

SÉMINAIRE SUR LES SINGULARITÉS DES SURFACES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. L. BRYLINSKI

Éventails et variétés toriques

Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 15, p. 1-45

http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977___A17_0

© Séminaire sur les singularités des surfaces
(École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire sur les singularités des surfaces implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E S U R L E S S I N G U L A R I T E S

D E S S U R F A C E S

E V E N T A I L S E T V A R I E T E S T O R I Q U E S

J. L. BRYLINSKI

22 Mars 1977

INTRODUCTION.

On verra ici exposée la description des variétés X^n sur un corps k algébriquement clos munies d'une action fidèle d'un tore T^n , en termes de familles de cônes polyédraux dans un espace vectoriel.

Cet exposé suit pour l'essentiel celui de Saint-Donat [2, ch. I]. On n'y parle pas du groupe de Cremona. On a donné toutes les démonstrations que Saint-Donat laisse au lecteur. On a parfois substantiellement modifié les démonstrations qu'il donnait, de manière à éliminer les calculs explicites, et l'emploi de coordonnées. Je signale la démonstration simple du lemme de Gordan.

En plus de la matière de [2, ch. I], on trouvera ici :

- un traitement plus complet des variétés toriques de dimension 2 ;
- une étude topologique des variétés toriques sur le corps \mathbb{C} , incluant la description du quotient de ces variétés pour l'action du tore compact (c-T) comme compactification d'un espace vectoriel par "adjonction de points idéaux à la Siegel" ;
- la description d'après Demazure [1] du groupe de Picard de ces variétés dans le cas lisse ; la surjectivité de la flèche : $\text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ dans le cas X propre ;
- une étude des morphismes de variétés toriques "avec changement de tore", et un critère de trivialité locale pour ces morphismes.

Il manque à cet exposé l'étude des déformations des variétés toriques. Il n'y a par contre rien à attendre de leurs structures de Hodge mixtes, ni donc de leurs "motifs". En ce qui concerne le fait que ces variétés sont de Cohen-Macaulay, la démonstration de Kushnirenko [4] est la plus constructive : elle sera rédigée dans un prochain exposé.

Il faudrait enfin refaire la théorie, dans le même esprit, sur un corps non algébriquement clos. Pour l'instant, si k est un corps, et T un tore sur k , on ne sait pas trouver une compactification lisse, k -rationnelle, de T ; il semble néanmoins que, pour $\text{car}(k) = 0$, on puisse par les méthodes de Saint-Donat et Mumford, trouver une telle compactification qui soit de plus T -équivariante.

§ 1. IMMERSIONS TORIQUES AFFINES.

Soient k un corps algébriquement clos, T un tore sur k . On introduit deux groupes abéliens :

- $M = \text{Hom}_{\text{gr.alg}}(T, \mathbb{G}_m)$, le groupe des caractères de T ;
- $N = \text{Hom}_{\text{gr.alg}}(\mathbb{G}_m, T)$, le groupe des sous-groupes à un paramètre de T .

Pour $r \in M$, on note \underline{X}^r le caractère correspondant, considéré comme fonction sur T . Pour $a \in N$, on note $\lambda_a : \mathbb{G}_m \rightarrow T$ le groupe à un paramètre correspondant. On a une dualité parfaite :

$$M \times N \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(r, a) \longmapsto \langle r, a \rangle ,$$

où $\langle r, a \rangle$ est l'élément $\underline{X}^r \circ \lambda_a$ de $\mathbb{Z} = \text{Hom}_{\text{gr.alg}}(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m)$. On a canoniquement : $\Gamma(\mathcal{O}_T) = k[M]$, où $k[M]$ est l'algèbre du groupe M sur le corps k .

Définition 1 : Une immersion équivariante de T est la donnée d'une variété X et d'une immersion ouverte dense $T \hookrightarrow X$ telle que l'action de T sur lui-même par translation se prolonge en une action sur la variété X . L'immersion équivariante est dite affine si X est une variété affine.

Un morphisme entre deux immersions équivariantes $T \hookrightarrow X$ et $T \hookrightarrow X'$ est un morphisme $f : X \rightarrow X'$ qui commute à ces immersions.

Nous nous intéressons d'abord à une immersion équivariante affine $f : T \hookrightarrow X$ où $X = \text{Spec}(A)$. Un morphisme $T \rightarrow \text{Spec}(A)$ correspond à un morphisme $f^* : A \rightarrow k[M]$ de k -algèbres. Le morphisme f est dense ssi f^* est injectif ; l'action de T sur X existe ssi A est une sous-algèbre de $k[M]$, qui soit graduée de type M . Ceci revient à dire que $A = k[S]$, où S est un semi-groupe inclus dans M . Il est clair que $k[S]$ est une k -algèbre de type fini ssi S est un semi-groupe à engendrement fini. Si S est un tel semi-groupe, le morphisme $f : \text{Spec}(k[M]) \rightarrow \text{Spec}(k[S])$ est une immersion ouverte ssi il induit un isomorphisme entre les deux points génériques. Ceci signifie que les anneaux $k[S]$ et $k[M]$ ont même corps des fractions, et équivaut clairement à la condition que S engendre M comme groupe. On a ainsi démontré la

Proposition 1 : La correspondance $S \mapsto \text{Spec}(k[S])$ établit une bijection entre

- les semi-groupes $S \subset M$ à engendrement fini, et qui engendrent M comme groupe ;
- les classes d'isomorphismes d'immersions équivariantes affines du tore T ;

- De plus, les morphismes entre immersions équivariantes affines correspondent, de façon contravariante, aux inclusions entre semi-groupes inclus dans M . ■

Définition 2 : Soit $S \subset M$ un semi-groupe ; le saturé \bar{S} de S est le semi-groupe $\bigcup_{n \in \mathbb{N}}^* (\frac{1}{n}S) \cap M$. On dit que S est saturé si $\bar{S} = S$.

Proposition 2 : Soit S un semi-groupe de M ,

- (i) si S est à engendrement fini, \bar{S} l'est itou ;
- (ii) $k[\bar{S}]$ est le normalisé de $k[S]$.

Démonstration : (i) résulte de (ii) et du fait que la normalisée d'une algèbre de type fini est une algèbre de type fini.

Pour prouver (i), si R est le normalisé de $k[S]$ (dans son corps des fractions), on a des inclusions $k[S] \subset R \subset k[M]$.

L'action naturelle de $T(k)$ sur ce diagramme force R à être un sous-anneau de $k[M]$, muni d'une graduation de type M .

Montrons $k[\bar{S}] \subset R$; en effet, soit $r \in (\frac{1}{n}S) \cap M$; alors \underline{X}^r satisfait l'équation $(\underline{X}^r)^n - \underline{X}^{nr} = 0$ de dépendance intégrale sur $k[S]$.

Montrons $R \subset k[\bar{S}]$; ces deux anneaux étant gradués de type M , il suffit de montrer que si un élément r de M est tel que \underline{X}^r vérifie une équation de dépendance intégrale sur $k[S]$

$$X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 = 0$$

alors $r \in \bar{S}$. Mais on peut clairement supposer chaque a_i homogène de poids $ir \in M$; comme $k[S]$ est intègre, une de ces a_i est non nul, donc il existe un entier $i \geq 1$ tel que $ir \in S$; il en résulte $r \in (\frac{1}{i}S) \cap M$, donc $r \in \bar{S}$. ■

On se restreindra désormais aux semi-groupes à engendrement fini saturés. Ceux-ci peuvent se décrire en termes géométriques simples. Nous introduisons certains objets simpliciaux dans l'espace vectoriel $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, ou dans $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Proposition et définition 3 : Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{Q} de dimension finie ; soit $E_{\mathbb{R}} = E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Pour une partie σ de $E_{\mathbb{R}}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) on peut trouver une famille finie ℓ_i , $i = 1, \dots, N$ de formes linéaires sur $E_{\mathbb{Q}}$ telle que :

$$\sigma = \{x, \ell_i(x) \geq 0, \forall i\} ;$$

$\sigma \cap M$ est un semi-groupe à engendrement fini (c'est le "lemme de Gordan"). Comme plus haut, on se ramène à supposer σ contenu dans un quadrant ; soient $\sigma_i = \sigma \cap H_i$ les faces de codimension 1 de σ , en nombre fini, pour des hyperplans H_i convenables de $M_{\mathbb{Q}}$. Par hypothèse de récurrence, les semi-groupes $\sigma_i \cap M$ sont à engendrement fini. Pour tout i , soit $\{x_i^{(i)}, \dots, x_i^{(j)}\}$ une famille de générateurs de $\sigma_i \cap M$. Soit K l'enveloppe convexe dans $M_{\mathbb{R}}$ de la réunion de 0 et de tous les $x_i^{(\ell)}$. Soit $\mathcal{C} = K \cap M$; c'est une partie de σ discrète et compacte, donc finie. Montrons qu'elle engendre $\sigma \cap M$ comme semi-groupe. En effet, soit $x \in \sigma \cap M$; on peut écrire $x = \sum_{g \in \mathcal{C}} \lambda_g x_g$, $\lambda_g \geq 0$ puisque \mathcal{C} engendre M comme cône ; il en résulte que si n est la dimension de M , on peut trouver un sous-ensemble de \mathcal{C} de cardinal n tel que x soit barycentre de cet ensemble à coefficients rationnels ≥ 0 ; on prendra ce sous-ensemble tel que le cône convexe qu'il engendre soit minimal. Soit $\{y_1, \dots, y_n\}$ cet ensemble. Alors le simplexe $\langle y_1, \dots, y_n \rangle$ ne contient pas d'autre point de M que 0 et les y_i ; un tel point serait en effet en point de K qui subdiviserait le simplexe en n simplexes plus petits, et x appartiendrait à l'un d'eux : mais alors l'ensemble $\{y_1, \dots, y_n\}$ ne serait pas minimal au sens précédent. Il est bien connu que ceci entraîne que $\{y_1, \dots, y_n\}$ est une base de M ; par conséquent x est une combinaison linéaire des y_i à coefficients entiers ≥ 0 , et le lemme de Gordan est démontré. ■

Pour des raisons de meilleure variance (qui seront cruciales lors de l'étude du "changement de tore" et des éclatements équivariants), on préfère représenter les semi-groupes saturés de M par des cônes polyédraux dans $N_{\mathbb{R}}$ plutôt que dans $M_{\mathbb{R}}$.

Si donc σ est un cône polyédral de $N_{\mathbb{R}}$, son dual $\check{\sigma}$ est : $\check{\sigma} = \{r \in M_{\mathbb{R}} \text{ t.q. } \langle r, x \rangle \geq 0, \forall x \in \sigma\}$. On déduit facilement de la Proposition 3 que $\check{\check{\sigma}} = \sigma$, et que la flèche $\sigma \mapsto \check{\sigma}$ est une correspondance (ou dualité) entre cônes polyédraux de $N_{\mathbb{R}}$ (resp. de $M_{\mathbb{R}}$) qui renverse le sens des inclusions, transforme l'opération "intersection" en l'opération "somme convexe", et induit sur les sous-espaces linéaires la dualité ordinaire. En particulier, il revient au même de dire que σ ne contient aucun sous-espace vectoriel propre de $N_{\mathbb{R}}$, ou que $\check{\sigma}$ n'est contenu dans aucun hyperplan de $M_{\mathbb{R}}$.

Le lemme 1 a donc pour conséquence immédiate la première phrase du

Théorème 1 : La correspondance $\sigma \mapsto \text{Spec } k[\check{\sigma} \cap M] = X_{\sigma}$ établit une bijection entre

- l'ensemble des cônes polyédraux de $N_{\mathbf{R}}$ qui ne contiennent pas de sous-espace vectoriel propre de $N_{\mathbf{R}}$;

- l'ensemble des (classes d'isomorphisme d') immersions équivariantes affines du tore T ;

De plus, si $a \in N$, on a : $a \in \sigma$ ssi $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_a(t)$ existe dans X_{σ} .

Démonstration : Le groupe à un paramètre λ_a correspond à un homomorphisme d'anneaux : $\lambda_a^* : k[M] \rightarrow k[t, t^{-1}]$ t.q.

$$\lambda_a^*(\underline{X}^r) = t^{\langle r, a \rangle} .$$

L'existence de $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_a(t)$ dans X_{σ} équivaut à la possibilité de factoriser par $k[t]$ le morphisme composé $k[\overset{\vee}{\sigma} \cap M] \rightarrow k[M] \rightarrow k[t, t^{-1}]$. Il est clair que cette factorisation peut se faire ssi $\langle r, a \rangle \geq 0, \forall r \in \overset{\vee}{\sigma} \cap M$ i.e. ssi $a \in \overset{\vee}{\sigma} = \sigma$. ■

Si $a \in \sigma$, on note alors $\lambda_a(0)$ le point fermé $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_a(t)$ de X_{σ} .

Nous allons maintenant étudier les orbites sous T d'une variété du type X_{σ} , pour σ cône polyédral de $N_{\mathbf{R}}$.

Théorème 2 : Pour σ cône polyédral de $N_{\mathbf{R}}$, et X_{σ} la variété "torique" associée, on a les propriétés :

(a) Soient a_1 et a_2 deux éléments de $\sigma \cap N$, alors on a $\lambda_{a_1}(0) = \lambda_{a_2}(0)$ ssi a_1 et a_2 sont dans l'intérieur d'une même face de σ ;

(b) dans toute T -orbite de X_{σ} , il y a un point unique du type $\lambda_a(0)$;

(c) il existe une bijection $\sigma' \mapsto \mathfrak{O}^{\sigma'}$ entre faces de σ et T -orbites de X_{σ} telle que :

- $\sigma_1 \subset \sigma_2$ ssi $\bar{\mathfrak{O}}^{\sigma_1} \supset \mathfrak{O}^{\sigma_2}$
- $\dim(\sigma') + \dim(\mathfrak{O}^{\sigma'}) = n = \dim(N_{\mathbf{R}})$.

(a) Le calcul fait en notre théorème 1 montre que $\lambda_a(0)$ est défini par l'homomorphisme d'algèbres : $k[\overset{\vee}{\sigma} \cap M] \rightarrow k$ t.q.

$$\underline{X}^r \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \langle r, a \rangle = 0 \\ 0 & \text{si } \langle r, a \rangle > 0 \end{cases} .$$

Cet homomorphisme est déterminé précisément par le semi-groupe

$\overset{\vee}{\sigma} \cap M \cap \{r \text{ tq } \langle r, a \rangle = 0\}$, ou encore par le cône somme convexe dans $M_{\mathbf{R}}$, de σ et

de $\mathbf{R}.a$. Or cette somme convexe a pour plus grand sous-espace vectoriel, l'espace engendré par l'intérieur de la face de σ qui contient a (on pourra, à cet argument vicieux, préférer celui de Saint-Donat ([2], p. 10)). On remarque d'ailleurs que l'on établit ainsi une bijection entre faces de σ et faces de $\check{\sigma}$.

(b) Une orbite \mathfrak{O} de X_σ , pour l'action de T , est déterminée par son adhérence $\overline{\mathfrak{O}}$, qui est définie par un idéal I gradué de $k[\check{\sigma} \cap \mathbf{M}]$, qui est certainement un idéal premier. Cet idéal est donc de la forme $k[S]$, où S est un semi-groupe de $\check{\sigma} \cap \mathbf{M}$ tel que $S + (\check{\sigma} \cap \mathbf{M}) = S$ et que, si deux éléments de $\check{\sigma} \cap \mathbf{M}$ ont pour somme un élément de S , un de ces deux éléments est dans S . Il en résulte que le complémentaire de S dans $\check{\sigma} \cap \mathbf{M}$ est un semi-groupe saturé, et la condition $S + (\check{\sigma} \cap \mathbf{M}) = S$, montre que c'est l'intersection de \mathbf{M} et d'une face de $\check{\sigma}$.

