 éléments.

Soit $m \in \gamma' \cap \mathbb{Z}^k = \gamma$ un élément primitif de γ. Pour chaque $\Delta \in I$, il existe une application linéaire h_Δ unique telle que : $h_\Delta(m) = 1$, $h_\Delta(\Delta) = 0$.

Soit $h = \inf\limits_{\Delta \in I_o} h_\Delta$.

Comme dans les précédents exemples, soit M le plus petit entier non nul tel que $h(P) \subset \frac{1}{M}\mathbb{N}$. On pose $\Phi = M(h_{|P})$.

Remarquons que si f est un élément de $k[P]$ (resp. $k[[P]]$) de support réduit à $\{m\}$, la filtration de Newton que nous venons de construire n'est autre que la <u>filtration f-adique</u>.

Notons de plus que $h = h_\Delta$ sur le cône engendré par $\{m\}$ et Δ que nous notons P'_Δ. $P' = \bigcup\limits_{\Delta \in I_o} P'_\Delta$ et les P'_Δ sont des cônes de même dimension n que P' mais comptant strictement moins de faces.

§ 2. FILTRATIONS DE NEWTON ET DECOMPOSITIONS POLYEDRALES.

Plus généralement, à toute filtration de Newton de $k[P]$ (resp. $k[[P]]$) on peut associer une décomposition polyédrale d'un cône polyédral $P' = P \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{R}$.

En effet soit une filtration de Newton définie par un morphisme $\Phi = \inf\limits_{\varphi \in I} \varphi$.

Chaque $\varphi \in I$ se prolonge aisément en une application φ' linéaire de $P' = P \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Posons $\Phi' = \inf\limits_{\varphi \in I} \varphi'$. Considérons la décomposition la <u>moins fine</u> de P' en cônes polyédraux fermés telle que Φ' soit linéaire sur chaque partie est la décomposition associée à la filtration de Newton.

On a alors le résultat suivant :

(2.1) <u>Lemme</u> : Soit P' un cône polyédral orienté $P = P' \cap \mathbb{Z}^k$ le semi-groupe quasi-conique associé. Soit $(P'_{\Delta_i})_i$ la décomposition polyédrale associé à une filtration de Newton de $\mathcal{A} = k[P]$ (resp. $k[[P]]$).

Ecrivons la suite exacte liée à la décomposition polyédrale de P'

$$(*) \qquad \cdots \longrightarrow \coprod_{i,j} P'_{\Delta_{i,j}} \longrightarrow \coprod_i P'_{\Delta_i} \longrightarrow P' \longrightarrow 0 \quad .$$

a. P'_{Δ_i} est muni de l'orientation induite par celle de P'.

b. $P'_{\Delta_{i_1 \cdots i_\ell}}$ est le cône polyédral engendré par m et la face $\Delta_{i_1} \cap \cdots \cap \Delta_{i_\ell}$.

c. Si $\ell > 1$, $P'_{\Delta_{i_1 \cdots i_\ell}}$ est de dimension $< n$ et muni d'une orientation arbitraire.

Les flèches sont alors induites par les injections et les orientations relatives de la source et du but.

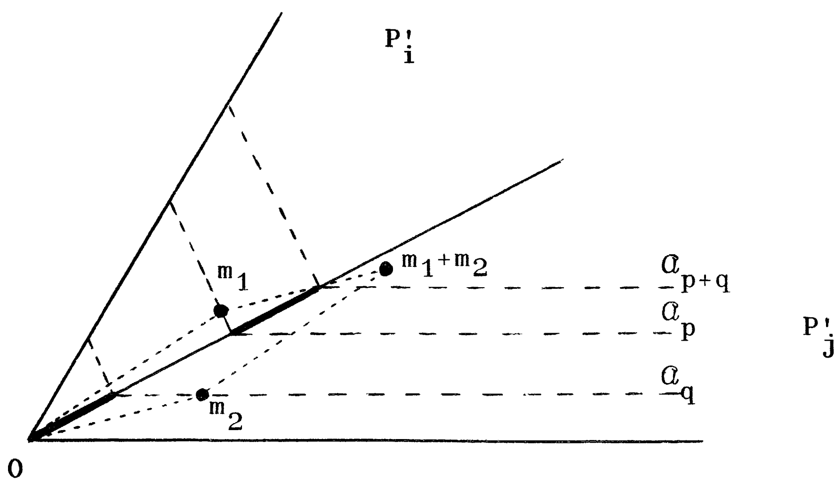
La suite (*) induit alors une suite exacte de A-modules (A est le gradué de $\mathcal{A}$ pour la filtration de Newton considéré)

