P. Cartier

Modules sur une coalgèbre

Séminaire "Sophus Lie", tome 2 (1955-1956), exp. n° 4, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1955-1956__2__A6_0>

-:-:-:-

Séminaire "Sophus LIE" Exposé n° 4
Année 1955/56

-:-:-:-

MODULES SUR UNE COALGÈBRE

(Exposé de P. CARTIER, le 10.2.56)

Le but de cet exposé et du suivant est de donner une caractérisation homologique des algèbres du type $\Gamma(M)$ où M est un module libre.

1.- Notations.

On suppose donné un anneau commutatif avec unité K. Les modules sont tous des modules unitaires sur K et les produits tensoriels sont pris sur K. L'opérateur identique d'un K-module M sera noté 1_M ou même simplement 1 lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible.

On identifiera les produits tensoriels $M \otimes (N \otimes P)$, $(M \otimes N) \otimes P$ et $M \otimes N \otimes P$; par contre on n'identifiera pas le produit tensoriel $K \otimes M$ au module M et l'on notera P_M l'isomorphisme canonique de $K \otimes M$ ou de $M \otimes K$ sur M ; on a donc :

(1) $$P_M(\lambda \otimes m) = \lambda m \qquad (\lambda \in K \quad m \in M)$$

2.- Coalgèbres.

Les coalgèbres forment une structure algébrique moins riche que celle d'hyperalgèbre et n'en retiennent que l'application diagonale. De manière précise :

Une coalgèbre A est constituée par la donnée :

1) d'un module A ;

2) d'une application linéaire Δ_A de A dans $A \otimes A$, dite application diagonale telle que l'on ait :

(2) $$(\Delta_A \otimes 1_A) \circ \Delta_A = (1_A \otimes \Delta_A) \circ \Delta_A$$

3) d'une application linéaire ε_A de A dans K telle que :

(3) $$P_A \circ (\varepsilon_A \otimes 1_A) \circ \Delta_A = P_A \circ (1_A \otimes \varepsilon_A) \circ \Delta_A = 1_A$$

Un homomorphisme de la coalgèbre A dans la coalgèbre B est une application linéaire f de A dans B telle que l'on ait

(4) $$\Delta_B \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_A \qquad \varepsilon_B \circ f = \varepsilon_A$$

Les coalgèbres forment alors une catégorie.

Un élément unité dans une coalgèbre A est un $u \in A$ tel que $\Delta(u) = u \otimes u$ et $\varepsilon_A(u) = 1$. Si A possède une unité u, elle est somme directe de $K.u$ et du sous-module A^+ noyau de ε_A ; dans ce cas, la condition (3) s'écrit

(5) $$\delta(a) = \Delta(a) - a \otimes u - u \otimes a \in A^+ \otimes A^+ \quad \text{pour} \quad a \in A^+ .$$

3.- Modules sur une coalgèbre.

On se donne une coalgèbre A qui sera fixée jusqu'à la fin de l'exposé. Nous appellerons module sur la coalgèbre A, ou A-module, l'objet constitué par les données suivantes :

1) un K-module M

2) une application linéaire Δ_M de M dans $A \otimes M$ vérifiant les conditions suivantes :

(6) $$(\Delta_A \otimes 1_M) \circ \Delta_M = (1_A \otimes \Delta_M) \circ \Delta_M$$

(7) $$P_M \circ (\varepsilon_A \otimes 1_M) \circ \Delta_M = 1_M$$

Un homomorphisme du A-module M dans le A-module N ou A-homomorphisme est une application K-linéaire f de M dans N telle que l'on ait :

(8) $$\Delta_N \circ f = (1_A \otimes f) \circ \Delta_M$$

Les A-homomorphismes de M dans N forment un sous-module $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ du module $L_K(M, N)$ de toutes les applications K-linéaires de M dans N. De plus, le composé de deux A-homomorphismes est un A-homomorphisme et $1_M \in \mathrm{Hom}_A(M, M)$; autrement dit, les A-modules forment une catégorie additive $\mathcal{C}_A$.

Soient M un A-module et N un sous-K-module de M vérifiant la condition suivante : Δ_M applique N dans le sous-module de $A \otimes M$ image canonique de $A \otimes N$. De la suite exacte $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\pi} M \xrightarrow{\rho} M/N \longrightarrow 0$ de K-modules, on déduit une suite exacte :

$$A \otimes N \xrightarrow{\pi'} A \otimes M \xrightarrow{\rho'} A \otimes (M/N) \longrightarrow 0$$

d'où résulte immédiatement qu'il existe sur M/N une structure et une seule de A-module telle que $\rho \in \mathrm{Hom}_A(M , M/N)$. De plus, si π' est injectif, par exemple si N est facteur direct de M , il existe une structure et une seule de A-module sur N telle que π soit un A-homomorphisme.