On obtient donc $\overline{\mathfrak{O}}$ comme suit : on choisit τ une face de σ , soit $\check{\tau}$ la face correspondante de $\check{\sigma}$. On a, en regardant la construction de (a) $\dim(\tau) + \dim(\check{\tau}) = n$. On a une décomposition :

$$k[\check{\sigma} \cap \mathbf{M}] = I \oplus k[\check{\tau} \cap \mathbf{M}] .$$

On a : $\overline{\mathfrak{O}} = \text{Spec}(k[\check{\tau} \cap \mathbf{M}])$; c'est donc une variété torique (pour un tore quotient de T) ; on a un diagramme T -équivariant

$$X_\sigma \begin{array}{c} \xrightarrow{r} \\ \xleftarrow{i} \end{array} \overline{\mathfrak{O}}$$

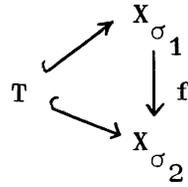
où r est une rétraction. Soit $\overline{\mathfrak{O}}^\tau = \text{Spec}(k[\tau \cap \mathbf{M}])$ et soit \mathfrak{O}^τ son plus petit ouvert invariant sous T ; on a clairement $\dim(\mathfrak{O}^\tau) = n - \dim(\tau)$. De plus, si a est dans l'intérieur de τ , on voit par (a) que $\lambda_a(0)$ est dans \mathfrak{O}^τ . On a ainsi démontré (b) et (c) .

Exemple : Avec les notations du théorèmes 2, σ lui-même correspond à l'unique orbite fermée de X_σ (qui est l'orbite minimale).

Nous donnerons plus loin une description concrète des orbites dans le cas de la dimension 2.

Etudions maintenant la functorialité en σ de la variété X_σ .

Théorème 3 : Soient σ_1 et σ_2 deux cônes polyédraux de $N_{\mathbf{R}}$; il existe un morphisme $f : X_{\sigma_1} \rightarrow X_{\sigma_2}$ faisant commuter le diagramme



ssi $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$. Dans ce cas, f commute à l'action de T ; c'est une immersion ouverte ssi σ_1 une face de σ_2 .

Démonstration : Si $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$, alors $\check{\sigma}_2 \subseteq \check{\sigma}_1$, et on a une inclusion $f^* : k[\check{\sigma}_2 \cap M] \subseteq k[\check{\sigma}_1 \cap M]$ qui procure f comme requis. Si f existe, pour tout $a \in \sigma_1 \cap N$, le Théorème 1 dit que $\lambda_a(0)$ existe dans X_{σ_1} , donc que $\lambda_a(0)$ existe dans X_{σ_2} ; en tant qu'image par f du précédent, donc que $a \in \sigma_2 \cap N$. D'où $\sigma_1 \cap N \subseteq \sigma_2 \cap N$ et, de là, $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$.

De plus, si σ_1 est une face de σ_2 , alors X_{σ_1} est le complémentaire dans X_{σ_2} de l'union des orbites \mathcal{O}^τ , pour τ face de σ_2 non incluse dans σ_1 , donc X_{σ_1} est un ouvert de X_{σ_2} . Inversement, supposons X_{σ_1} ouvert dans X_{σ_2} , et soit τ une face quelconque de σ_2 ; si σ_1 rencontre $\text{Int}(\tau)$, alors par le Théorème 2, pour $a \in \sigma_1 \cap \text{Int}(\tau)$, on a : $\lambda_a(0) \in X_{\sigma_1} \cap \mathcal{O}^\tau$ d'où $\mathcal{O}^\tau \subset X_{\sigma_1}$ et $\tau \subset \sigma_1$; donc σ_1 est un cône polyédral qui est une union de faces de σ_2 , c'est nécessairement une face de σ_2 . ■

Venons-en maintenant à l'important critère de lissité des variétés X_σ .

Théorème 4 : X_σ est une variété lisse ssi $\sigma \cap N$ est engendré par une partie d'une base de N .

Démonstration : Soit a_1, \dots, a_n une base de N , et supposons que pour un certain r ($1 \leq r \leq n$) on ait $\sigma = \{ \sum_{i=1}^r \lambda_i a_i, \lambda_i \geq 0 \}$.

Alors $X_\sigma = \text{Spec } k[X_1, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_n, X_{r+1}^{-1}, \dots, X_n^{-1}]$ est isomorphe à $\mathbb{A}_a^r \times \mathbb{A}_m^{n-r}$ donc non singulier.

Supposons réciproquement X_σ lisse ; soit N'_R le sous-espace vectoriel de N_R engendré par σ , soit $N' = N'_R \cap N$, et choisissons une décomposition $N = N' \oplus N''$, d'où $M = M' \oplus M''$, $T = T' \times T''$ et $X_\sigma = X'_{\sigma'} \times T''$, où $X'_{\sigma'}$ est le T' -immersion définie par le cône polyédral σ' de N'_R . Donc $X'_{\sigma'}$ est non-singulière. On s'est ainsi réduit au cas où σ engendre N_R , ou encore au cas où X_σ a un point T -fixe 0. Comme dans la démonstration du Théorème 2, on a :

$$k[S] = k[S - \{0\}] \oplus k \quad ,$$

et $I = k[S - \{0\}]$ est l'idéal maximal du point 0. Du lemme de Gordan, il résulte que S est engendré par ses éléments indécomposables ; comme $k[S]$ est régulier, on peut trouver $\underline{X}^{r_1}, \dots, \underline{X}^{r_n}$ qui engendrent I (avec $r_i \in S$), donc les r_i engendrent S , donc forment une base de N sur \mathbb{Z} . ■

Exemples : (a) En dimension 1. On a : $T = \mathbb{G}_m$, $M = \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}$. On a 3σ possibles (essentiellement)

$$* \quad \sigma = \{0\} \quad \text{et} \quad X_\sigma = \mathbb{G}_m = \text{Spec } k[t, t^{-1}]$$

$$* \quad \sigma = \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad X_\sigma = \mathbb{G}_a = \text{Spec } k[t]$$

$$* \quad \sigma = \mathbb{R}_- \quad \text{et} \quad X_\sigma = \mathbb{G}_a = \text{Spec } k[t^{-1}] \quad .$$

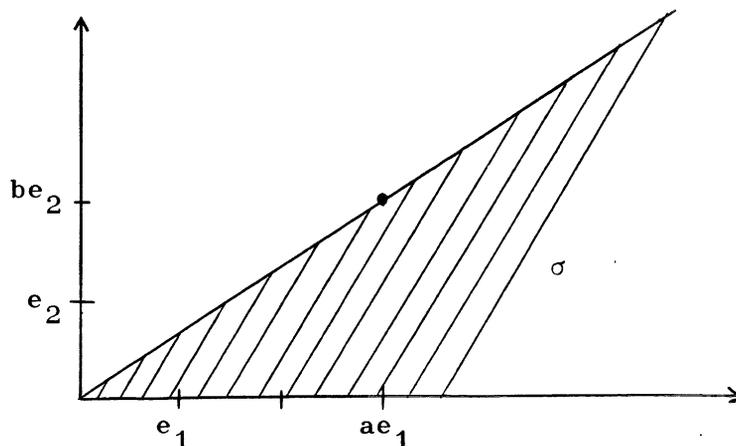
Les notations indiquent quelles sont les deux immersions $\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{G}_a$. On attendra le § suivant pour obtenir la droite projective par recollement de ces deux copies de $\mathbb{G}_a = \mathbb{A}^1$.

(b) En dimension 2. Soit σ un cône polyédral dans $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$, d'intérieur non vide, ne contenant pas de sous-espace vectoriel propre de \mathbb{R}^2 . On peut trouver une base (e_1, e_2) de N telle que :

$$\sigma = \{ \lambda e_1 + \mu (ae_1 + be_2) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+ \} \quad ,$$

où a et b sont deux entiers tels que $a > 0$, $b > 0$ et $(a, b) = 1$.

D'après le Théorème 4, X_σ est non singulière ssi $b = 1$, et alors $X_\sigma \cong \mathbb{A}_k^2$. Si $b > 1$, X_σ a un point singulier isolé, qui est le seul point invariant sous $T = \mathbb{G}_m^2$.



Si nous introduisons le nouveau réseau N_* de \mathbf{R}^2 engendré par e_1 et $ae_1 + be_2$, et le réseau dual M_* dans \mathbf{R}^2 , on voit que $X_{\sigma_*} = \text{Spec } \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M_*]$ est non singulière. De plus l'anneau $\check{\sigma} \cap M_*$ est muni d'une graduation de type M_*/M ; or $M_*/M \cong (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})$; si b ne divise pas la caractéristique de k , on en déduit une action de μ_b sur X_{σ_*} ; le quotient de X_{σ_*} par μ_b n'est autre que X_σ .

Explicitons cette action de μ_b ; soit (r_1, r_2) la base duale de (e_1, e_2) ; le cône σ est engendré par r_2 et $br_1 - ar_2$. Par construction $(r_2, br_1 - ar_2)$ est une base de M_* . En prenant des coordonnées (X, Y) adaptées à cette base, on voit que $X_{\sigma_*} = \text{Spec } \mathbb{C}[X, Y]$ (avec $X = \underline{X}^{r_2}$, $Y = \underline{X}^{br_1 - ar_2}$). L'action de $\xi \in \mu_b$ s'écrit : $\xi \cdot (X, Y) = (\xi X, \xi^{-a} Y)$. Par le lemme de Gordan, $\check{\sigma} \cap M$ est engendré par les points de M qui sont dans le triangle des sommets $0, r_2, br_1 - ar_2$. Ceci permet de calculer $\mathbb{C}[\sigma \cap M] = \mathbb{C}[X, Y]^{\mu_b}$.

Par exemple, si $a = 1$, on a :

$$\mathbb{C}[X, Y]^{\mu_b} = \mathbb{C}[XY, X^b, Y^b] = \mathbb{C}[u, v, w]/(vu - w^b) ,$$

ce qui est un point double rationnel de type A_{b-1} .

Si $a = -1$, on a : $\mathbb{C}[X, Y]^{\mu_b} = \mathbb{C}[X^b, X^{b-1}Y, \dots, Y^b]$ où on reconnaît la forme paramétrique du cône affine sur une courbe rationnelle de degré $b-1$ dans \mathbb{P}^{b-1} .

On reviendra plus loin à ces singularités cycliques, pour en décrire un procédé équivariant de désingularisation.

Description topologique des variétés toriques affines sur \mathbb{C} .

Si $k = \mathbb{C}$, on a la suite exacte exponentielle :

$$0 \rightarrow N \rightarrow N_{\mathbb{C}} \rightarrow T \rightarrow 0 ,$$

d'où une décomposition :

$$T \cong (c-T) \times (iN_{\mathbf{R}}) ,$$

où i est une racine carrée de -1 et où $(c-T)$ est le tore compact $N_{\mathbf{R}}/N$. On dénote par ord la projection $T \rightarrow N_{\mathbf{R}}$ telle que

$$\text{ord}(x + iy \text{ mod } N) = y \text{ pour } x, y \in N_{\mathbf{R}} .$$

Si $\alpha \in M$, on a : $\underline{X}^\alpha(z \text{ mod } N) = e^{2\pi i \langle \alpha, z \rangle}$ pour $z \in N_{\mathbb{C}}$

d'où $|\underline{X}^{\alpha}(z)| = e^{-2\pi\langle\alpha, \text{ord } z\rangle}$ pour $z \in T$.

Soit N_{σ} l'espace topologique quotient de X_{σ} par l'action de $c-T$, pour σ cône polyédral de $N_{\mathbf{R}}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\text{ord}} & N_{\mathbf{R}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\sigma} & \longrightarrow & N_{\sigma} \end{array}$$

où les flèches horizontales sont propres, et les flèches verticales des immersions à image ouverte. Le groupe de Lie $N_{\mathbf{R}}$, identifié à $T/(c-T)$, agit encore sur N_{σ} . Décrivons les orbites de cette action. Pour toute face τ de σ , soit \mathbb{O}^{τ} l'orbite correspondante de X_{σ} (comme dans le Théorème 2). Dans X_{σ} , on définit $\overline{\mathbb{O}}^{\tau}$ par les équations $\underline{X}^r = 0$ pour $r \in \mathcal{V} \cap M$ et $\langle r, x \rangle > 0$ sur $\text{Int}(\tau)$. Si x est un point de X_{σ} , x est dans l'orbite \mathbb{O}^{τ} ssi

$$M \cap \mathcal{V} \cap \{r \text{ tq } \underline{X}^r(x) \neq 0\} = M \cap \mathcal{V} \cap L(\tau)^{\perp}$$

où $L(\tau)$ est le sous-espace vectoriel de $N_{\mathbf{R}}$ engendré par τ .

(Comparer avec la démonstration (a) du Théorème 2).

On en déduit une application $\text{ord} : \mathbb{O}^{\tau} \rightarrow N_{\mathbf{R}}/L(\tau)$ telle que

$$\langle \text{ord}(x), r \rangle = -\frac{1}{2\pi} \text{Log } |\underline{X}^r(x)|$$

pour $r \in M \cap \mathcal{V} \cap L(\tau)^{\perp}$.

Il est clair que $\underline{\mathbb{O}}(\tau) = N_{\mathbf{R}}/L(\tau)$ apparaît ainsi comme le quotient de \mathbb{O}^{τ} par l'action de $(c-T)$, donc que $\underline{\mathbb{O}}(\tau)$ est une orbite de N_{σ} sous l'action de $N_{\mathbf{R}}$.

On a ainsi décomposé l'espace topologique N_{σ} en l'union des strates $\underline{\mathbb{O}}(\tau)$; pour décrire la topologie de N_{σ} , il suffit de montrer comment "recoller" ces strates. Si y est un élément de $N_{\mathbf{R}}/L(\tau)$, on note $y + \infty \cdot \tau$ le point correspondant de N_{σ} . On décrira la condition pour qu'une suite (x_n) de points de $N_{\mathbf{R}}$ converge dans N_{σ} vers $y + \infty \cdot \tau$. Puisque la projection de X_{σ} sur N_{σ} est propre, c'est vrai ssi il existe une suite z_n dans T telle que $\text{ord}(z_n) = x_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z$, avec $z \in \mathbb{O}^{\tau}$ et $\text{ord}(z) = y$.

On doit donc avoir :

$$|\underline{X}^r(z_n)| = e^{-2\pi\langle r, x_n \rangle} \quad \text{pour } r \in M$$

$$|\underline{X}^r(z)| = e^{-2\pi\langle r, y \rangle} \quad \text{pour } r \in \mathcal{V} \cap M \cap L(\tau)^{\perp}$$

et
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\underline{X}^r(z_n)| = |\underline{X}^r(z)| \quad \text{pour } r \in \check{\sigma} \cap M .$$

Pour simplifier la discussion, on choisit une décomposition :

$N_{\mathbf{R}} = N'_{\mathbf{R}} \oplus L(\tau)$, et on écrit : $x_n = u_n + v_n$. On obtient les deux conditions :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle r, u_n \rangle = \langle r, y \rangle \quad \text{pour } r \in \check{\sigma} \cap M, r \text{ nul sur } L(\tau) ,$$

et
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle r, v_n \rangle = +\infty \quad \text{pour } r \in \check{\sigma} \cap M, r \text{ nul sur } N'_{\mathbf{R}} \text{ et } r > 0 \text{ sur } \text{Int}(\tau).$$

On en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = y$ ssi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = y$ dans $N'_{\mathbf{R}} = N_{\mathbf{R}} \setminus L(\tau)$ et $\forall w \in L(\tau)$

$z_n \in \tau + w$ pour n grand.

