H. Pinkham

Appendice à « Singularités rationnelles de surfaces »

Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique) (1976-1977), p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977____A12_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L E S   S I N G U L A R I T E S

D E S   S U R F A C E S

APPENDICE À "SINGULARITES RATIONNELLES DE SURFACES"

H. PINKHAM

Nous gardons les notations de l'exposé du 4 Janvier : (X,P) une singularité normale de surface, $\pi : X' \to X$ une résolution de X, $U = X - P$. Nous voulons calculer le conoyau M_X de la flèche de restriction $H^o(X',\Omega^1_{X'}) \to H^o(U,\Omega^1_{X'})$. Remarquons que $M_X = H^1_P(\pi_*\Omega^1_{X'})$, et que M_X ne dépend pas de la résolution choisie.

Steenbrink [26] a montré que $M_X = 0$ pour n'importe quelle singularité quotient en caractéristique 0, voir § 16 prop. 2. Dans cet appendice nous calculons M pour un cône $X(C,\mathcal{L}) := \operatorname{Spec} \bigoplus_{n\geq 0} H^o(C,\mathcal{L}^{\otimes n})$, C une courbe lisse, $\mathcal{L}$ un faiceau inversible ample sur C. Ce calcul montre qu'en toute caractéristique $p>0$ il existe des singularités rationnelles X, même quotients du plan affine par un schéma en groupe fini, telles que $M_X \neq 0$. Finalement nous esquissons une démonstration du fait qu'en caractéristique 0 $M_X = 0$ pour toute singularité rationnelle X. En particulier on retrouve le résultat de Steenbrink. Je remercie J. Wahl qui m'a convaincu que les calculs hideux nécessaires à la démonstration de ce résultat (et, naturellement, pas reproduits ici) sont inévitables, et qui m'a montré comment relier ces calculs à ceux de [28].

<u>Remarque</u> : On a quelques résultats sur Ω^1_X lorsque X est une singularité d'hypersurface ou intersection complète : voir Greuel, Der Gauß-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten, Math. Ann. <u>214</u>, (1975) 235-266, ou Kantor, Formes et opérateurs différentiels sur les espaces analytiques complexes, Bull. S.M.F., Mémoire 53 (1977). On sait peu de choses dans le cas général. Si X est de Gorenstein, $H^{2-i}_P(\Omega^1_X)$ est le dual de $\operatorname{Ext}^i(\Omega^1_X,\mathcal{O}_X)$, qui est lui-même isomorphe à T^i pour $i = 1,2$. (T^1 est le module des déformations infinitésimales de X et T^2 est le module des obstructions.) On connâit des singularités de Gorenstein avec $T^2 \neq 0$, par exemple les cônes sur une courbe elliptique de degré ≥ 6 ; ceci donne donc des singularités normales de surface telles que Ω^1_X ait de la torsion, à l'encontre de ce qui se passe dans le cas d'intersection complète. On n'a pas d'exemple où $H^1_P(\Omega^1_X) = 0$: existe-t-il des singularités de surface Gorenstein qui sont <u>rigides</u> ?

<u>1. CALCUL DE M_X POUR LES CONES.</u>

$X = \operatorname{Spec} \bigoplus_{n\geq 0} H^o(C,\mathcal{L}^{\otimes n})$, C une courbe lisse, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample sur C. On prend pour X' le fibré en droites au-dessus de C donné par $\mathcal{L}$: $X' = V(\mathcal{L})$ dans la notation de Grothendieck. On a le morphisme de structure

$f : X' \to C$. La suite exacte des différentielles donne :

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow f^*\Omega^1_{C/k} \longrightarrow \Omega^1_{X'/k} \longrightarrow f^*\mathcal{L} \longrightarrow 0$$

puisque $f^*\mathcal{L}$ est le faisceau des différentielles relatives.