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \bigoplus_i k[P_i] \longrightarrow \bigoplus_{i,j} k[P_{ij}] \longrightarrow \cdots$$

<u>Démonstration</u> : Le seul point non trivial consiste à vérifier que $A = \operatorname{gr} \mathcal{A}$ est un sous-anneau de $\bigoplus_i k[P_i]$ soit encore :

si $f \in A$ avec $\operatorname{supp} f \subset P_i - P_j$ et $g \in A$ avec $\operatorname{supp} g \subset P_j$ alors $f.g = 0$.

On peut se ramener facilement au cas où $\operatorname{supp} f = \{m_1\} \subset P_i - P_j$ et $\operatorname{supp} g = \{m_2\} \subset P_j$. Choisissons $\tilde{f} \in \mathfrak{a}_p - \mathfrak{a}_{p+1}$ et $\tilde{g} \in \mathfrak{a}_q - \mathfrak{a}_{q+1}$ dont les formes initiales sont f et g. La convexité du domaine $\Phi'^{-1}(\ell + \mathbb{R}_+)$ ($\forall\, \ell \in \mathbb{N}$) assure alors que $\tilde{f}.\tilde{g} \in \mathfrak{a}_{p+q+1}$, autrement dit que $f.g = 0$ dans A.



La démonstration du théorème de M. Hochster va se faire par récurrence sur la dimension et le nombre de faces du cône polyédral P'. Nous allons en fait prouver le résultat suivant :

(2.2) <u>Théorème</u> (Kouchnirenko [1]) : Soit P' un cône polyédral ne contenant pas de droite, P et k[P] le semi-groupe et l'anneau conique associés.

Soit $e \geq n$ le nombre d'arêtes de P' et soient $f_1, \ldots, f_e$ des éléments de k[P] dont les supports, réduits à un point, sont des éléments primitifs $m_1, \ldots, m_e$ des arêtes de P.

Il existe un ouvert dense U de k^{ne} tel que si $(\lambda_{ij}\,;\ 1 \leq i \leq e\,;\ 1 \leq j \leq n) \in U$, les éléments $\sum_{i=1}^{e} \lambda_{ij} f_i$, $1 \leq j \leq n$ forment une suite régulière de k[P].

<u>Démonstration</u> :

<u>1er cas</u>. P' est un simplexe $(n = e)$.

Montrons que $f_1, \ldots, f_n$ forment une suite régulière de k[P], et pour cela que $f_{\ell+1}$ n'est pas diviseur de zéro dans $k[P]/(f_1, \ldots, f_\ell)$. Supposons qu'il existe $g \in k[P]$ tel que

$$f_{\ell+1}.g \in (f_1, \ldots, f_\ell)k[P]$$

ce qui se traduit par

$$\operatorname{supp}(f_{\ell+1}\cdot g) \subset (m_{\ell+1}+P) \cap ((m_1,\dots,m_\ell)+P) \quad .$$

Comme P' est un simplexe, nous avons

$$(m_{\ell+1}+P) \cap ((m_1,\dots,m_\ell)+P) = m_{\ell+1}+(m_1,\dots,m_\ell)+P \quad ,$$

$(m_1,\dots,m_n$ forment un système libre de P),
ce qui montre que supp $g \subset (m_1,\dots,m_\ell)+P$ et par suite que la classe de g est nulle dans $k[P]/(f_1,\dots,f_\ell)$.