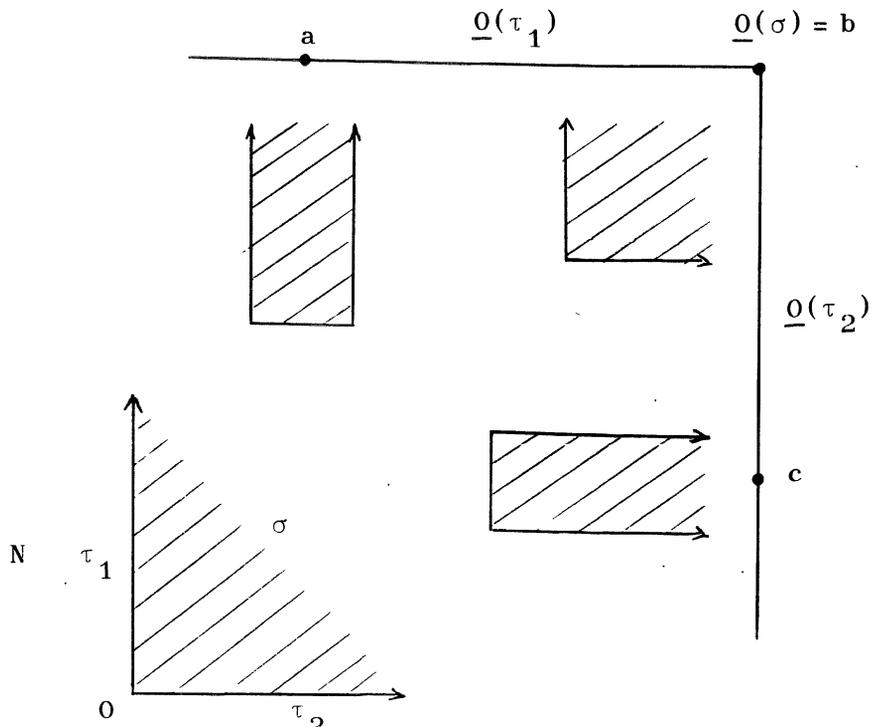
Un système fondamental de voisinages de $y + \infty \cdot \tau$ dans $N_{\mathbf{R}}$ est donc fourni par les $U_{\varepsilon, w}$ avec :

$$U_{\varepsilon, w} = y + w + B_{\varepsilon} + \tau$$

où $w \in L(\tau)$ et B_{ε} est une boule de rayon ε centrée en 0, pour une métrique euclidienne sur $N_{\mathbf{R}}$.

On décrit de même le recollement entre deux orbites $\underline{0}(\tau)$ et $\underline{0}(\tau')$, lorsque τ est une force de τ' , ce qui est clairement suffisant pour décrire la topologie de N_{σ} .

On fera le dessin de N_{σ} lorsque $N = \mathbf{R}^2$ et $\sigma = \mathbf{R}^2_+$.



Les régions hachurées décrivent des voisinages typiques des points a, b, c dans N_σ .

On trouvera plus de détails dans [3, p. 1-8].

La topologie de N_σ ne permet pas de reconstruire celle de X_σ . Néanmoins, on peut déterminer le type d'homotopie de X_σ par la construction suivante. Soit toujours $L(\sigma)$ l'espace vectoriel engendré par σ dans $N_{\mathbf{R}}$, et soit $V_{\mathbf{R}}(\sigma)$ son orthogonal dans $M_{\mathbf{R}}$; c'est le plus grand espace vectoriel contenu dans σ ; l'unique orbite fermée de X_σ , à savoir \mathbb{T}^σ (voir le Théorème 2) s'identifie au tore quotient de T par le sous-tore défini par $L(\sigma) \cap N$: le tore \mathbb{T}^σ a donc pour groupe de caractères $V(\sigma) \cap M$; dans la démonstration du Théorème 2, on a donné une rétraction holomorphe de X_σ sur \mathbb{T}^σ . En particulier, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow L(\sigma) \cap N \longrightarrow N \longrightarrow \pi_1(X_\sigma) \longrightarrow 0$$

et l'algèbre de cohomologie entière de X_σ est l'algèbre extérieure sur le dual du \mathbf{Z} -module libre $N/L(\sigma) \cap N$, qui s'identifie à $V(\sigma) = M \cap V_{\mathbf{R}}(\sigma)$.

§ 2. IMMERSIONS TORIQUES GÉNÉRALES.

Le but est de décrire les immersions équivariantes d'une tore T en se servant des immersions affines du § 1 comme de morceaux d'un puzzle. On veut ensuite décrire de façon constructive, un procédé de résolution équivariante des singularités des variétés.

On commence par énoncer un résultat de Sumihiro, pour la démonstration duquel nous ne saurions mieux faire que de renvoyer à [2, p. 20-23].

Théorème 5 (Sumihiro) : Soit X une variété normale sur laquelle agit un tore T ; alors tout point de X admet un voisinage ouvert affine, invariant sous T . Soit donc X une variété normale sur k , $T \curvearrowright X$ une immersion équivariante. Le Théorème 5 nous dit qu'on peut recouvrir X par des ouverts affines U_α invariants sous T ; le Théorème 1 dit que chaque U_α est du type X_{σ_α} pour un certain cône polyédral σ_α de $N_{\mathbf{R}}$. Puisque X est une variété, c'est un schéma séparé; pour tous α, β , les flèches $X_{\sigma_\alpha} \cap X_{\sigma_\beta} \rightarrow X_{\sigma_\alpha}$ et $X_{\sigma_\alpha} \cap X_{\sigma_\beta} \rightarrow X_{\sigma_\beta}$ sont donc des immersions ouvertes; comme $X_{\sigma_\alpha} \cap X_{\sigma_\beta}$ est le produit fibré de X_{σ_2} et X_{σ_β} dans la catégorie des immersions équivariantes de T , le Théorème 3 montre que

$X_{\sigma_\alpha} \cap X_{\sigma_\beta} = X_{\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta}$. Il en résulte que $\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta$ doit être une face de σ_α et de σ_β .

Si donc l'on considère la famille des cônes polyédraux σ de $N_{\mathbf{R}}$ tels que l'on ait un diagramme T-équivariant

$$\begin{array}{ccc} T & \hookrightarrow & X_\sigma \\ & \searrow & \downarrow i_\sigma \\ & & X \end{array}$$

où i_σ est une immersion ouverte, on voit que cette famille qu'on notera $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jouit de plein droit des propriétés suivantes :

- (i) A est un ensemble fini ;
- (ii) si σ est une face de σ_α , on a : $\sigma = \sigma_\beta$ pour un $\beta \in A$;
- (iii) pour tous $\alpha, \beta \in A$, $\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta$ est une face de σ_α et de σ_β .

Définition : Un éventail de $N_{\mathbf{R}}$ est une famille $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de cônes polyédraux de $N_{\mathbf{R}}$ satisfaisant les propriétés (i), (ii), (iii).

Remarque : Si on élimine la propriété (i), ce qui est parfois utile, on obtient des schémas toriques qui ne sont plus de type fini, mais seulement localement de type fini.

Nous regrettons que Mumford ne soit pas un "fan" de cette terminologie due à Demazure [1, p. 557].

Si on se donne un éventail $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $N_{\mathbf{R}}$, on construit un schéma X à partir de $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_{\sigma_\alpha}$, par recollement de X_{σ_α} et X_{σ_β} le long de $X_{\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta}$; la propriété (i) entraîne que X est de type fini ; on note $X_{\{\sigma_\alpha\}}$ la variété normale ainsi obtenue. C'est clairement une immersion équivariante du tore T.

Enonçons donc le

Théorème 6 : (i) La flèche : $\{\sigma_\alpha\} \mapsto X_{\{\sigma_\alpha\}}$ établit une bijection entre éventails de $N_{\mathbf{R}}$ et les classes d'isomorphisme d'immersions équivariantes normales de T ;

(ii) la flèche qui à chaque σ_α associe l'unique T-orbite fermée de X_{σ_α} , notée $\mathbb{O}^{\sigma_\alpha}$, établit une bijection entre l'ensemble des σ_α et l'ensemble des T-orbites de $X_{\{\sigma_\alpha\}}$; cette bijection renverse le sens des inclusions entre adhérences d'orbites.

Démonstration : Il nous faut démontrer (ii). Mais si \mathbb{O} est une T-orbite, le Théorème 5 montre qu'elle est contenue dans un ouvert affine invariant sous T, donc dans un X_{σ_α} ; cette orbite est donc du type $\mathbb{O}^{\sigma_\beta}$ pour σ_β une face de σ ; mais alors σ_β est dans l'éventail, à cause de la propriété (ii), et $\mathbb{O}^{\sigma_\beta}$ est l'unique orbite fermée de X_{σ_β} . ■

Théorème 7 : Soient $\{\sigma_\alpha\}$ et $\{\sigma'_\beta\}$ deux éventails de $N_{\mathbb{R}}$. Il existe un morphisme $f: X_{\{\sigma_\alpha\}} \rightarrow X_{\{\sigma'_\beta\}}$ d'immersions toriques ssi pour tout α , il existe β tel que $\sigma_\alpha \subseteq \sigma'_\beta$.

Si cette condition est réalisée, f est surjectif ssi $\cup \sigma_\alpha$ rencontre $\text{Int}(\sigma'_\beta)$ pour tout β .

Démonstration : Si f existe, pour tout α , l'image de l'orbite $\mathbb{O}^{\sigma_\alpha}$ est contenue dans un ouvert affine du type $X_{\sigma'_\beta}$; si x est un point de X_{σ_α} , son orbite est adhérente à $\mathbb{O}^{\sigma_\alpha}$, donc l'orbite de $f(x)$ est adhérente à $X_{\sigma'_\beta}$, et $X_{\sigma'_\beta}$ étant ouvert et invariant sous T, contient $f(x)$.

On en déduit : $f(X_{\sigma_\alpha}) \subset X_{\sigma'_\beta}$, d'où $\sigma_\alpha \subseteq \sigma'_\beta$ par le Théorème 3. La réciproque est immédiate.

Si f existe, pour tout α , il existe un unique β tel que $\text{Int}(\sigma_\alpha) \subset \text{Int}(\sigma'_\beta)$, et on a : $f(\mathbb{O}^{\sigma_\alpha}) = \mathbb{O}^{\sigma'_\beta}$ d'après le Théorème 2. Le deuxième énoncé du théorème en résulte immédiatement. ■

Énonçons maintenant les critères de propriété "absolue" et "relative".

Théorème 8 : (a) $X_{\{\sigma_\alpha\}}$ est une variété complète ssi $\cup \sigma_\alpha = N_{\mathbb{R}}$;

(b) avec les notations du Théorème 7, le morphisme $f: X_{\{\sigma_\alpha\}} \rightarrow X_{\{\sigma'_\beta\}}$ est propre ssi $\cup \sigma_\alpha = \cup \sigma'_\beta$.

Démonstration : On applique le critère valuatif : $X_{\{\sigma_\alpha\}}$ est complet ssi tout point $f: \text{Spec } k((t)) \rightarrow X_{\{\sigma_\alpha\}}$ se prolonge à $\text{Spec } k[[t]]$. Il est clair qu'on ne perd rien à supposer f lui-même à valeurs dans l'ouvert dense T, donc donné par un homomorphisme d'algèbres

$$f^* : k[M] \rightarrow k((t)) .$$

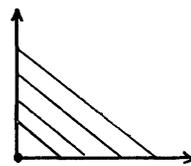
Soit $\varphi: M \rightarrow \mathbb{Z}$ la forme linéaire telle que $\varphi(r) = \text{ord}_0(f(X^r))$. On voit que le prolongement existe ssi il existe un α de la famille telle que φ soit ≥ 0 sur

$\bigvee_{\sigma_{\alpha}} \cap \mathbf{M}$, ou sur $\bigvee_{\sigma_{\alpha}}$ (c'est la même chose). Ceci revient à demander que φ soit dans $\bigvee_{\sigma_{\alpha}} = \sigma_{\alpha}$. Comme φ peut être quelconque, le critère valuatif équivaut au fait que l'union des σ_{α} contienne tout élément de N , ce qui démontre (a).

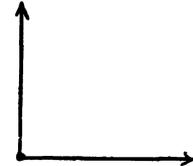
Le critère valuatif dans le cas de $f: X_{\{\sigma_{\alpha}\}} \rightarrow X_{\{\sigma'_{\beta}\}}$ montre que f est propre ssi tout élément de $N \cap (\bigcup \sigma'_{\beta})$ appartient à $N \cap (\bigcup \sigma_{\alpha})$, d'où (b). ■

Exemple de la dimension 2.

On rappelle que les éventails

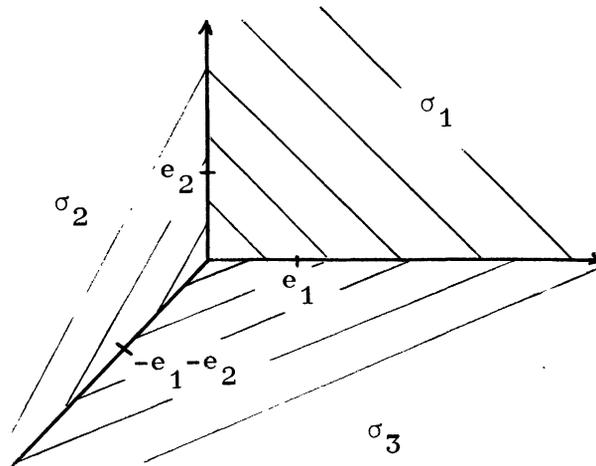


et



corrés-

pondent respectivement à \mathbb{C}^2 et à $\mathbb{C}^2 - \{0\}$; voici des exemples d'éventails qui recouvrent \mathbb{R}^2 , donc tels que les variétés toriques associées soient complètes. Voici d'abord le plan projectif de \mathbb{P}^2 .



Cette variété est en effet recouverte par 3 ouverts $X_i = X_{\sigma_i}$ avec :

$$X_1 = \text{Spec } \mathbb{C}[X, Y]$$

$$X_2 = \text{Spec } \mathbb{C}[XY, X^{-1}]$$

$$X_3 = \text{Spec } \mathbb{C}[XY, Y^{-1}] .$$

On retrouve la description standard du plan projectif.

On se contentera d'étudier les éventails $\{\sigma_{\alpha}\}$ de \mathbb{R}^2 qui sont tels que la variété $X_{\{\sigma_{\alpha}\}}$ soit propre et lisse. Ceci signifie

- $\bigcup \sigma_{\alpha} = \mathbb{R}^2$;

- chaque σ_{α} est du type $\mathbb{R}_+ x + \mathbb{R}_+ y$, où (x, y) est une base de \mathbb{Z}^2 .

On peut donc indexer les σ par \mathbb{Z}/m , pour un entier $m \geq 3$ et trouver des $y_i \in \mathbb{Z}^2$

(pour $i \in \mathbb{Z}/m$) de sorte que :

- pour $i \in \mathbb{Z}/m$, on a : $\sigma_i = \mathbf{R}_+ y_{i-1} + \mathbf{R}_+ y_i$;
- (y_{i-1}, y_i) est une base de \mathbb{Z}^2 ;
- on a : $\mathbf{R}_+ y_i = \sigma_i \cap \sigma_{i+1}$.

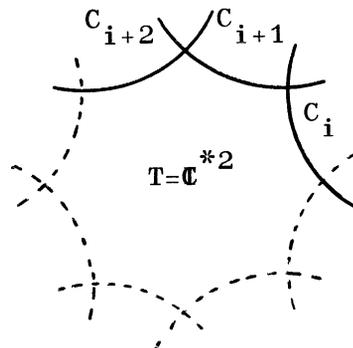
On ne perd rien à supposer que (y_0, y_1) est la base standard de \mathbb{Z}^2 . Pour tout i , on peut écrire

$$\begin{pmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{i-1} \\ y_i \end{pmatrix}$$

ce qui montre que l'éventail est décrit par la famille des $a_i \in \mathbb{Z}$ assujettis à la condition :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} = \text{Id} .$$

Alors $X_{\{\sigma_i\}} - T$ est l'union d'orbites de dimension 1, soit $C_i^0 = \mathbb{O}(\mathbf{R}_+ y_i)$, et d'orbites de dimension 0. Les adhérences C_i des C_i^0 sont des droites projectives; C_i et C_{i+1} se coupent transversalement en l'orbite $\mathbb{O}(\mathbf{R}_+ y_i + \mathbf{R}_+ y_{i+1})$ de dimension 0, et C_i et C_j ne se coupent pas si i et j ne sont pas consécutifs. D'où la figure

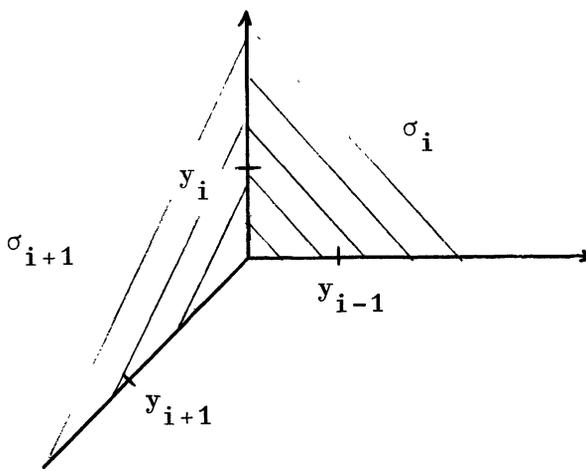


Proposition : $a_i = (C_i \cdot C_i)$, self-intersection de C_i dans la surface lisse $X = X_{\{\sigma_i\}}$.