$$X' = \underset{\sim}{\mathrm{Spec}}_C(\bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}) \quad \text{et} \quad U = \underset{\sim}{\mathrm{Spec}}_C(\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}^{\otimes n})$$

donc (f et $f_{|U}$ sont affines)

$$H^i(X', f^*\mathcal{F}) = H^i(C, f_* f^*\mathcal{F}) = \bigoplus_{n\geq 0} H^i(C, \mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n})$$

$$H^i(U, f^*\mathcal{F}) = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} H^i(C, \mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n}) \quad .$$

Soit $\partial : H^0(X', f^*\mathcal{L}) \to H^1(f^*\Omega^1_{C/k})$ le cobord de la suite exacte de (*), et ∂_0 sa restriction à $H^0(C, \mathcal{O}_C)$, c'est-à-dire à $n = -1$. On a

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n<0} H^0(C, \Omega^1_C \otimes \mathcal{L}^n) \longrightarrow M_X \longrightarrow \ker \partial_0 \longrightarrow 0 \quad .$$

<u>Proposition 1</u> : Si $k = \mathbb{C}$, ∂_0 est injectif, donc

$$M_X = \bigoplus_{n<0} H^0(C, \Omega^1_C \otimes \mathcal{L}^n) \quad .$$

Donc M_X est nul si et seulement si $\mathcal{L}$ n'est pas spécial,
($\mathcal{L}$ spécial $\underset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow}$ $H^1(C, \mathcal{L}) \neq 0$).

<u>Démonstration</u> : Recouvrons C par des petits ouverts U_i, avec coordonnée locale x_i, telle que $x_i = f_{ij}(x_j)$ sur $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Soit t_i la coordonnée de la fibre de X' au-dessus de U_i, avec $t_i = a_{ij} t_j$, $a_{ij} \in \mathcal{O}^*_{U_{ij}}$, où les a_{ij} sont des fonctions de transition pour $\mathcal{L}$.

Au-dessus de $f^{-1}(U_i)$, $\Omega^1_{X'}$ est donné par dt_i, dx_i, et le recollement au-dessus de $f^{-1}(U_i \cap U_j)$ est donné par :

$$(**) \qquad \begin{cases} dt_i = a_{ij}\, dt_j + \left(\dfrac{da_{ij}}{dx_j}\right) t_j\, dx_j \\[2ex] dx_i = \left(\dfrac{df_{ij}}{dx_j}\right) dx_j \quad . \end{cases}$$

Nous voulons d'abord décrire $H^0(C, \mathcal{O}_C)$ en tant que sections du faisceau des différentielles relatives $\Omega^1_{X'}/C$. $H^0(C, \mathcal{O}_C)$ est évidemment de dimension 1, et est engendré par le cocycle $\left\{\dfrac{dt_i}{t_i}\right\}$. En utilisant (**) on voit que l'image de ce cocyle dans $H^1(X', f^*\Omega^1_{C'/k})$ est la classe du cocycle de Čech donné sur U_{ij} par

$$\left.\frac{dt_i}{t_i}\right|_{U_j} - \left.\frac{dt_j}{t_j}\right|_{U_j} = \frac{1}{a_{ij}t_j}\left(a_{ij}\ dt_j + \left(\frac{da_{ij}}{dx_j}\right) t_j\ dx_j\right) - \frac{dt_j}{t_j}$$

$$= \left(\frac{da_{ij}}{dx_j}\right)\frac{1}{a_{ij}}\ dx_j = d(\log a_{ij}) \quad .$$

On a donc un morphisme

$$H^1(C,\mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(C,\Omega^1_C)$$

$$\{a_{ij}\} \longmapsto d(\log a_{ij}) \quad .$$

Ce morphisme est bien connu (voir Gunning, Lectures on Riemann Surfaces (Princeton), p. 131 et suivantes). Il provient de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathcal{O}^* \xrightarrow{d\ \log} \Omega^1_C \longrightarrow 0$$

et, à un facteur non nul près, il donne le degré (ou classe de Chern) de $\mathcal{L}$. En particulier, puisque $\mathcal{L}$ est positive, son degré est non nul, et ∂_o est une injection, c.q.f.d.