2ème cas. P' n'est pas un simplexe ($n<e$).
On construit alors sur k[P] une filtration de Newton de type (1.4) et la décomposition polyédrale associée de P'.

On suppose connu par hypothèse de récurrence le résultat (2.2) pour tous les anneaux construits sur des cônes polyédraux de dimension inférieure à n ou comptant moins de faces que P'.

Ecrivons la suite exacte de A-modules associée à la filtration de Newton de k[P] (voir 2.1) :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \bigoplus_{\Delta\in I_o} k[P_\Delta] \longrightarrow \bigoplus_{\Delta\in I_1} k[P_\Delta] \longrightarrow \dots\dots \longrightarrow \bigoplus_{\Delta\in I_j} k[P_\Delta] \longrightarrow$$

où I_j, $j \geq 1$, est un ensemble de cônes polyédraux de dimension n-j.

D'autre part, $\forall\, \Delta \in I_o$, P'_Δ est un cône de dim n ayant strictement moins de e faces (2.1).

Nous choisissons n combinaisons linéaires $g_1 \dots g_n$ des éléments $f_1,\dots,f_e$ de k[P] définis dans (2.2), et nous considérons leurs formes initiales $\bar{g}_1,\dots,\bar{g}_m$ dans A. Les classes de $\bar{g}_1,\dots,\bar{g}_m$ dans $k[P_\Delta]$ sont n combinaisons linéaires des éléments de $k[P_\Delta]$ dont le support est un élément primitif d'une arête de P'_Δ. En effet $k[P_\Delta] = k[P]/J_\Delta$ où $J_\Delta = \{f \in k[P] \,;\, \operatorname{supp} f \cap P_\Delta = \emptyset\}$.

Par hypothèse de récurrence, pour chaque anneau $k[P_\Delta]$ ($\Delta \in I_j$, $0 \leq j$) de dimension n-j, il existe un ouvert dense $U_\Delta \subset k^{ne}$ pour lequel les classes de $\bar{g}_1,\dots,\bar{g}_{n-j}$ dans $k[P_\Delta]$ forment une suite régulière de $k[P_\Delta]$.

En conséquence, lorsque les coefficients λ_{ij} sont dans $\bigcap_{\Delta\in I_o\cup\dots\cup I_{n-1}} U_\Delta$, le complexe de Koszul dans classes de $\bar{g}_1,\dots,\bar{g}_n$ dans l'anneau $\bigoplus_{\Delta\in I_j} k[P_\Delta]$ est exact en dimension supérieure ou égale à j+1 ([4]).

Il reste à démontrer maintenant, pour terminer la preuve de (2.2), le lemme technique suivant :

(2.3) <u>Lemme</u> : Soit un diagramme commutatif de A-modules

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, hook] & C^o_o \arrow[r] & C^o_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C^o_j \arrow[r] & C^o_{j+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C^o_{n+1} \arrow[r] & {} \\
0 \arrow[r] & A^1 \arrow[r, hook] \arrow[u, "\varphi^1"] & C^1_o \arrow[r] \arrow[u] & {} & & & & & & \\
& A^2 \arrow[u, "\varphi^2"] & & & & & & & & \\
& \vdots \arrow[u] & & & & \vdots \arrow[uuu] & {} & & & \\
0 \arrow[r] & A^i \arrow[r, hook] \arrow[u] & C^i_o \arrow[rr] & & \cdots \arrow[r] & C^i_j \arrow[r, "\Psi^i_j"] \arrow[u] & C^i_{j+1} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots & & \\
0 \arrow[r] & A^{i+1} \arrow[r, hook] \arrow[u, "\varphi^{i+1}"] & C^{i+1}_o \arrow[rr] \arrow[u] & & \cdots \arrow[r] & C^{i+1}_j \arrow[r, "\Psi^{i+1}_j"] \arrow[u, "\varphi^{i+1}_j"] & C^{i+1}_{j+1} \arrow[r] \arrow[u, "\varphi^{i+1}_{j+1}"'] & \cdots & & \\
& {} \arrow[u] & {} \arrow[u] & & & {} \arrow[u] & {} \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}$$

où les suites horizontales sont exactes et la suite verticale (C_j) est exacte en C^i_j pour $i \geq j+1$.