Démonstration : On peut supposer que (y_{i-1}, y_i) est égal à (e_1, e_2) , base standard de \mathbb{Z}^2 . Alors on a : $y_{i+1} = -e_1 - a_i e_2$. On a :

$$X_{\sigma_i} = \text{Spec } k[X, Y]$$

$$X_{\sigma_{i+1}} = \text{Spec } k[X^{-1}, X^{-a_i} Y] \quad .$$



Déterminons dans ces deux ouverts l'idéal \mathfrak{J} de la courbe C_i :

dans X_{σ_i} , on a $\mathfrak{J}|_{X_{\sigma_i}} = (Y)$;

dans $X_{\sigma_{i+1}}$, on a $\mathfrak{J}|_{X_{\sigma_{i+1}}} = (X^{-a_i} Y)$.

La courbe C_i est recouverte par deux cartes affines

$$U_1 = C_i \cap X_{\sigma_i} = \text{Spec } k[X]$$

$$U_2 = C_i \cap X_{\sigma_{i+1}} = \text{Spec } k[X^{-1}] \quad .$$

L'idéal $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est engendré par Y dans la première carte, et par $X^{-a_i} Y$ dans la deuxième. Il est donc représenté comme faisceau inversible sur C_i , par le 1-cocycle à valeurs dans $\mathcal{O}_{C_i}^*$ qui vaut X^{-a_i} sur $U_1 \cap U_2$; on a donc :

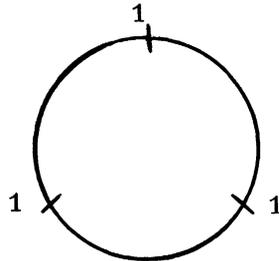
$c_1(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) = -a_i$. Or $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est le dual du faisceau normal \mathfrak{N} à C_i dans X . On a alors :

$$(C_i \cdot C_i) = c_1(\mathfrak{N}) = -c_1(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) = a_i \quad . \quad \blacksquare$$

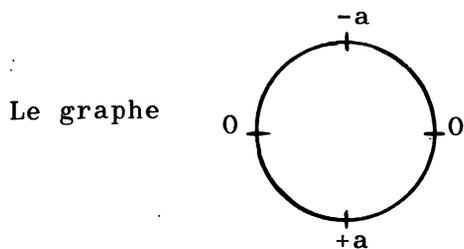
A une famille $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}/m}$ comme plus haut, on associe un graphe pondéré à m sommets et m arêtes :

- les sommets correspondant aux courbes C_i et affectés du poids a_i ;
- les arêtes correspondant aux points $C_i \cap C_{i+1}$ joignant les sommets correspondant à C_i et à C_{i+1} .

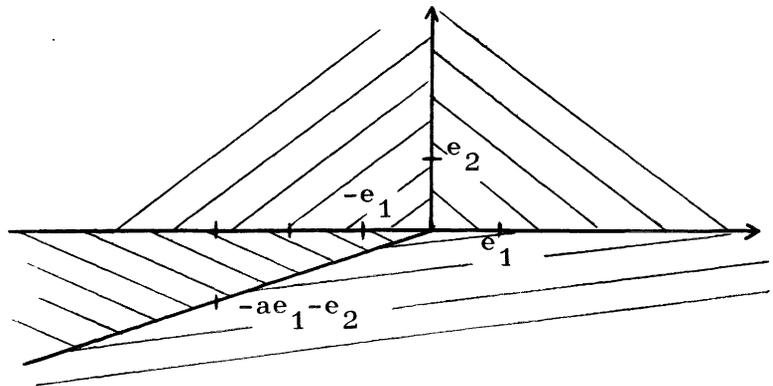
Voici, par exemple, le graphe correspondant à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$:



Voici un autre exemple.



correspond à l'éventail



et on vérifie que la variété torique correspondante n'est autre que $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a))$, le fibré en droites projectives sur \mathbb{P}^1 obtenu en compactifiant fibre par fibre l'espace total du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$.

Espaces projectifs (tordus).

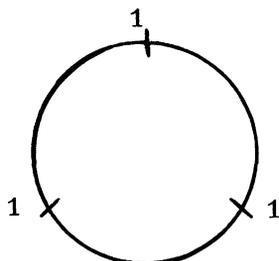
Rappelons que $\mathbb{P}_k^n = \text{Proj } k[X_0, \dots, X_n]$ est recouvert par les ouverts $U_i = U_{X_i} = \{x \in \mathbb{P}_k^n \text{ tq } X_i(x) \neq 0\}$. On a donc :

$$U_i = \text{Spec} \left[\frac{X_0}{X_i}, \frac{X_1}{X_i}, \dots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right] .$$

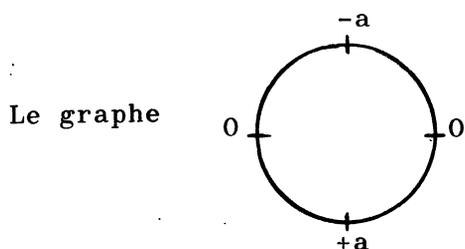
A une famille $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}/m}$ comme plus haut, on associe un graphe pondéré à m sommets et m arêtes :

- les sommets correspondant aux courbes C_i et affectés du poids a_i ;
- les arêtes correspondant aux points $C_i \cap C_{i+1}$ joignant les sommets correspondant à C_i et à C_{i+1} .

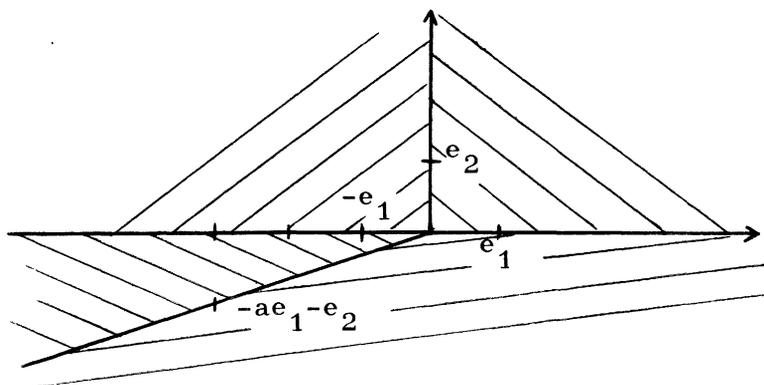
Voici, par exemple, le graphe correspondant à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$:



Voici un autre exemple.



correspond à l'éventail



et on vérifie que la variété torique correspondante n'est autre que $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a))$, le fibré en droites projectives sur \mathbb{P}^1 obtenu en compactifiant fibre par fibre l'espace total du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$.

Espaces projectifs (tordus).

Rappelons que $\mathbb{P}^n_k = \text{Proj } k[X_0, \dots, X_n]$ est recouvert par les ouverts $U_i = U_{X_i} = \{x \in \mathbb{P}^n_k \text{ tq } X_i(x) \neq 0\}$. On a donc :

$$U_i = \text{Spec} \left[\frac{X_0}{X_i}, \frac{X_1}{X_i}, \dots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right] .$$

$X = X_{\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}}$, où $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est un éventail de $N_{\mathbf{R}}$. Pour chaque α , on sait que la flèche $\pi_1(T, 1) \rightarrow \pi_1(X_{\sigma_\alpha}, 1)$ est surjective, de noyau $L(\sigma_\alpha) \cap N$, où $L(\sigma_\alpha)$ est l'espace vectoriel engendré par σ_α dans $N_{\mathbf{R}}$. Le recouvrement ouvert $\{X_{\sigma_\alpha}\}$ de X est fini stable par intersections ; le théorème de Van Kampen dit que $\pi_1(X, 1)$ est le quotient du produit libre des $\pi_1(X_{\sigma_\alpha}, 1)$ pour $\alpha \in A$, par les identifications déduites des flèches $\pi_1(X_{\sigma_\beta}, 1) \rightarrow \pi_1(X_{\sigma_\alpha}, 1)$ pour σ_β de σ_α . Il s'ensuit que la flèche $\pi_1(T, 1) \rightarrow \pi_1(X, 1)$ est surjective, et que son noyau est $L(U_{\sigma_\alpha}) \cap N$, où $L(U_{\sigma_\alpha})$ est le sous-espace vectoriel de $N_{\mathbf{R}}$ engendré par $\bigcup_{\alpha \in A} \sigma_\alpha$. En particulier, si X est complète, i.e. si $\bigcup_{\alpha \in A} \sigma_\alpha = N_{\mathbf{R}}$, X est simplement connexe.

Pour calculer la cohomologie entière de X , soient $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ les éléments de A tels que les faces σ_{α_i} soient maximales dans l'éventail $\{\sigma_\alpha\}$. On pose pour simplifier : $\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$. Les X_{σ_i} forment un recouvrement ouvert de X , d'où une suite spectrale de type cohomologique

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq \ell} H^q(X_{\sigma_{i_1}} \cap \dots \cap X_{\sigma_{i_p}}, \mathbb{Z})$$

$$\Downarrow$$

$$H^{p+q-1}(X, \mathbb{Z})$$

Avec les notations du § 1, on a : $H^q(X_{\sigma_{i_1}} \cap \dots \cap X_{\sigma_{i_p}}, \mathbb{Z}) = \Lambda^q(V(\sigma_{i_1} \cap \dots \cap \sigma_{i_p}))$.

Comme application de cette suite spectrale, calculons $\chi(X)$

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n \dim H^n(X, \mathbb{Z}) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q-1} \dim(E_1^{p,q})$$

$$\text{d'où } \chi(X) = \sum_p (-1)^{p-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq \ell} \left(\sum_q (-1)^q \dim \Lambda^q(V(\sigma_{i_1} \cap \dots \cap \sigma_{i_p})) \right)$$

Or pour W un \mathbb{Z} -module libre, $\sum_q (-1)^q \dim \Lambda^q(W)$ est nul si $W \neq 0$ et vaut 1 si $W = 0$. Or $V(\sigma_{i_1} \cap \dots \cap \sigma_{i_p}) = 0$ ssi $\sigma_{i_1} \cap \dots \cap \sigma_{i_p}$ engendre $N_{\mathbf{R}}$ comme espace vectoriel, donc ssi $p = 1$. On trouve donc : $\chi(X) = \ell$; ce résultat se déduit d'ailleurs du fait que les σ_i ($1 \leq i \leq \ell$) sont les points de X invariants par T , donc par un groupe à un paramètre bien choisi du groupe de Lie T .

On peut utiliser la suite spectrale pour montrer que la flèche

$\text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ est surjective lorsque les σ_i sont de dimension n (donc en particulier, lorsque $\{\sigma_\alpha\}$ est un éventail complet). Notons d'abord que ceci entraîne $V(\sigma_i) = 0$ et $H^q(X_{\sigma_{\alpha_i}}) = 0$ pour $q \geq 1$, d'où $E_1^{1,q} = 0$ pour $q \geq 1$. On a

donc une suite exacte :

$$0 \longrightarrow E_\infty^{3,0} \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow E_\infty^{2,1} \longrightarrow 0 .$$

Par ailleurs, montrons que $E_2^{3,0} = 0$. En effet $E_2^{p,0}$, pour $p \geq 1$ est un groupe de cohomologie de la suite :

$$E_1^{p-1,0} \xrightarrow{d_1} E_1^{p,0} \xrightarrow{d_1} E_1^{p+1,0} .$$

Or on a : $E_1^{p,0} = \Lambda^p(\mathbb{Z}^\ell)$, et d_1 est la différentielle extérieure, d'où $E_2^{p,0} = 0$ pour $p \geq 1$.

On a donc : $H^2(X, \mathbb{Z}) \cong E_\infty^{2,1}$. Il est clair que $E_\infty^{2,1} = E_2^{2,1}$. Comme $E_1^{1,1} = 0$, on a : $E_2^{2,1} = \ker(d_1 : E_1^{2,1} \rightarrow E_1^{3,1})$. On a : $E_1^{2,1} = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq \ell} V(\sigma_{i_1} \cap \sigma_j)$.

Un élément $(x_{i,j} \in V(\sigma_i \cap \sigma_j))_{1 \leq i < j \leq \ell}$ est dans $\ker d_1$ ssi $x_{i,j} + x_{j,k} = x_{i,k}$ pour $1 \leq i < j < k \leq \ell$.

Or, remarquons que pour $r \in M$, \underline{X}^r est inversible sur $X_{\sigma_i} \cap X_{\sigma_j}$ ssi $r \in V(\sigma_i \cap \sigma_j)$; il en résulte que la famille $(\underline{X}^{x_{i,j}} \in \Gamma \subset (X_{\sigma_i} \cap X_{\sigma_j}, \mathcal{O}_X^*))$ est un 1-cocycle du recouvrement de Zariski $\{X_{\sigma_i}\}$ à valeurs dans \mathcal{O}_X^* ; ce 1-cocycle représente un faisceau inversible \mathcal{L} sur X , et on laisse au lecteur le soin de ne pas vérifier que $c_1(\mathcal{L})$ correspond à $(x_{i,j})$ par l'isomorphisme entre $H^2(X, \mathbb{Z})$ et $E_2^{2,1}$.

Ceci montre que la flèche $\text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ est surjective. De plus, le faisceau \mathcal{L} est par construction T-linéarisé, donc la flèche $\text{Pic}_T(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ est également surjective.

Dans le cas général, où les σ_i ne sont plus supposés être de dimension n , je conjecture que $\text{Pic}_T(X)$ et $\text{Pic}(X)$ ont même image dans $H^2(H, \mathbb{Z})$. Je conseille de comparer ceci à la démonstration du Théorème 12 et à la remarque qui la suit.

Nous passons à la description des faisceaux cohérents d'idéaux fractionnaires, T-linéarisés, sur une variété $X_{\{\sigma_\alpha\}}$ associée à un éventail $\{\sigma_\alpha\}$ de $N_{\mathbf{R}}$.

Soit $T \xrightarrow{i} X$ l'inclusion canonique, où $X = X_{\{\sigma_\alpha\}}$. L'image directe $i_*(\mathcal{O}_T)$ est un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent contenu dans le faisceau constant $K(X)$ des fonctions rationnelles sur X (c'est en effet la réunion de ses sous-Modules cohérents). De plus $i_*(\mathcal{O}_T)$ est muni d'une action naturelle de T .

Soit donc \mathfrak{F} un sous- \mathcal{O}_X -Module de $i_*(\mathcal{O}_T)$, invariant sous T , qu'on supposera trivial sur T , comme l'action simplement transitive de T sur lui-même le permet. On lui associe une fonction $\text{ord } \mathfrak{F} : \cup \sigma_\alpha \rightarrow \mathbf{R}$ de la façon suivante.