<u>Remarque</u> : ∂ :

$$\begin{array}{ccc} H^o(X', f^*\mathcal{L}) & \longrightarrow & H^1(X', f^*\Omega^1_C) \\ \| & & \| \\ \bigoplus\limits_{n\geq 0} H^o(C,\mathcal{L}^{n+1}) & & \bigoplus\limits_{n\geq 0} H^1(C,\Omega^1_C\otimes\mathcal{L}^n) \end{array} \quad .$$

respecte la graduation et augmente de degré 1.

D'autre part $R^1\pi_*\Omega^1_{X'} = H^1(X',\Omega^1_{X'})$ est donné en car. 0 par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^1(C,\Omega^1_C) \longrightarrow H^1(X',\Omega^1_{X'}) \longrightarrow \bigoplus_{n\geq 0} H^1(X',\mathcal{L}^{n+1}) \longrightarrow 0$$

et n'est donc jamais nul. (Plus généralement, pour une singularité rationnelle X et sa résolution minimale, la dimension de $R'\pi_*\Omega^1_{X'}$ est égal au nombre de composantes du diviseur exceptionnel de $X' \to X$: voir la proposition 3 du § 2).

<u>Proposition 2</u> : (Sur un corps de base quelconque). Si $C = \mathbb{P}^1$ et $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$ alors $M_X = \ker \partial_o$, qui est non nul si et seulement si la caractéristique de k est positive et divise b.

Démonstration : Laissée au lecteur (calcul en coordonnées locales essentiellement équivalent à la remarque de Wahl [56], remark 3.4).

2. $M_X = 0$ POUR LES SINGULARITES RATIONNELLES EN CARACTERISTIQUE 0.

$\pi : Y \to X$ est la résolution minimale d'une singularité rationnelle en caractéristique 0. Les composantes irréductibles E_i, $1 \leq i \leq t$ du diviseur exceptionnel E sont des courbes rationnelles lisses qui s'intersectent transversalement. $U = Y - E$.

Soit $Der_E(Y)$ le faisceau localement libre de rang 2 des dérivations de X qui préservent l'idéal de E ; on voit que $Der_E(Y)$ est localement libre en le calculant en coordonnées locales : au point $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, si E est donné par $\prod_{i \in I} x_i = 0$, $I \subset \{1,2\}$, alors $Der_E(Y)$ a pour base

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad j \in \{1,2\} \setminus I$$

$$x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad i \in I \quad .$$

Soit $\Omega^1_Y(\log E)$ le dual de $Der_E(Y)$ ("différentielles logarithmiques"). Avec la même notation que plus haut $\Omega^1_Y(\log E)$ a pour base en coordonnées locales

$$dx_j \qquad j \in \{1,2\} \setminus I$$

$$\frac{dx_i}{x_i} \qquad i \in I \quad .$$

Donc

$$\Lambda^2(\Omega^1_Y(\log E)) = K_Y(E) \quad . \tag{1}$$

On a d'autre part les suites exactes

$$0 \longrightarrow \Omega^1_Y \longrightarrow \Omega^1_Y(\log E) \xrightarrow{Res} \bigoplus_{i=1}^{t} \mathcal{O}_{E_i} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

$$0 \longrightarrow \Omega^1_Y(\log E)(-E) \longrightarrow \Omega^1_Y \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{t} \Omega^1_{E_i} \longrightarrow 0 \tag{3}$$

Proposition 1 : Si $H^1_E(\Omega^1_Y(\log E)(-E)) = 0$, alors $M_X = 0$.

En effet la suite exacte longue de cohomologie locale montre que la flèche de restriction $H^o(Y,\Omega^1_Y(\log E)(-E)) \to H^o(U,\Omega^1_Y(\log E)(-E))$ est surjective ; ce dernier groupe est trivialement isomorphe à $H^o(U,\Omega^1_Y)$. On a donc un diagramme :

$$\begin{tikzcd} H^o(Y,\Omega^1_Y(\log E)(-E)) \arrow[rrr, "\text{surjectif par hypothèse}"] \arrow[d, "\text{suite exacte (3)}"] & & & H^o(U,\Omega^1_Y(\log E)(-E)) \arrow[d, equal, "\text{isomorphisme trivial}"] \\ H^o(Y,\Omega^1_Y) \arrow[rrr, "\text{suite de cohom. locale}"] & & & H^o(U,\Omega^1_Y) \end{tikzcd}$$

et M_X, le conoyau de la flèche horizontale inférieure, est nul. (En réalité il est facile de voir que toutes les flèches du diagramme sont des isomorphismes.)