La suite verticale $A \leftarrow A^1 \leftarrow A^2$ est alors exacte en A^i pour $i \geq 1$.

<u>Démonstration</u> : Soit $x^i_o \in A^i$ tel que $\varphi^i(x^i_o) = 0$. Il existe donc $x^{i+1}_o \in C^{i+1}_o$ tel que $\varphi^{i+1}_o(x^{i+1}_o) = x^i_o$. De plus :

$$\varphi^{i+1}_1(\Psi^{i+1}_o(x^{i+1}_o)) = 0 \quad .$$

On trouve donc (par récurrence sur la dimension n) une suite d'éléments $x^{i+1+\ell}_\ell \in C^{i+1+\ell}_\ell$ tels que

$$\varphi^{i+1+\ell}_\ell(x^{i+1+\ell}_\ell) = \Psi^{i+1}_{\ell-1}(x^{i+\ell}_{\ell-1})$$

suite qui se termine en x^{i+n}_{n-1}.

Comme Ψ^{i+n}_{n-2} est surjective, il existe $y^{i+n}_{n-2} \in C^{i+n}_{n-2}$ tel que

$$\Psi^{i+1}_{n-2}(y^{i+n}_{n-2}) = x^{i+n}_{n-1} \quad .$$

De plus :

$$\Psi_{n-2}^{i+n-1}[x_{n-2}^{i+n-1} - \varphi_{n-2}^{i+n}(y_{n-2}^{i+n})] = \Psi_{n-2}^{i+n-1}(z_{n-2}^{i+n-1}) = 0 \quad .$$

Il existe donc y_{n-3}^{i+n-1} tel que

$$\Psi_{n-3}^{i+n-1}(y_{n-3}^{i+n-1}) = z_{n-2}^{i+n-2}$$

et
$$\varphi_{n-2}^{i+n-1}(z_{n-2}^{i+n-1}) = \varphi_{n-2}^{i+n-1}(x_{n-2}^{i+n-1}) = \Psi_{n-3}^{i+n-2}(x_{n-3}^{i+n-2}) \quad .$$

Par récurrence sur n, on obtient donc au bout de la chaîne un élément : $y^{i+1} = z_o^{i+1} \in C_o^{i+1}$ tel que $\Psi_o^{i+1}(z_o^{i+1}) = 0$. On a donc $y^{i+1} \in A^{i+1}$. De plus $\varphi_o^{i+1}(z_o^{i+1}) = x_o^i$, soit $\varphi^{i+1}(y^{i+1}) = x^i$. c.q.f.d.

Le lemme (2.3) appliqué à la situation de (2.2) montre que le complexe de Koszul de la suite $(\bar{g}_1,\ldots,\bar{g}_n)$ est exact en dimension supérieure ou égale à 1, c'est-à-dire que la suite $\bar{g}_1,\ldots,\bar{g}_n$ est régulière dans l'anneau gradué A. En particulier, la suite $g_1,\ldots,g_n$ est régulière dans $\mathcal{A}$.

REFERENCES

[1] A.G. Kouchnirenko, Polyèdres de Newton et nombres de Milnor, Inv. Math. 32 (1976), 1-31.

[2] M. Hochster, Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials and polytopes, Ann. of Math. 96 (1972).

[3] J.L. Brylinski, Eventails et variétés toriques, Séminaire sur les singularités des surfaces, Ecole Polytechnique 1976-77.

[4] J.P. Serre, Algèbre locale, Multiplicités, Lect. Notes No 11, Springer Verlag 1965.