Fixons-nous un σ_α et soit $a \in N \cap \sigma_\alpha$, et $\lambda_a : \text{Spec } k[X] \rightarrow X_{\sigma_\alpha}$ l'extension du groupe à 1-paramètre λ_a fournie par le Théorème 1. L'image réciproque $\lambda_a^* \mathfrak{F}$ est un faisceau d'idéaux fractionnaires sur $k[X]$; soit $\text{ord } \mathfrak{F}(a)$ la valuation en 0 de ce faisceau.

Calculons explicitement $\text{ord } \mathfrak{F}(a)$; remarquons que la restriction de \mathfrak{F} à X_{σ_α} est un faisceau du type \tilde{J}_α , où J_α est un module M -gradué, de type fini sur l'anneau $R_\alpha = \text{Spec } k[\bigvee \sigma_\alpha \cap M]$. On peut donc écrire : $J_\alpha = \sum_{i=1}^N R_\alpha \cdot \underline{X}^i$ où les r_i sont dans M . Par conséquent $\lambda_a^* \tilde{J}_\alpha$ est défini par le $k[X]$ -module $\sum_i k[X] \cdot X^{\langle r_i, a \rangle}$. D'où la formule :

$$\text{ord } \mathfrak{F}(a) = \inf_{1 \leq i \leq N} \langle r_i, a \rangle ,$$

qui permet d'étendre $\text{ord } \mathfrak{F}$ à σ_α . Il est clair que $\text{ord } \mathfrak{F}$ est ainsi bien définie sur $\cup \sigma_\alpha$, et ne dépend que du faisceau \mathfrak{F} . Elle a les propriétés suivantes :

- (i) $\text{ord } \mathfrak{F}(\lambda x) = \lambda \cdot \text{ord } \mathfrak{F}(x)$ pour $\lambda \in \mathbf{R}^+$;
- (ii) $\text{ord } \mathfrak{F}$ est continue et linéaire par morceaux ;
- (iii) $\text{ord } \mathfrak{F}(N \cap (\cup \sigma_\alpha)) \subset \mathbf{Z}$;
- (iv) $\text{ord } \mathfrak{F}$ est convexe sur chaque σ_α .

Inversement, soit $f : \cup \sigma_\alpha \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction satisfaisant ces conditions, et pour chaque α considérons le $\Gamma(\mathcal{O}_{X_{\sigma_\alpha}})$ -module gradué

$$(J_f)_\alpha = \bigoplus_{\substack{r \in M \\ r \geq f \text{ sur } \sigma_\alpha}} k \cdot \underline{X}^r .$$

Nous atteignons maintenant le

Théorème 9 : I. Soit f une fonction satisfaisant les conditions (i), (ii), (iii), (iv). Alors les $(\tilde{J}_f)_\alpha$ se recollent en un faisceau cohérent, T -invariant, d'idéaux fractionnaires, soit \mathfrak{F}_f . De plus, \mathfrak{F}_f est un faisceau d'idéaux complet au sens de Zariski.

II. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (a) $\text{ord}(\mathfrak{F}_f) = f$;
- (b) $\mathfrak{F}_{\text{ord } \mathfrak{F}}$ est la clôture intégrale de \mathfrak{F} ;
- (c) les applications : $\mathfrak{F} \mapsto \text{ord } \mathfrak{F}$ et $f \mapsto \mathfrak{F}_f$ sont deux bijections réciproques entre l'ensemble des sous- \mathcal{O}_X -Modules cohérents de $i_*(\mathcal{O}_T)$, invariants sous T et complets ;
- (d) on a $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_f$ ssi $(\text{ord } \mathfrak{F} \geq f)$;
- (e) $\text{ord}(\mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{F}_2) = \text{ord}(\mathfrak{F}_1) + \text{ord}(\mathfrak{F}_2)$;
- (f) $\mathfrak{F}/X_{\sigma_\alpha} = \mathcal{O}_{X_{\sigma_\alpha}}$ ssi $\text{ord } \mathfrak{F} = 0$ sur σ_α ;
- (g) \mathfrak{F}_{f_1} et \mathfrak{F}_{f_2} sont isomorphes comme \mathcal{O}_X -Modules ssi $f_1 - f_2$ est linéaire sur \bigcup_{σ_α} .

III. (a) $\mathfrak{F}^{-1} = \mathfrak{F}_g$, où g est l'interpolation convexe de la fonction convexe $-\text{ord}(\mathfrak{F})$ sur $\bigcup_{\sigma_\alpha} \text{Sk}^1(\sigma_\alpha)$, le squelette d'ordre 1 de l'éventail \bigcup_{σ_α} .

(b) $(\mathfrak{F}^{-1})^{-1} = \mathfrak{F}$ ssi \mathfrak{F} est complet et si $\text{ord } \mathfrak{F}$ est l'interpolation convexe d'une fonction $\bigcup_{\sigma_\alpha} \text{Sk}^1(\sigma_\alpha) \rightarrow \mathbb{Z}$;

(c) \mathfrak{F} est inversible ssi $\text{ord } \mathfrak{F}$ est linéaire sur chaque σ_α ; les diviseurs de Weil correspondent bijectivement aux fonctions $\bigcup_{\sigma_\alpha} \text{Sk}^1(\sigma_\alpha) \rightarrow \mathbb{Z}$;

(d) le bidual $\check{\bigvee}_X^n$ du faisceau canonique Ω_X^n est isomorphe à \mathfrak{F}_k , où k est l'interpolation convexe de la fonction constante de valeur -1 sur $\bigcup_{\sigma_\alpha} \text{Sk}^1(\sigma_\alpha)$.

Remarque : On note qu'ici une fonction d'un cône convexe de $N_{\mathbf{R}}$ à valeurs dans \mathbf{R} est convexe ssi $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$.

Si σ est un cône polyédral de $N_{\mathbf{R}}$, alors $\text{Sk}^1(\sigma)$ est l'ensemble des vecteurs primitifs de ses faces de dimension 1. Si $h: \text{Sk}^1(\sigma) \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction, son interpolation convexe à σ est la plus petite fonction convexe $\tilde{h}: \sigma \rightarrow \mathbf{R}$ qui soit $\geq h$ sur $\text{Sk}^1(\sigma)$; on a donc :

$$\tilde{h}(x) = \inf_{\substack{\ell \in \mathbf{M} \\ \ell \geq h \text{ sur } \text{Sk}^1(\sigma)}} \ell(x) .$$

L'interpolation convexe à $\cup \sigma_\alpha$ d'une fonction sur $\cup \text{Sk}^1(\sigma_\alpha)$ se fait séparément sur chaque σ_α .

Démonstration du Théorème 9 :

I. Soit f une fonction : $\cup \sigma_\alpha \rightarrow \mathbf{R}$ comme dans l'énoncé ; pour tout α , d'après (ii) et (iv), on peut trouver une famille finie r_i ($1 \leq i \leq k$) d'éléments de \mathbf{M} telle que $f(x) = \inf_{1 \leq i \leq k} \langle r_i, x \rangle$ pour $x \in \sigma_\alpha$. On a donc :

$$(J_f)_\alpha = \bigoplus_{\substack{r \geq \inf(r_i) \\ \text{sur } \sigma_\alpha}} k \cdot X^r .$$

On va montrer que $(J_f)_\alpha$ est la fermeture intégrale de l'idéal fractionnaire

$\bigoplus_{1 \leq i \leq k} \underline{X}^{r_i} \cdot R_\alpha$. Soit $\tau_i = \{x \in \sigma_\alpha \text{ tq } f(x) = r_i(x)\}$. Il est clair que τ_i est un cône polyédral, et que $\cup \tau_\alpha = \sigma_\alpha$. D'après le Théorème 7, on a un morphisme

$X_{\{\tau_i\}} \rightarrow X_{\sigma_\alpha}$; par les Théorèmes 7 et 8, ce morphisme est propre et surjectif.

pour $r \in \mathbf{M}$, \underline{X}^r est entier sur $\bigoplus \underline{X}^{r_i} \cdot R_\alpha$ ssi le même énoncé est vrai sur $X_{\{\tau_i\}}$, i.e. ssi, sur chaque X_{τ_i} , \underline{X}^r est entier sur l'idéal fractionnaire engendré par les \underline{X}^{r_j} ($1 \leq j \leq k$). Mais sur σ_i , on a : $r_i \leq r_j$ pour $1 \leq j \leq k$, donc $\underline{X}^{r_j - r_i}$ est holomorphe sur X_{σ_i} , et l'idéal fractionnaire (\underline{X}^{r_j}) est engendré par \underline{X}^{r_i} ; donc sur X_{σ_i} , on a : \underline{X}^r est entier sur (\underline{X}^{r_j}) ssi $\underline{X}^{r - r_i}$ est holomorphe, i.e. ssi $r(x) \geq r_i(x)$ pour $x \in \sigma_i$. On voit donc que \underline{X}^r est entier sur $\bigoplus_{1 \leq i \leq k} \underline{X}^{r_i} \cdot R_\alpha$, ssi $r(x) \geq f(x)$ pour $x \in \sigma_\alpha$, d'où notre assertion.

Si σ_β est une face de σ_α , on a alors : $(J_f)_\beta = \Gamma(X_{\sigma_\beta}, (\tilde{J}_f)_\alpha)$ puisque la clôture intégrale d'un faisceau cohérent d'idéaux fractionnaires sur X_{σ_α} (à savoir l'idéal engendré par les \underline{X}^{r_i}) est un faisceau cohérent d'idéaux fractionnaires. Les recollement des $(\tilde{J}_f)_\alpha$ est donc possible.

II. Est complètement trivial.

III. (a) Soit $r \in \mathbf{M}$; on a : $\underline{X}^r \in \mathfrak{F}^{-1}|_{X_{\sigma_\alpha}}$ ssi $\underline{X}^r \cdot \mathfrak{F}|_{X_{\sigma_\alpha}} \subset \mathcal{O}_{X_{\sigma_\alpha}}$. D'après II,

(d), ceci équivaut à $r \geq -\text{ord } \mathfrak{F}$ sur σ_α , donc à $r \geq g$, où g est l'interpolation convexe de $-\text{ord } \mathfrak{F}$ sur σ_α .

(b) est une conséquence triviale de (a).

(c) On a une base du groupe des diviseurs de Weil T-invariants formée des $\overline{\mathcal{O}}_x$, pour $x \in \cup \text{Sk}^1(\sigma_\alpha)$, puisque X est normale. Sur chaque σ , le faisceau

d'idéaux de $\overline{\mathfrak{O}}_x$ contient tous les \underline{X}^r tels que $\langle r, x \rangle > 0$; l'ordre de ce diviseur est donc l'interpolation convexe d'une fonction de Dirac-Kronecker sur $\cup_{\alpha} \text{Sk}^1(\sigma_{\alpha})$.

(d) Comme X est normale, Si X_{reg} est l'ouvert régulier de X , et $j: X_{\text{reg}} \rightarrow X$, on a : $\widehat{\Omega}_X^n = j_*(\Omega_{X_{\text{reg}}}^n)$. Il suffit de montrer que la forme holomorphe ω de Haar sur T a un pôle d'ordre 1 le long de chaque $\overline{\mathfrak{O}}^x$, pour $x \in \text{Sk}^1(\sigma_{\alpha})$. Or on a : $X_{\sigma_{\alpha}} = \text{Spec}(k[\check{\sigma}_{\alpha} \cap M])$, l'idéal de $\overline{\mathfrak{O}}^x$ est $I^x = k[\tau]$, où $\tau = \{r \in \check{\sigma}_{\alpha} \cap M \text{ tq } \langle r, x \rangle > 0\}$. Il existe $r \in \tau$ tel que $\langle r, x \rangle = 1$, cet r est une uniformisante de l'anneau local de $X_{\sigma_{\alpha}}$ en $\overline{\mathfrak{O}}^x$. Complétons r en une base $(r = r_1, r_2, \dots, r_n)$ de M telle que $\langle r_i, x \rangle = 0$, pour $i = 2, \dots, n$. Alors ω est un multiple constant de $\frac{d\underline{X}^r}{\underline{X}^r} \wedge \frac{d\underline{X}^{r_2}}{\underline{X}^{r_2}} \wedge \dots \wedge \frac{d\underline{X}^{r_n}}{\underline{X}^{r_n}}$. Or les \underline{X}^{r_i} forment un système de coordonnées locales au voisinage d'un point général de $\overline{\mathfrak{O}}^x$, d'où le résultat. ■

Théorème 10 : Soit $X = X_{\{\sigma_{\alpha}\}}$, soit \mathfrak{F} un faisceau cohérent d'idéaux fractionnaires T -invariant sur X . Soit $B_{\mathfrak{F}}(X)$ l'éclatement normalisé de \mathfrak{F} . Alors $B_{\mathfrak{F}}(X)$ est une T -variété décrite par la subdivision de $\{\sigma_{\alpha}\}$ en les plus grands cônes polyédraux où la fonction $\text{ord}(\mathfrak{F})$ est linéaire.

Démonstration : Comme \mathfrak{F} est T -invariant, il est clair que T agit sur le diagramme $B_{\mathfrak{F}}(X) \rightarrow X$. Comme \mathfrak{F} est inversible sur l'ouvert T de X , on voit que l'éclatement normalisé est un isomorphisme au-dessus de T , de sorte que l'on a une immersion équivariante $T \hookrightarrow B_{\mathfrak{F}}(X)$. On note que pour un cône polyédral $\tau \subset U_{\sigma_{\alpha}}$, l'image réciproque de \mathfrak{F} sur X_{τ} est un faisceau inversible ssi $\text{ord}(\mathfrak{F})$ est linéaire sur τ , d'après le Théorème 9, III, (c). On conclut en utilisant la propriété universelle d'un éclatement normalisé.

Théorème 11 : Soit $X = X_{\{\sigma_{\alpha}\}}$; il existe un faisceau cohérent T -invariant \mathfrak{F} d'idéaux fractionnaires sur X tel que $B_{\mathfrak{F}}(X)$ soit lisse.

Démonstration : On rappelle qu'un simplexe de $N_{\mathbb{R}}$ est un cône polyédral du type $\sigma = \{\sum \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0\}$ où les $x_i \in N$ sont linéairement indépendants dans N . La multiplicité d'un simplexe σ est l'indice du groupe $\sum \mathbb{Z} \cdot x_i$ dans $(\sum \mathbb{R} \cdot x_i) \cap N$. Un simplexe σ est de multiplicité 1 ssi $\{x_i\}$ fait partie d'une base de N , i.e. ssi la variété X_{σ} est lisse (Théorème 4).

On doit trouver une fonction $f: U\sigma_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant (i), (ii), (iii), (iv) telle que les polyèdres associés à f (i.e. les plus grands polyèdres où f

est linéaire) soient des simplexes de multiplicité 1 ; notons qu'on peut assouplir la condition (iii) en la remplaçant par : $\text{ord } \mathfrak{F}(N \cap (\cup \sigma_\alpha)) \subset \mathbb{Q}$.

On raisonnera par induction sur le nombre de σ_α (en partant de 0). Soit donc σ_{α_0} un cône polyédral de dimension maximale; et supposons donnée sur $\cup_{\alpha \neq \alpha_0} \sigma_{\alpha_0}$ une fonction f_0 satisfaisant les conditions requises ; le lemme qui suit permet de trouver sur $\cup \sigma_\alpha$ une fonction f qui satisfait aux conditions (i)-(iv), et dont les polyèdres associés soient des simplexes.

Lemme 1 : Soit σ un cône polyédral, soit f_0 une fonction sur $\partial\sigma$, linéaire par morceaux et convexe sur chaque face de $\partial\sigma$, et soit $x_0 \in N \cap \text{int}(\sigma)$; définissons sur σ une fonction f par :

$$f(\alpha x_0 + \beta y) = \alpha C + \beta f_0(y) \quad \text{pour } y \in \partial\sigma, \alpha, \beta \geq 0,$$

où C est une constante rationnelle.

Si C est assez grand, la fonction f est convexe et ses polyèdres associés sont de la forme $\langle \tau, x_0 \rangle$, où les τ sont les polyèdres τ de $\partial\sigma$ associés à f_0 .