Proposition 2 : $H^1_E(\Omega^1_Y(\log E)(-E)) = 0 \Longrightarrow H^1_E(\Omega^1_Y(\log E)) = 0$. Réciproquement si $H^1_E(\Omega^1_Y(\log E)) = 0$ et $H^o(Y,\Omega^1_Y(\log E)\otimes\mathcal{O}_E) = 0$, alors $H^1_E(\Omega^1_Y(\log E)(-E)) = 0$.

Soit $\mathfrak{F}$ un faisceau localement libre de rang 2 sur Y. Il est bien connu qu'on a $\mathfrak{F} \simeq \mathfrak{F}^\vee \otimes \Lambda^2\mathfrak{F}$. D'autre part par dualité formelle (voir le texte, § 15) $H^1_E(\mathfrak{F})$ est dual à $H^1(Y,\mathfrak{F}^\vee\otimes K_Y)$. Donc la dimension de $H^1_E(\Omega^1_Y(\log E)(-E)) \simeq H^1_E(\mathrm{Der}_E(Y)\otimes K_Y)$ est la même que celle de $H^1(Y,\Omega^1_Y(\log E))$. On a la diagramme

$$\begin{tikzcd} H^o(Y,\Omega^1_Y) \arrow[r, "\text{suite exacte (2)}"] \arrow[d, "\text{surjectif par la prop. 1}"] & H^o(Y,\Omega^1_Y(\log E)) \arrow[d, "\text{restriction}"] \\ H^o(U,\Omega^1_Y) \arrow[r, equal, "\text{isomorphisme trivial}"] & H^o(U,\Omega^1_Y(\log E)) \end{tikzcd}$$

Donc la flèche verticale de droite est surjective, ce qui implique qu'on a une injection :

$$H^1_E(\Omega^1_Y(\log E)) \longrightarrow H^1(Y,\Omega^1_Y(\log E)) \quad ,$$

ce qui démontre la première assertion. Pour la réciproque on utilise l'isomorphisme $H^o(Y,\Omega^1_Y(\log E)\otimes\mathcal{O}_E) = H^o_E(\Omega^1_Y(\log E)\otimes\mathcal{O}_E)$ et la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Omega_Y^1(\log E)(-E) \longrightarrow \Omega_Y^1(\log E) \longrightarrow \Omega_Y^1(\log E) \otimes \mathcal{O}_E \longrightarrow 0 \ .$$

Remarque : Pour le moment nous n'avons utilisé que le fait que les composantes de E sont lisses à intersections transversales, mais pas que X est rationnelle.

Théorème (Wahl) : Si X est rationnelle, $H_E^1(\Omega_Y^1(\log E)(-E)) = 0$ et donc $M_X = 0$.

Remarque : Le résultat est encore vrai si la caractéristique du corps de base ne divise le discriminant de la matrice d'intersection d'aucun sous-graphe de E.

Wahl démontre ce résultat par un calcul pénible utilisant la proposition 2 et les techniques de [28] : voir en particulier § 4 et 5.12. Nous ne ferons pas ce calcul ici. On peut établir directement l'assertion $M_X = 0$ par un calcul (tout aussi pénible, sinon plus) en coordonnées locales. La restriction sur la caractéristique du corps de base (voir le contre-exemple donné en première partie) montre bien qu'un calcul en terme du cycle fondamental, tel que ceux faits dans l'exposé, ne donnera rien, et qu'il faut vraiment se salir les mains comme dans [28].

Proposition 3 : Si X est rationnelle, $H_E^1(\Omega_Y^1) \cong H^1(Y, \Omega_Y^1)$ et est de dimension t (= nombre de composantes de E). En particulier il n'est jamais nul.

On utilise la suite exacte (3) et les résultats ci-dessus.