Donnons quelques exemples de A-modules : tout d'abord A muni de l'application Δ_A est un A-module ; si, ensuite, A admet une unité u , l'application $\lambda \longrightarrow u \otimes \lambda$ définit, comme on le voit aussitôt, une structure de A-module sur K .

4.- Dualité des coalgèbres.

Soit A^* le dual du module A , c'est-à-dire le module des formes K-linéaires sur A . Pour x' , $y' \in A^*$, on pose

(9) $$x'y' = P_K \circ (x' \otimes y') \circ \Delta_A .$$

On définit ainsi une loi de composition interne bilinéaire sur A^* . La formule (2) montre que cette loi de composition est associative, tandis que la formule (3) montre que ε_A est élément neutre : on a muni A^* d'une structure d'algèbre associative avec unité. De plus, tout homomorphisme de A dans une coalgèbre B définit par transposition un homomorphisme ${}^t f$ de l'algèbre B^* dans l'algèbre A^* .

Soit maintenant M un A-module ; pour tout $x' \in A^*$, posons $U(x') = P_M \circ (x' \otimes 1_M) \circ \Delta_M$. La formule (6) montre que l'on a $U(x'y') = U(x') U(y')$ pour x' , $y' \in A^*$ et la formule (7) montre que $U(\varepsilon_A) = 1_M$. Autrement dit, on a muni M d'une structure de module unitaire sur l'anneau A^* ; de plus, tout A-homomorphisme f de M dans N est un homomorphisme pour les structures de modules sur l'anneau A^* associées aux structures données de A-modules.

Inversement, sur le dual de toute algèbre C sur K , qui soit un K-module libre de type fini, on définit par transposition une structure de coalgèbre ; on peut de même traiter le cas des C-modules.

5.- Suites $\mathcal{E}$-exactes.

Soit $I = [a , b]$ un intervalle fini ou non de l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers rationnels. Une suite $\mathcal{E}$-exacte $\mathcal{C}$ de A-modules est la donnée d'une famille $(M_i)_{i \in I}$ de A-modules et d'une famille $(f_i)_{i \in [a,b[}$ de A-homomorphismes, f_i appliquant M_i dans M_{i+1} , vérifiant les deux conditions suivantes :

a) Pour $i \in [a\ ,\ b[$, le noyau Z_i de f_i est un sous-module facteur direct de M_i et l'image B_{i+1} de f_i est un sous-module facteur direct de M_{i+1} .

b) On a $B_i = Z_i$ pour $i \in]a\ ,\ b[$.

Autrement dit, considérée comme suite de K-modules et de K-homomorphismes, $\mathcal{C}$ est une suite exacte qui "se décompose" ("split") .

B_i est un sous-A-module de M_i pour $i \in [a\ ,\ b[$, et on voit tout de suite que la suite $\mathcal{C}$ se décompose en les suites $\mathcal{E}$-exactes suivantes :

(9) $$M_a \xrightarrow{f_a} B_{a+1} \longrightarrow 0 \qquad a \neq -\infty$$

(10) $$0 \longrightarrow B_i \longrightarrow M_i \xrightarrow{f_i} B_{i+1} \longrightarrow 0 \qquad i \in]a\ ,\ b[$$

(11) $$0 \longrightarrow B_b \longrightarrow M_b \qquad b \neq +\infty$$

6.- Modules $\mathcal{E}$-injectifs.

Si I est un A-module, nous poserons $T_I(M) = \mathrm{Hom}_A(M\ ,\ I)$ pour tout A-module M et nous appellerons $T_I(f)$ l'homomorphisme de $T_I(N)$ dans $T_I(M)$ défini pour tout A-homomorphisme f de M dans N par

$$T_I(f)(g) = g \circ f$$

On a défini ainsi un foncteur additif contravariant T_I de la catégorie $\mathcal{C}_A$ des A-modules dans la catégorie $\mathcal{N}_K$ des K-modules.