Démonstration : Soit $\{\tau_i\}$ la famille des cônes polyédraux de $\partial\sigma$ associés à f_0 , soit $\{\tau'_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une subdivision finie telle que pour tous $\alpha, \beta \in A$, il existe $i \in I$ tel que $\tau'_\alpha + \tau'_\beta \subset \tau_i + \mathbf{R}_+ x_0$.

Pour $x \in \tau'_\alpha$ et $y \in \tau'_\beta$, on a : $x + y = \lambda(x, y) \cdot x_0 + z(x, y)$ où $\lambda(x, y) \in \mathbf{R}_+$ et $z(x, y) \in \tau_i$. Il est clair que $\lambda(x, y)$ et $z(x, y)$ sont linéaires en le couple (x, y) .

On voit que :

$$\begin{aligned} f(x + y + (\alpha + \beta)x_0) - f(x + \alpha x_0) - f(y + \beta x_0) \\ = C \cdot \lambda(x, y) + f_0(z) - f_0(x) - f_0(y) \end{aligned}$$

On prétend qu'il existe $K \geq 0$ tel que :

$$K\lambda(x, y) \geq f_0(x) + f_0(y) - f_0(z(x, y))$$

En effet, chaque membre est linéaire en le couple $(x, y) \in \tau'_\alpha \times \tau'_\beta$. La forme linéaire $\lambda(x, y)$ est ≥ 0 . Si $\lambda(x, y) = 0$, alors $x + y \in \tau_i \subset \partial\sigma$. Mais alors $z(x, y) = x + y$ et la forme linéaire de droite est ≤ 0 , d'où l'existence de K .

Si C est supérieur à toutes ces constantes $K(\tau'_\alpha, \tau'_\beta)$, alors f est convexe. Si C est supérieur au double de toutes ces constantes, montrons que

les polyèdres associés à f sont du type $\langle \tau_i, x_0 \rangle$.

Tout d'abord, il est clair que f est linéaire sur chaque $\langle \tau_i, x_0 \rangle$.
Supposons qu'il existe $x \in \tau_i, y \in \tau_j, \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$ tels que

$$f(x + y + (\alpha + \beta)x_0) = f(x + \alpha x_0) + f(y + \beta x_0) \quad .$$

On suppose $x \in \tau'_\alpha, y \in \tau'_\beta$ comme avant.

Par hypothèse, on a : $C \cdot \lambda(x, y) = -f_0(z(x, y)) + f_0(x) + f_0(y)$

$$C \cdot \lambda(x, y) = -f_0(z(x, y)) + f_0(x) + f_0(y) \leq \frac{C}{2} \cdot \lambda(x, y) \quad .$$

On en déduit $\lambda(x, y) = 0$ et $f_0(x + y) = f_0(x) + f_0(y)$, mais ceci n'est possible que si τ'_α et τ'_β sont dans un même τ_i . ■

L'application répétée du Lemme 1 permet de trouver des fonctions f sur $\cup_\alpha \sigma_\alpha$, satisfaisant les conditions (i)-(iv), telles que les polyèdres associés à f soient des simplexes ; pour une telle fonction f , on pose :

$$\text{mult}(f) = \sup_{\tau \text{ associé à } f} \text{mult}(\tau) \quad .$$

On peut trouver un tel f tel que $\text{mult}(f) = 1$.

Lemme 2 : Soit f une fonction positive, convexe, rationnelle, linéaire par morceaux, sur un cône polyédral σ , et soit $\{\tau_i\}$ ses polyèdres associés. Soit $x_0 \in N \cap \sigma$, et soit T l'éventail consistant en - les faces τ_i qui ne contiennent pas x_0 ;

- les cônes polyédraux du type $\langle \tau_i, x_0 \rangle$ si τ_i ne contient pas x_0 , mais est face d'un τ_j qui contient x_0 .

Alors

(i) T est un éventail qui raffine $\{\sigma\}$;

(ii) pour $\varepsilon \in \mathbf{Q}^+$, soit $f_{x_0, \varepsilon}$ la fonction sur σ qui vaut

- f sur une face τ_i telle que

$x_0 \notin \tau_i$;

- $f + \varepsilon g$ sur $\langle \tau_i, x_0 \rangle$, où g est une

forme linéaire telle que $g(x_0) = 1$ et $g/\tau_i = 0$.

Alors, pour ε assez petit, $f_{x_0, \varepsilon}$ est une fonction convexe rationnelle sur σ ,

dont les polyèdres associés sont les éléments de T .

Démonstration : (i) Soit τ_0 l'unique polyèdre associé à f qui contient x_0 dans son intérieur ; alors T s'obtient par une subdivision barycentrique de τ_0 .

(ii) On dit qu'un cône polyédral est du type 1 si τ_i est un polyèdre maximal parmi ceux associés à f , et si τ_i ne contient pas x_0 . On dit que τ_i est du type 2 si τ_i ne contient pas x_0 , et est une face de codimension 1 d'un polyèdre maximal τ_j qui contient x_0 .

Il est clair que les τ_i de type 1 et les $\langle \tau_j, x_0 \rangle$, pour τ_j de type 2, sont les éléments maximaux de T . Il est clair aussi que $f_{x_0, \varepsilon}$ est linéaire sur chaque τ_i pour τ_i du type 1 et sur chaque $\langle \tau_j, x_0 \rangle$, pour τ_j du type 2.

On se donne une subdivision finie $\{\tau'_\alpha\}$ de $\{\tau_i\}$ telle que si $\tau'_\alpha \subset \tau_i$ et $\tau'_\beta \subset \tau_j$, et si l'un des deux polyèdres τ_i ou τ_j est du type 2, alors il existe un polyèdre τ_k du type 1 ou du type 2 tel que $\tau'_\alpha + \tau'_\beta \subset \langle \tau_k, x_0 \rangle$.

On partagera l'étude en cinq cas :

1er cas : τ_i et τ_j sont du type 1.

Alors τ_i et τ_j sont des éléments de T . Si donc $x \in \tau_i$ et $y \in \tau_j$, on a :

$f_{x_0, \varepsilon}(x) = f(x)$ et $f_{x_0, \varepsilon}(y) = f(y)$ par définition et par construction :

$f_{x_0, \varepsilon}(x+y) \geq f(x+y) \geq f(x) + f(y)$. L'égalité n'est possible que si x ou y est dans $\tau_i \cap \tau_j$.

2nd cas : τ_i est du type 1, τ_j et τ_k sont du type 2.

Pour $x \in \tau'_\alpha$ et $y \in \tau'_\beta$, on a : $x+y = \lambda(x,y) \cdot x_0 + z(x,y)$, où $\lambda(x,y) \in \mathbb{R}_+$, $z(x,y) \in \tau_k$; et λ et z sont linéaires en le couple (x,y) . On a :

$$f_{x_0, \varepsilon}(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f_{x_0, \varepsilon}(y + \xi x_0) = \varepsilon \xi + f(y + \xi x_0)$$

Par ailleurs : $f_{x_0, \varepsilon}(x+y + \xi x_0) = \varepsilon(\xi + \lambda(x,y)) + f(x+y + \xi x_0)$.

On a donc :

$$\begin{aligned} & f_{x_0, \varepsilon}(x+y + \xi x_0) - f_{x_0, \varepsilon}(x) - f_{x_0, \varepsilon}(y + \xi x_0) \\ &= \varepsilon \lambda(x,y) + f(x+y + \xi x_0) - f(x) - f(y + \xi x_0) \end{aligned}$$

On a toujours : $\lambda(x,y) \geq 0$ et $f(x+y + \xi x_0) \geq f(x) + f(y + \xi x_0)$.

Si l'expression plus haut est nulle, on a : $\lambda(x,y) = 0$ (puisque $\varepsilon > 0$) et $f(x+y + \xi x_0) = f(x) + f(y + \xi x_0)$. Comme τ_i et $\langle \tau_j, x_0 \rangle$ sont dans deux polyèdres associés à f , on en déduit que $y \in \tau_i$ ou $x \in \langle \tau_j, x_0 \rangle$.

3ème cas : τ_i est du type 1, τ_j est du type 2, τ_k est du type 1.

Pour $(x,y) \in \tau'_\alpha \times \tau'_\beta$, on a alors :

$$f_{x_0, \varepsilon}(x+y + \xi x_0) = f(x+y + \xi x_0)$$

donc :

$$f_{x_0, \varepsilon}(x + y + \xi x_0) - f_{x_0, \varepsilon}(x) - f_{x_0, \varepsilon}(y + \xi x_0)$$

$$= f(x + y + \xi x_0) - f(x) - f(y + \xi x_0) - \varepsilon \xi .$$

On remarque que $(x, y, \xi) \mapsto f(x + y + \xi x_0) - f(x) - f(y + \xi x_0)$ est ≥ 0 et linéaire en le triple (x, y, ξ) , donc s'écrit sous la forme $h(x, y) + k\xi$ où h est linéaire et où $k \geq 0$. Si on avait $k = 0$, en faisant $y = 0$, on en déduirait $f(x + \xi x_0) = f(x) + \xi f(x_0)$, et f serait linéaire sur le polyèdre $\langle \tau_i, x_0 \rangle$, qui est strictement plus grand que τ_i , ce qui est impossible. Donc $k > 0$. Si on suppose $\varepsilon < k$, alors on a toujours $f_{x_0, \varepsilon}(x + y + \xi x_0) \geq f_{x_0, \varepsilon}(x) + f_{x_0, \varepsilon}(y + \xi x_0)$. Si on a égalité sous ces conditions, alors $\xi = 0$ et on trouve $f(x + y + \xi x_0) = f(x) + f(y + \xi x_0)$, ce qui contredit la définition de τ_i et de τ_j , à moins que $y \in \tau_i$ ou $x \in \langle \tau_j, x_0 \rangle$.

4ème cas : τ_i, τ_j et τ_k sont du type 2.

Alors pour $(x, y) \in \tau'_\alpha \times \tau'_\beta$, on a, avec les notations habituelles :

$$f_{x_0, \varepsilon}(x + \xi x_0) = f(x + \xi x_0) + \xi \varepsilon$$

$$f_{x_0, \varepsilon}(y + \eta x_0) = f(y + \eta x_0) + \eta \varepsilon$$

$x + y = z(x, y) + \lambda(x, y) \cdot x_0$ avec $z(x, y) \in \tau_k, \lambda(x, y) \in \mathbb{R}_+$.

De plus

$$f_{x_0, \varepsilon}(x + y + (\xi + \eta)x_0) = f(x + y + (\xi + \eta)x_0) + (\xi + \eta)\varepsilon$$

et on conclut facilement à l'inégalité de convexité de $f_{x_0, \varepsilon}$, et aux cas possibles d'égalité (à savoir $x, y \in$ un polyèdre τ_ℓ qui contient x_0, τ_i et τ_j).

5ème cas : τ_i, τ_j de type 2 et τ_k de type 1.

On doit procéder comme pour l'étude du 3ème cas.

On conclut de cette étude que les τ_i du type 1 et les $\langle \tau_j, x_0 \rangle$ sont les polyèdres associés à la fonction convexe $f_{x_0, \varepsilon}$ pourvu que ε soit assez petit. ■

On part maintenant de $f : \cup \sigma_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$, satisfaisant les propriétés (i) à (iv), telle que ses polyèdres associés soient des simplexes. On peut supposer $f \geq 0$ sur $\cup \sigma_\alpha$. On rappelle que la multiplicité de f est le nombre

$$\text{mult}(f) = \sup_{\tau \text{ polyèdre associé à } f} (\text{mult } \tau) .$$

On se sert du lemme 2, dans le cas $\text{mult } \tau > 1$, pour trouver une fonction g jouissant des propriétés susdites, mais où le nombre de polyèdres à g de multiplicités $\text{mult}(f) \geq \text{mult}(g)$ a eu d'au moins une unité. A cet effet, dans l'ensemble des polyèdres associés à f tels que $\text{mult}(\tau) = \text{mult}(f)$, soit τ un élément minimal pour la relation d'inclusion. Pour hypothèse τ est du type $\tau = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$. On sait que $\mu = \text{mult}(f) = \text{mult}(\tau)$ est l'ordre du groupe quotient G_τ de $(\sum \mathbb{R} \cdot x_j) \cap N$ par $\sum \mathbb{Z} \cdot x_j$. Pour $\tau_i = \langle x_1, \dots, x_i, \dots, x_k \rangle$ face de τ de codimension 1, on a un carré exact commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \sum_{\substack{1 \leq j \leq k \\ j \neq i}} \mathbb{Z} \cdot x_j & \longrightarrow & (\sum_{\substack{1 \leq j \leq k \\ j \neq i}} \mathbb{R} \cdot x_j) \cap N & \longrightarrow & G_{\tau_i} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \sum_{1 \leq j \leq k} \mathbb{Z} \cdot x_j & \longrightarrow & (\sum_{1 \leq j \leq k} \mathbb{R} \cdot x_j) \cap N & \longrightarrow & G_\tau \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & G_\tau / G_{\tau_i} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Comme $\# G_{\tau_i}$ est strictement inférieur à $\# G_\tau$ d'après la propriété minimale de τ , on a : $G_\tau / G_{\tau_i} \neq 1$, soit $G_\tau / G_{\tau_i} = \mathbb{Z}/m_i \mathbb{Z}$ pour $m_i > 1$.

La flèche composée $((\sum_{1 \leq j \leq k} \mathbb{R} \cdot x_j) \cap N) \longrightarrow \mathbb{Z}/m_i \mathbb{Z}$ est l'image dans $\mathbb{Z}/m_i \mathbb{Z} \cong m_i^{-1} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ de la i -ème coordonnée d'un élément de $\sum_{1 \leq j \leq k} \mathbb{R} \cdot x_j$.

Contemplant l'homomorphisme de groupes abéliens : $G_\tau \rightarrow \prod_{1 \leq i \leq k} (\mathbb{Z}/m_i)$.

Puisque chaque projection est un homomorphisme non trivial, il existe $g \in G_\tau$ tel que g ait une image non nulle dans chaque \mathbb{Z}/m_i . En remontant g à $(\sum \mathbb{R} \cdot x_j) \cap N$, et en effectuant une division euclidienne par $\sum \mathbb{Z} \cdot x_j$, on trouve un élément x de N qui s'écrit $x = \sum_{1 \leq i \leq k} \alpha_i \cdot x_i$ avec $0 < \alpha_i < 1$. On voit tout de suite que $\langle x, \tau_i \rangle$ a pour multiplicité $\alpha_i \text{mult}(\tau) < \text{mult}(\tau)$.

On applique alors le Lemme 2 à $f|_{\tau}$ et à $x \in \tau$; on obtient ainsi une nouvelle fonction g , qui coïncide avec f sur $\partial\tau$, ce qui permet de la prolonger à $\cup \sigma_{\alpha}$. Il est clair que g satisfait les propriétés (i)-(iv). Les polyèdres associés à g sont encore des simplexes ; le seul changement est que τ lui-même a été remplacé par les $\langle \tau, x_i \rangle$, qui sont de multiplicité strictement plus petite.

L'itération de ce procédé permet de trouver un g de multiplicité $\text{mult}(g) < \text{mult}(f)$, ce qui achève la démonstration du Théorème 11. ■

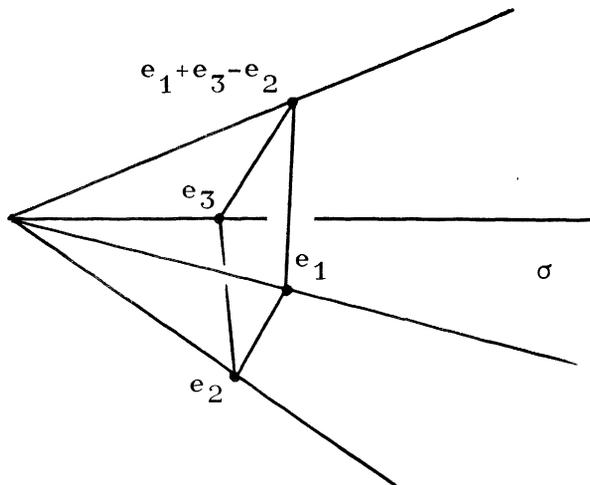
Illustrons ce procédé de désingularisation équivariante. Tout d'abord pour résoudre une variété toroïdale X de dimension 2, on se ramène au cas où $X = X_{\sigma}$, pour $\sigma = \langle x_1, x_2 \rangle$ un secteur rationnel de \mathbf{R}^2 . Si K est l'enveloppe convexe de $\{0, x_1, x_2\}$ dans \mathbf{R}^2 , et $\mathcal{E} = N \cap K$, il résulte de notre démonstration du lemme de Gordan (cf. Lemme 1) que \mathcal{E} engendre le semi-groupe $\sigma \cap \mathbf{Z}^2$, et que les points de \mathcal{E} subdivisent σ en une union de secteurs $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, chacun étant tel que la variété X_{σ_i} soit non-singulière. Il est clair que $Y = X_{\{\sigma_i\}}$ est la résolution minimale de X_{σ} . La description complète du diviseur exceptionnel (composantes, intersections, self-intersections) résulte de l'étude, déjà faite, de la variété Y . On construira sans peine une fonction $f : \sigma = \cup \sigma_i \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $Y = B_{\mathcal{E}_f}^{\sigma}(X)$.

Voici, d'après Saint-Donat, un exemple en dimension 3. On prend le cône polyédral $\sigma = \langle e_1, e_2, e_3, e_1 - e_2 + e_3 \rangle$. On a

$$X_{\sigma} = \text{Spec}(R_{\sigma}) \quad ,$$

$$\text{où } R_{\sigma} = k[X_1, X_2, X_1 X_2, X_2 X_3, X_3] \simeq k[X_1, Y_1, X_3, Y_3] / (X_1 Y_3 - X_3 Y_1) \quad .$$

X_{σ} est donc le cône sur la quadrique $X_1 Y_3 = X_3 Y_1$ de \mathbf{P}^3 .



On a deux moyens simples de subdiviser σ en deux simplexes de multiplcité 1, au moyen du cône de dimension 2 $\langle e_1, e_3 \rangle$ ou du cône de dimension 2 $\langle e_2, e_1 + e_3 - e_2 \rangle$. Ces deux subdivisions sont associées aux fonctions convexes sur σ

$$f = \inf(e_1^*, e_1^* + e_2^*) \quad \text{resp.} \quad g = \inf(e_1^*, e_3^*) .$$

Les deux idéaux associés sont les idéaux des cônes au-dessus des deux droites de la quadrique.

Compléments sur les diviseurs sur les variétés toroïdales lisses.

Soit $X = X_{\{\sigma_\alpha\}}$ une variété toroïdale lisse, et soit $Sk^1(\sigma)$ le 1-squelette de l'éventail $\{\sigma_\alpha\}$. Soit $Pic_T(X)$ le groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles T-équivariants sur X.

Proposition : On a une suite exacte

$$M \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^{Sk^1\{\sigma_\alpha\}} \longrightarrow Pic_T(X) \longrightarrow 0 ,$$

où, pour $r \in M$, $\varphi(r)$ est le diviseur principal défini par \underline{X}^r , et où $\mathbb{Z}^{Sk^1\{\sigma_\alpha\}}$ est identifié, par le Théorème 9, au groupe des diviseurs de Weil T-invariants sur X. ■

Théorème 12 : L'homomorphisme naturel de groupes : $Pic_T(X) \rightarrow Pic(X)$ est un isomorphisme lorsque X est lisse.

Démonstration : Soit L un faisceau inversible sur $X = X_{\{\sigma_\alpha\}}$. Chaque X_{σ_α} est isomorphe à une variété du type $\mathbb{P}_d^k \times \mathbb{A}_m^{n-k}$ d'après le Théorème 4, donc $Pic(X_{\sigma_\alpha}) = 0$. La restriction de L à X_{σ_α} est donc libre, et L est défini par un 1-cocycle $b_{\alpha,\beta}$ du recouvrement ouvert $\{X_{\sigma_\alpha}\}$ à valeurs dans le faisceau \mathcal{O}_X^* .

Comme $T = X_{\{0\}}$ est le plus petit ouvert du recouvrement, si on pose $a_\alpha = b_{\{0\}, \sigma_\alpha}$, on a : $b_{\alpha,\beta} = a_\beta \cdot a_\alpha^{-1}$ sur $X_{\sigma_\alpha} \cap X_{\sigma_\beta}$; de plus a_α est un élément inversible de $k[M]$, donc on peut écrire : $a_\alpha = c_\alpha \cdot \underline{X}^\alpha$ où $c_\alpha \in k^*$ et $r_\alpha \in M$. Au cobord près du 0-cocycle $\alpha \mapsto c_\alpha$, le 1-cocycle est défini par

$b_{\alpha,\beta} = \underline{X}^{r_\beta - r_\alpha}$. Mais le faisceau L défini par ce 1-cocycle est clairement T-équivariant. La flèche $Pic_T(X) \rightarrow Pic(X)$ est donc surjective. Son injectivité est claire. ■

Remarque : Demazure [1, p. 565-567] étend ce résultat à des schémas toroïdaux

sur \mathbb{Z} . Notons que le même résultat doit être vrai si X est singulière, mais nous ne savons le montrer (par voie transcendante) que lorsque k est de caractéristique nulle et X complète.

Théorème 13 : Soit $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_f$ un faisceau T -équivariant d'idéaux fractionnaires sur $X = X_{\{\sigma_\alpha\}}$.

(a) \mathfrak{F} est engendré par ses sections globales ssi on a :

$$f = \inf_{r \in M, r \geq f \text{ sur } \cup \sigma_\alpha} (r) .$$

Dans ce cas, f est convexe.

(b) Si \mathfrak{F} est inversible, alors \mathfrak{F} est ample ssi f est strictement convexe, i.e. pour chaque α_0 , il existe $r \in M \otimes \mathbb{Q}$ tel que :

- $f \leq r$ sur $\cup \sigma_\alpha$;
- $\sigma_{\alpha_0} = \{x \in \cup \sigma_\alpha \text{ tq } f(x) = r(x)\}$.

Démonstration : (a) $\Gamma(X, \mathfrak{F}_f)$ est engendré par les \underline{X}^r tels que $r \geq f$ sur $\cup \sigma_\alpha$; pour chaque α , la restriction de \mathfrak{F}_f à X_{σ_α} est engendrée par les \underline{X}^r tels que $r \geq f$ sur σ_α .

(b) Il est clair que $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_f$ est ample ssi les ouverts U_X du type $U = \{x \in X \text{ tq } \underline{X}_x \text{ engendre } \mathfrak{F}_x^{\otimes n}\}$, pour $n \geq 1$ et \underline{X} section de $\mathfrak{F}^{\otimes n}$ sur X , forment un recouvrement affine de X . Mais cette condition est vérifiée ssi tout X_{σ_β} est de ce type, pour un certain \underline{X}^{r_β} et un certain n_β ; mais alors $r = \frac{r_\beta}{n_\beta}$ est l'élément de $M \otimes \mathbb{Q}$ qui convient. ■

Remarque : Demazure [1, p. 567-570] a montré que sur une variété toroïdale lisse, tout faisceau ample est très ample.

On trouvera dans Demazure [1, p. 584-588] et dans [2, p. 152-153] des exemples de variétés toroïdales lisses, complètes de dimension 3 qui ne sont pas projectives. Notons que de telles variétés ont des modifications qui sont projectives.

Pour X une variété toroïdale, on sait que X est Cohen-Macaulay. On en connaît deux démonstration :

1) celle de HÜCHSTER [5] qui est de nature combinatoire et, semble-t-il, constructive ; cette démonstration a été reprise par KUSHNIRENKO [4] ;

2) celle de KEMPF [2, p. 41-52] qui utilise des techniques d'algèbre homologique.

Pour montrer qu'une résolution T -équivariante $f : Y \rightarrow X$ est rationnelle,

il suffit, d'après [2, p. 50] et le fait que X est Cohen-Macaulay, de montrer le résultat suivant :

Proposition : Si $f: Y \rightarrow X$ est une résolution T -équivariante de X , alors l'homomorphisme naturel de faisceaux : $f_* \Omega_Y^n \rightarrow \Omega_X^n$ est un isomorphisme.

Démonstration : Soit τ la forme de Haar sur le tore. On doit considérer une forme différentielle ω holomorphe sur X_{reg} , et montrer que $f^* \omega$ est holomorphe sur Y tout entier. On peut pour cela supposer ω de la forme : $\omega = \underline{X}^r \cdot \tau$, pour $r \in \mathbb{M}$. Mais ω est holomorphe sur X_{reg} ssi $\langle r, x \rangle > 0$ pour tout $x \in \text{Sk}^1(X)$. Si $X = \bigcup \sigma_\alpha$, cela entraîne $r > 0$ sur $\bigcup \sigma_\alpha - \{0\}$, donc $\langle r, y \rangle > 0$ pour tout $y \in \text{Sk}^1(Y)$ et $f^* \omega$ est holomorphe sur Y . ■

§ 3. MORPHISMES TOROIDAUX AVEC CHANGEMENT DE TORE

On se propose de décrire les propriétés des diagrammes du type

$$\begin{array}{ccc} T & \hookrightarrow & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ T' & \hookrightarrow & X' \end{array}$$

où $T \hookrightarrow X$ et $T' \hookrightarrow X'$ sont des immersions toroïdales. $f: T \rightarrow T'$ est un homomorphisme surjectif de tores sur k .

On décomposera l'étude en deux parties :

- (1) f est une isogénie ;
- (2) $\ker(f)$ est sans facteur direct du type μ_ℓ .

Etude des isogénies toroïdales.

Soient T un tore sur K ; M, N , etc. les groupes associés à T . Une isogénie $f: T \rightarrow T'$ est définie par un sous-groupe d'indice fini M' de M . Le groupe fini $G = M/M'$ est le groupe de Galois de l'isogénie f .

Les groupes associés à T' sont $M' \subset M$ et $N' \supset N$; on identifie $M_{\mathbb{Q}}$ à $M'_{\mathbb{Q}}$, etc. Un éventail $\{\sigma_\alpha\}$ de $N_{\mathbb{R}}$ définit deux immersions toroïdales $T \hookrightarrow X$ et $T' \hookrightarrow X'$, et un diagramme

$$\begin{array}{ccc} T & \hookrightarrow & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ T' & \hookrightarrow & X' \end{array}$$

qui est T-invariant en un sens évident. Le morphisme f est un revêtement surjectif ramifié de groupe G. Son lieu de ramification est un diviseur de Weil invariant sous T. On explicite donc $f: X \rightarrow X'$ complètement en calculant l'indice de ramification $e(f; x)$ de f le long du diviseur $\overline{\mathfrak{O}}^x$ de X, pour $x \in \text{Sk}^1\{\sigma_\alpha\}$. Or, on obtient une uniformisante locale de $\overline{\mathfrak{O}}^x$ (en son point général) en prenant un caractère \underline{X}^r , pour $r \in M'$ et $\langle r, x \rangle = 1$. Soit m le plus petit entier tel que $m \cdot x \in N$; alors $f^{-1}(\overline{\mathfrak{O}}^x) = \overline{\mathfrak{O}}^{m \cdot x}$ comme ensemble; il est clair que $m \cdot x$ est un élément primitif de N; comme $\langle r, mx \rangle = m$, on a : $f^{-1}(\overline{\mathfrak{O}}^x) = m \cdot \overline{\mathfrak{O}}^{m \cdot x}$ comme diviseurs de Weil sur X, donc $e(f; x) = m$, ce qui conclut notre étude.

Cas où $\ker(f)$ est sans torsion.

On a donc une suite exacte de tores sur k : $1 \rightarrow T'' \xrightarrow{i} T \xrightarrow{f} T' \rightarrow 1$ d'où des suites exactes $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f^*} M \xrightarrow{i^*} M'' \rightarrow 0$, $0 \rightarrow N'' \xrightarrow{i} N \xrightarrow{f} N' \rightarrow 0$, avec les notations évidentes. On se donne 2 immersions équivariantes $T \hookrightarrow X = X_{\{\sigma_\alpha\}}$ et $T' \hookrightarrow X' = X_{\{\tau_\beta\}}$.

Proposition : Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T & \hookrightarrow & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ T' & \hookrightarrow & X' \end{array}$$

ssi pour tout α , il existe β tel que $f(\sigma_\alpha) \subset \tau_\beta$.

Démonstration : Comme dans la démonstration du Théorème 7, si le prolongement existe, pour tout α , soit \mathfrak{O} l'orbite fermée de X_{σ_α} ; $f(\mathfrak{O})$ est une τ' -orbite de X' , donc c'est l'orbite fermée de X'_{τ_β} pour un certain β ; si x est un point de X_{σ_α} , l'orbite de x est adhérente à \mathfrak{O} donc l'orbite de f(x) est adhérente à $f(\mathfrak{O})$, donc contenue dans X'_{τ_β} ; d'où $f(X_{\sigma_\alpha}) \subset X'_{\tau_\beta}$; soit alors $a \in N \cap \sigma_\alpha$, et montrons que $f(a) \in \tau_\beta$; si en effet $f(a) \neq 0$, alors le sous-groupe à 1 paramètre λ_a se prolonge en $\lambda_a : \mathbb{G}_a \rightarrow X$, d'où un prolongement $f \circ \lambda_a$ de $\lambda_{f(a)}$ à \mathbb{G}_a , ce qui entraîne : $f(a) \in \tau_\beta$.

La réciproque est claire. ■

On cherche maintenant à étudier les fibres de $f: X \rightarrow X'$, et à obtenir un critère pour que f soit une fibration algébrique. On vient de voir que les

conditions $f(\sigma_\alpha) \subset \tau_\beta$ et $f(\overline{\sigma_\alpha}) \supset \overline{\tau_\beta}$ étaient équivalentes. On en déduit que $f(\overline{\sigma_\alpha}) = \overline{\tau_\beta}$ ssi $f(\sigma_\alpha)$ est contenu dans τ_β mais dans aucune face de τ_β . En particulier, pour $T' = \mathbb{O}\{0\}$ on trouve que $f^{-1}(T')$ est l'union des $\overline{\sigma_\alpha}$ pour $f(\sigma_\alpha) \neq \emptyset$ i.e. $\sigma_\alpha \subset N''_{\mathbf{R}}$. Au-dessus de T' , le morphisme f est un produit, et la fibre typique est la T'' -immersion torique $X'' = \sup_{f(\sigma_\alpha)=0} \overline{\sigma_\alpha}$.

Par ailleurs, montrons que pour tout β , l'image inverse schématique $f^{-1}(\overline{\tau_\beta})$ est réduite. Supposons d'abord que $\overline{\tau_\beta}$ soit un diviseur, c'est-à-dire $\tau_\beta = \mathbf{R}^+ \cdot y$, où y est un élément primitif de N' ; soit $s \in M'$ tel que $\langle s, y \rangle = 1$, alors \underline{X}^s est une équation locale de $\overline{\tau_\beta}^{\mathbf{R}^+ \cdot y}$; si x est un élément de $\text{Sk}^1(\{\sigma_\alpha\})$, $\overline{\tau_\beta}^{\mathbf{R}^+ \cdot x}$ est un diviseur T -invariant de X ; et \underline{X}^s a pour ordre $\langle s, f(x) \rangle$ au point générique de $\overline{\tau_\beta}^{\mathbf{R}^+ \cdot x}$; si $f(\overline{\tau_\beta}^{\mathbf{R}^+ \cdot x}) \subset \overline{\tau_\beta}^{\mathbf{R}^+ \cdot y}$ alors $f(x) = m \cdot y$, pour m entier; comme x est primitif et f surjectif, on a $m = 1$, donc \underline{X}^s est d'ordre $\langle s, y \rangle = 1$ au point générique de $\overline{\tau_\beta}^{\mathbf{R}^+ \cdot x}$; donc $f^{-1}(\overline{\tau_\beta}^{\mathbf{R}^+ \cdot y})$ est réduit. Par induction sur la dimension de τ_β , on déduit que $f^{-1}(\overline{\tau_\beta})$ est réduite pour tout cône τ_β de l'éventail de X' .