On dira que le A-module I est $\mathcal{E}$-injectif si le foncteur T_I est exact, c'est-à-dire si pour toute suite $\mathcal{E}$-exacte de A-modules :

$$M_a \longrightarrow M_{a+1} \longrightarrow \cdots\cdot \longrightarrow M_{b-1} \longrightarrow M_b$$

la suite :

$$T_I(M_a) \longleftarrow T_I(M_{a+1}) \longleftarrow \cdots\cdot \longleftarrow T_I(M_b)$$

de K-modules est exacte. Il suffit de vérifier cette condition pour les suites $\mathcal{E}$-exactes $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$, vu la décomposition de toute suite $\mathcal{E}$-exacte en suites $\mathcal{E}$-exactes à trois termes.

Nous allons prouver l'existence de A-modules $\mathcal{E}$-injectifs. Pour cela considérons un K-module U quelconque et formons $A \otimes U = I$. On vérifie immédiatement que l'application $\Delta_A \otimes 1_U$ de I dans $A \otimes I$ vérifie les axiomes des A-modules. On a alors le lemme suivant :

LEMME 1.- Soit h_U l'application K-linéaire $P_U \circ (\varepsilon_A \otimes 1_U)$ de I dans U . Pour tout A-module M et toute application K-linéaire f de M dans U , il existe un A-homomorphisme $\overline{f}$ de M dans I et un seul tel que :

$$f = h_U \circ \overline{f} \tag{12}$$

Soit $f \in L_K(M\ ,\ U)$ et soit $\overline{f} = \varphi_U(f) = (1_A \otimes f) \circ \Delta_M$; $\overline{f}$ est une application K-linéaire de M dans I . De plus,

$$\begin{aligned}(1_A \otimes \overline{f}) \circ \Delta_M &= (1_A \otimes 1_A \otimes f) \circ (1_A \otimes \Delta_M) \circ \Delta_M = \\ &= (1_A \otimes 1_A \otimes f) \circ (\Delta_A \otimes 1_M) \circ \Delta_M = (\Delta_A \otimes f) \circ \Delta_M\end{aligned}$$

$$\Delta_I \circ \overline{f} = (\Delta_A \otimes 1_U) \circ \overline{f} = (\Delta_A \otimes f) \circ \Delta_M$$

ce qui prouve que $\overline{f}$ est un A-homomorphisme et que φ_U applique $L_K(M\ ,\ U)$ dans $\mathrm{Hom}_A(M\ ,\ I)$.

Soit Ψ_U l'application $g \longrightarrow h_U \circ g$ de $\mathrm{Hom}_A(M\ ,\ I)$ dans $L_K(M,U)$. On va montrer que les applications φ_U et Ψ_U sont réciproques :

a) $\Psi_U \circ \varphi_U$ est l'identité : dans le diagramme ci-dessous, les deux carrés sont trivialement commutatifs, le triangle de gauche est commutatif par la formule (7) et celui de droite est commutatif par construction. On en déduit que $f = h_U \circ (1_A \times f) \circ \Delta_M = \Psi_U(\varphi_U(f))$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rrr, "f"] \arrow[dd, "\Delta_M"'] & & & U \\
& K \otimes M \arrow[ul, "P_M"'] \arrow[r, "1_K \otimes f"] & K \otimes U \arrow[ur, "P_U"] & \\
A \otimes M \arrow[ur, "\varepsilon_A \otimes 1_M"'] \arrow[rrr, "1_A \otimes f"'] & & & A \otimes U \arrow[ul, "\varepsilon_A \otimes 1_U"] \arrow[uu, "h_U"']
\end{tikzcd}$$

b) $\varphi_U \circ \Psi_U$ est l'identité : on a en effet pour $g \in \mathrm{Hom}_A(M\ ,\ I)$

$$\begin{aligned}\varphi_U(\Psi_U(g)) &= (1_A \otimes (h_U \circ g)) \circ \Delta_M \\ &= (1_A \otimes P_U) \circ (1_A \otimes \varepsilon_A \otimes 1_U) \circ (1_A \otimes g) \circ \Delta_M\end{aligned}$$

$$= (P_1 \otimes 1_U) \circ (1_A \otimes \mathcal{E}_A \otimes 1_U) \circ (\Delta_A \otimes 1_U) \circ g$$
$$= (1_A \otimes 1_U) \circ g = g \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Posons $T'_U(M) = L_K(M, U)$ pour tout A-module M, et pour tout $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ soit $T'_U(f)$ l'application $g \longrightarrow g \circ f$ de $T'_U(N)$ dans $T'_U(M)$: on a défini un foncteur additif contravariant T'_U de la catégorie $\mathcal{C}_A$ dans la catégorie $\mathcal{O}_K$. De plus, les applications Ψ_U définies précédemment définissent une équivalence du foncteur T_I sur le foncteur T'_U ; comme toute suite $\mathcal{E}$-exacte de A-modules se décompose en tant que suite exacte de K-module, le foncteur T'_U transforme une suite $\mathcal{E}$-exacte en une suite exacte, et par suite le foncteur T_I est exact : le A-module $I = A \otimes U$ est $\mathcal{E}$-injectif.

7.- Résolutions.

Un complexe $\mathcal{M}$ de A-modules est défini par la donnée d'une famille $(M_i)_{i\in \mathbb{Z}}$ de A-modules et d'une famille de A-homomorphismes $d_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}$ tels que $d_{i+1} \circ d_i = 0$. Soient $\mathcal{M} = (M_i, d_i)$ et $\mathcal{M}' = (M'_i, d'_i)$ deux complexes et soit F_s l'ensemble des familles de A-homomorphismes $f = (f_i)$, $f_i : M_i \longrightarrow M'_{i+s}$. Si $f \in F_s$, on définit $\delta f \in F_{s+1}$ par la formule :

$$(13) \qquad (\delta f)_i = d'_{i+s} \circ f_i + (-1)^{s+1} f_{i+1} \circ d_i$$

et l'on vérifie facilement que $\delta(\delta f) = 0$.

Un élément $f \in F_s$ tel que $\delta f = 0$ i.e. $f_{i+1} \circ d_i = (-1)^s d'_i \circ f_i$ s'appelle un homomorphisme de degré s de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$ et l'on dit que deux homomorphismes f et g de degré s de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$ sont homotopes si $f - g = \delta k$ avec $k \in F_{s-1}$.

Soit M un A-module ; nous appellerons résolution $\mathcal{M}$ de M un complexe de A-modules tel que $M_i = 0$ pour $i < -1$ et $M_{-1} = M$. Une résolution $\mathcal{M}$ de M est dite $\mathcal{E}$-acyclique si la suite

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \cdots$$

est $\mathcal{E}$-exacte ; elle est dite $\mathcal{E}$-injective si les A-modules M_i sont $\mathcal{E}$-injectifs pour $i \geqslant 0$.

Nous nous contenterons pour l'instant d'un lemme d'existence et nous appliquerons les notions précédentes à la définition de la cohomologie dans l'exposé suivant :

<u>LEMME 2.</u>– <u>Pour tout A-module</u> M , <u>il existe une résolution</u> $\mathcal{E}$-<u>acyclique et</u> $\mathcal{E}$-<u>injective de</u> M .

Raisonnons par récurrence et supposons construite une suite $\mathcal{E}$-exacte $0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_{-1}} M_0 \xrightarrow{d_0} M_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d_{i-1}} M_i$, où les A-modules M_i pour $i \geqslant 0$ sont $\mathcal{E}$-injectifs. Pour $i = -1$, il n'y a rien à prouver. Soit P le A-module quotient de M_i par l'image de d_{i-1} ; on a donc une suite $\mathcal{E}$-exacte :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_i \longrightarrow P \longrightarrow 0 \tag{14}$$

Posons de plus $M_{i+1} = A \otimes P$, la structure de A-module de M_{i+1} étant définie par l'application $\Delta_{M_{i+1}} = \Delta_A \otimes 1_P$. Le A-module M_{i+1} est $\mathcal{E}$-injectif d'après le n° 6 . De plus, la formule (6) exprime que l'application Δ_P de P dans M_{i+1} est un homomorphisme de A-modules et la formule (7) montre que $h_P \circ \Delta_P = 1_P$, donc que l'on a une suite exacte de K-modules $0 \longrightarrow P \longrightarrow M_{i+1}$ qui se décompose ; autrement dit, on a une suite $\mathcal{E}$-exacte :

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow M_{i+1} \tag{15}$$

Tenant compte de (14) et (15), on a bien construit une suite $\mathcal{E}$-exacte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i+1}$$

formée de A-modules $\mathcal{E}$-injectifs, à l'exception de M bien entendu.

C.Q.F.D.

<u>REMARQUE</u>.– On voit facilement que si M est un A-module $\mathcal{E}$-injectif, pour toute suite $\mathcal{E}$-exacte $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} P$, f applique M sur un sous-A-module de P admettant un sous-A-module supplémentaire. Appliquant ceci avec la suite exacte $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\Delta_M} A \otimes M$, on voit facilement que les A-modules $\mathcal{E}$-injectifs ne sont autres que les facteurs directs des A-modules de la forme $A \otimes U$ étudiés au n° 6 .