On voit facilement que f est surjectif ssi $f(\cup \sigma_\alpha)$ rencontre l'intérieur de chaque τ_β .

Définition : Soit $f: N \rightarrow N'$ comme plus haut. On suppose donnés un éventail $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $N_{\mathbf{R}}$ et un éventail $\{\tau_\beta\}_{\beta \in B}$ de $N'_{\mathbf{R}}$ tels que $\forall \alpha \in A, \exists \beta \in B$ tq $f(\sigma_\alpha) \subset \tau_\beta$.

On dit que f est une fibration d'éventails si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\forall \alpha \in A, \exists \beta \in B$ tq $f(\sigma_\alpha) = \tau_\beta$;

(ii) l'application : $\sigma_\alpha \mapsto (f(\sigma_\alpha), \sigma_\alpha \cap N''_{\mathbf{R}})$ est une bijection de A sur $B \times C$, où C est l'éventail $\{\sigma_\alpha \text{ tq } f(\sigma_\alpha) = 0\}$.

Remarque : Si f est une fibration d'éventails, alors $f = \cup \sigma_\alpha \rightarrow \cup \tau_\beta$ est surjective et pour tout $\alpha \in A$, on a :

$$\dim(\sigma_\alpha) = \dim(f(\sigma_\alpha)) + \dim(\sigma_\alpha \cap N''_{\mathbf{R}}) .$$

Théorème : Avec les notations précédentes, $f: X \hookrightarrow X'$ est une fibration algébrique localement triviale ssi $f: N \rightarrow N'$ est une fibration d'éventails.

Démonstration : Supposons que $f: N \rightarrow N'$ est une fibration d'éventails. Pour tout $\beta \in B$, on montrera que f est un produit au-dessus de X'_{τ_β} ; notons d'abord

que $f^{-1}(X'_{\tau_\beta})$ est l'union des X_{σ_α} pour $f(\sigma_\alpha) = \tau_\beta$ (on utilise la propriété (i) de la définition d'une fibration d'éventails). Il existe un unique $\alpha_0 \in A$ tel que $f(\sigma_{\alpha_0}) = \tau_\beta$ et $\sigma_{\alpha_0} \cap N''_{\mathbf{R}} = \{0\}$ (on a utilisé la propriété (ii)). Quitte à remplacer N' par le réseau engendré par $\tau_\beta \cap N'$, et à remplacer N par l'image réciproque de ce réseau par f , on peut supposer que τ_β engendre $N'_{\mathbf{R}}$ comme espace vectoriel. Soit V_β le sous-espace vectoriel de $N_{\mathbf{R}}$ engendré par σ_{α_0} ; la restriction de f à V_β est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur $N'_{\mathbf{R}}$, qui envoie $N \cap V_\beta$ bijectivement sur N' et σ_{α_0} bijectivement sur τ_β . Soit g l'application inverse, considérée comme application de $N'_{\mathbf{R}}$ vers $N_{\mathbf{R}}$. Il est clair que g scinde la suite exacte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow N'' \xrightarrow{i} N \xrightarrow{f} N' \longrightarrow 0 .$$

On voit que g définit un isomorphisme $N' \times N'' \xrightarrow{(i,g)} N$ d'où des isomorphismes

$T' \times T'' \rightarrow T$, etc.

Soit maintenant $\alpha \in A$ tel que $f(\sigma_\alpha) = \tau_\beta$. Soit $x \in \tau_\beta$, et considérons $\sigma_\alpha \cap f^{-1}(x)$ dans l'espace affine $f^{-1}(x)$; il existe un seul choix d'une origine dans $f^{-1}(x)$ pour lequel $\sigma_\alpha \cap f^{-1}(x)$ s'identifie au cône polyédral $\sigma_\alpha \cap N''_{\mathbf{R}}$ de $N''_{\mathbf{R}}$. Je prétends que $g(x)$ est cette origine. En effet, supposons que $g(x)$ soit point intérieur d'une face σ'' de $\sigma_\alpha \cap N''_{\mathbf{R}}$, avec $\dim(\sigma'') \geq 1$. Soit σ l'élément unique de l'éventail $\{\sigma_\alpha\}$ tel que $\sigma \cap N''_{\mathbf{R}} = \sigma''$ et $f(\sigma) = \tau_\beta$, par la propriété (ii) des fibrations d'éventails. Alors $g(x)$ est un point intérieur de σ , mais σ_{α_0} est une face stricte de σ , d'où une contradiction. On a montré ainsi l'égalité :

$$\sigma_\alpha \cap f^{-1}(x) = g(x) + (\sigma_\alpha \cap N''_{\mathbf{R}}) \text{ pour } x \in \tau_\beta .$$

Mais ceci signifie que l'isomorphisme $N'_{\mathbf{R}} \times N''_{\mathbf{R}} \xrightarrow{(i,g)} N_{\mathbf{R}}$ induit une bijection de $\tau_\beta \times (\sigma_\alpha \cap N''_{\mathbf{R}})$ sur σ_α d'où un isomorphisme $X'_{\tau_\beta} \times X''_{\sigma_\alpha \cap N''_{\mathbf{R}}} \xrightarrow{\cong} X_{\sigma_\alpha}$ induit par (i,g) ; ces isomorphismes se recollent automatiquement pour donner un isomorphisme $X'_{\tau_\beta} \times f^{-1}(1) \xrightarrow{\cong} f^{-1}(X'_{\tau_\beta})$ (on utilise encore une fois la propriété (ii)), ce qui montre qu'il existe une trivialisatoin T -équivariante du morphisme f au-dessus de X'_{τ_β} .

Supposons maintenant que $f: X \rightarrow X'$ est une fibration algébrique localement triviale. En particulier f est ouverte, donc pour tout $\alpha \in A$ l'image $X'_{f(\sigma_\alpha)}$ de X_{σ_α} est ouverte dans X' , donc $X'_{f(\sigma_\alpha)} = X_{\tau_\beta}$ pour un certain $\beta \in B$, d'où

la propriété (i). De plus, pour tout $\alpha \in A$, il est clair que $\sigma_\alpha \cap f^{-1}(0)$ est une face de σ_α , donc un élément de l'éventail associé à X_1 .

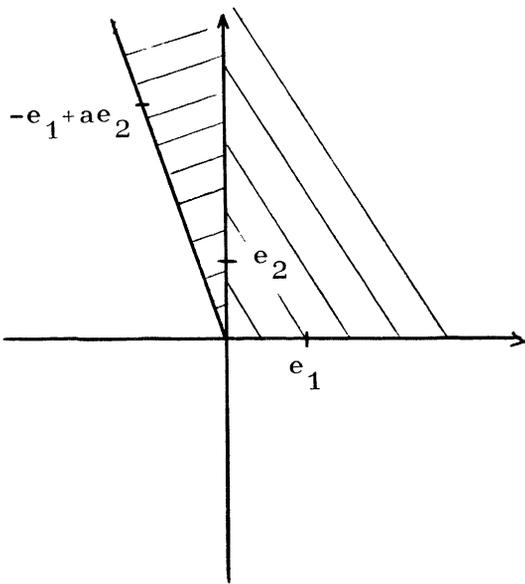
Pour tout $\beta \in B$, $f^{-1}(\tau_\beta)$ n'est autre, en vertu des considérations qui précèdent la définition des fibrations d'éventails et de la propriété (i), que l'union des σ_α pour $f(\sigma_\alpha) = \tau_\beta$. La seule donnée de la variété $f^{-1}(\tau_\beta)$ permet de reconstruire les τ_β ; ceux-ci forment en effet la stratification canonique de $f^{-1}(\tau_\beta)$ au sens suivant : on définit cette stratification par récurrence sur la dimension d'une k -variété W ; si W est un point, W est l'unique strate; si W est de dimension $n \geq r$, son lieu singulier $\text{Sing}(W)$ est une sous-variété de dimension $\leq n-1$; les strates de W sont de 2 types :

- les composantes connexes de $W - \text{Sing}(W)$;
- les strates de $\text{Sing}(W)$.

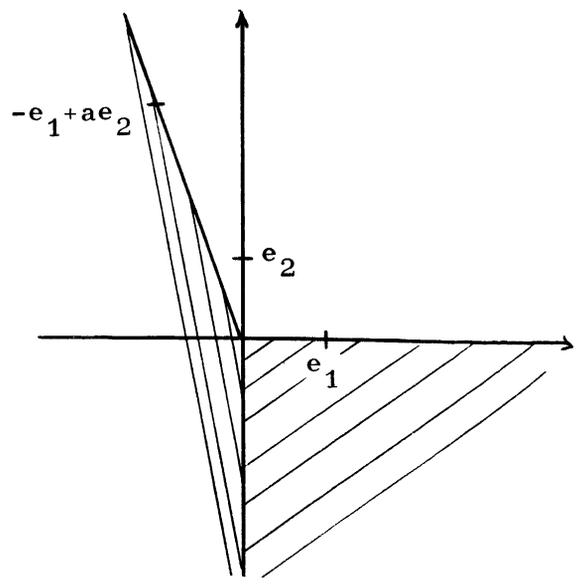
Pour toute variété W , soit $n(W)$ le nombre de ses strates canoniques. Pour $\beta \in B$, posons $n(\beta) = n(f^{-1}(\tau_\beta))$; alors $n(\beta) = n(f^{-1}(x))$ pour $x \in \tau_\beta$, et $n(\beta)$ est le cardinal de l'ensemble des α tels que $f(\sigma_\alpha) = \tau_\beta$. Si $f: X \rightarrow X'$ est une fibration localement triviale, alors $n(f^{-1}(x))$ est constant sur X' , donc $n(\beta)$ est constant sur B . La propriété (ii) en découle immédiatement. ■

Nous voulons appliquer ce Théorème à la construction de fibrés holomorphes de rang 1 sur une variété torique X . L'immersion torique $T \hookrightarrow X$ correspond à un éventail $\{\sigma_\alpha\}$ de $N_{\mathbf{R}}$. La fibre typique doit être A^1 , qui correspond au cône polyédral \mathbf{R}_+ de \mathbf{R} . On considère le tore $T \times \mathbb{G}_m$, dont le groupe des groupes à 1 paramètre est $N \oplus \mathbf{Z}$. Selon le Théorème, l'éventail de $N_{\mathbf{R}} \oplus \mathbf{R}$ doit être du type suivant. Pour chaque α , on choisit un cône polyédral τ_α de $N_{\mathbf{R}} \oplus \mathbf{R}$ tel que sa projection sur $N_{\mathbf{R}}$ soit σ_α et son intersection avec \mathbf{R} réduite à $\{0\}$. Ceci donnera le complémentaire de la section nulle du fibré. On ajoute à l'éventail les cônes polyédraux $\tau_\alpha + (0 \times \mathbf{R}_+)$ de $N_{\mathbf{R}} \oplus \mathbf{R}$. Il est clair qu'on obtient ainsi une fibration d'éventails, qui décrit un fibré holomorphe de rang 1 sur X , muni d'une action de $T \times \mathbb{G}_m$. Remarquons qu'en ajoutant les cônes polyédraux $\tau_\alpha + (\mathbb{C} \times \mathbf{R}_-)$ à notre éventail, on compactifie ce fibré en un fibré en droites projectives sur X .

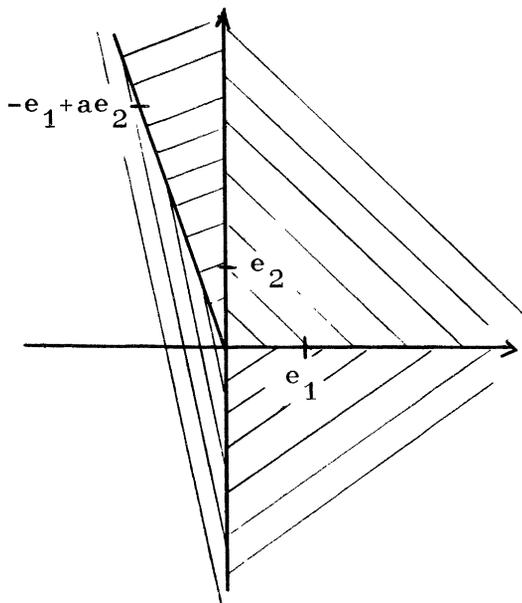
Dans le cas de $X = \mathbb{P}_1$, on obtient les figures suivantes :



Fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$



Fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$



Fibré $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)) \rightarrow \mathbb{P}^1$, dont les fibres sont des droites projectives.

Etudions de même les fibrés holomorphes de rang 1 sur l'espace projectif \mathbb{P}_n . Rappelons l'éventail de \mathbb{R}^n qui définit \mathbb{P}_n . Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de \mathbb{Z}^n ; l'éventail de \mathbb{P}_n est un éventail complet; les faces de plus grande dimension sont $\sigma_0 = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbf{R}_+ \cdot e_i$, et pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\sigma_i = \mathbf{R}_+ \cdot \left(-\sum_{1 \leq j \leq n} e_j \right) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \mathbf{R}_+ \cdot e_j .$$

On décrit toutes les faces par un sous-ensembles de $\{0, 1, \dots, n\}$ de cardinal au

plus n , à savoir

$$\sigma_I = \sum_{i \notin I} \mathbf{R}_+ \cdot e_i, \quad \text{avec} \quad e_0 = -\sum_{1 \leq i \leq n} e_i.$$

Pour construire toutes les faces τ_I de \mathbf{R}^{n+1} comme plus haut, il suffit, pour chaque $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ de se donner un élément de \mathbf{R}^{n+1} du type $e_i + \lambda_i(0, 1)$ pour $\lambda_i \in \mathbf{Z}$. Ceci permet de construire le fibré en question, qui ne dépend que de la famille d'entiers λ_i ($0 \leq i \leq n$). On vérifie, sauf erreur, que ce fibré a pour première classe de Chern le déterminant $(n+1) \times (n+1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ & & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdot & & \vdots \\ \vdots & & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & & \cdot & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n & \lambda_0 \end{vmatrix}$$

qui est le déterminant des vecteurs $e_i + \lambda_i(0, 1)$ de \mathbf{R}^{n+1} ; or ce déterminant vaut $-\sum_{i=0}^{i=n} \lambda_i$.

L'étude, par cette méthode, de fibrés holomorphes de rang quelconque sur un espace projectif, reste à faire.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Demazure, Sous-groupes de rang maximum du groupe de Cremona, Ann. Sc. E.N.S. 4ème série, t. 3, fasc. 4 (1970).
- [2] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, Toroidal embeddings, Lect. Notes in Math. 339, Springer 1973.
- [3] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, Y. Tai, Smooth compactification of locally symmetric varieties, Math. Sci. Press, Brookline Mass. 1975.
- [4] A. G. Kushnirenko, Polyèdres de Newton et nombres de Milnor, Inv. Math. 32 (1976) 1-31.
- [5] M. Hochster, Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials and polyèdres, Ann. of Math. 96 (1972).

Erratum à l'exposé de J.L. Brylinski.

"Gerardo Gonzalez-Sprinberg m'a signalé que la démonstration du Lemme 1 (p. 4 et 5) était fautive. Il convient à mon sens de la modifier comme suit :

"Le seul point non trivial est que si σ est un cône polyédral $\sigma \cap M$ est un semi-groupe à engendrement fini (c'est le "lemme de Gordan"). Comme plus haut, on se ramène à supposer σ contenu dans un quadrant. Soient x_i les éléments primitifs des arêtes de σ ; les x_i sont en nombre fini, puisque σ est un cône polyédral ; donc le semi-groupe S engendré par les x_i est de type fini. Cela dit, les x_i engendrent le cône σ . Il est alors clair que $\sigma \cap M$ est le saturé de S . Donc $\sigma \cap M$ est de type fini d'après la proposition 2 (p. 3). ■" "