P. Cartier

Hyperalgèbres et groupes formels

Séminaire "Sophus Lie", tome 2 (1955-1956), exp. nº 2, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1955-1956__2__A4_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire "Sophus LIE"
Année 1955/1956
-:-:-:-

Exposé n° 2

HYPERALGÈBRES ET GROUPES FORMELS

(Exposé de P. CARTIER, le 27.1.56)

1.- Hyperalgèbres.

Dans cet exposé, K désigne un anneau commutatif unitaire.

Définition 1 : On appelle hyperalgèbre sur K une K-algèbre U associative, unitaire, augmentée, filtrée, munie d'une application diagonale vérifiant les axiomes suivants.

(HA_1) L'augmentation $\varepsilon : U \longrightarrow K.1$ est un K-homomorphisme unitaire ; on a donc $U = U^+ \oplus K.1$, U^+ désignant le noyau de ε .

(HA_2) L'application diagonale $\Delta : U \longrightarrow U \otimes_K U$ est un homomorphisme unitaire de U dans $U \otimes U$ possédant les propriétés suivantes :

a) I désignant l'automorphisme identique de Δ , on a :

(1) $$(I \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes I) \circ \Delta$$

L'égalité des 2 applications de U dans $U \otimes U \otimes U$ exprimée par (1) s'énoncera en disant que Δ est associatif.

b) S désignant l'involution $a \otimes b \longrightarrow b \otimes a$ de $U \otimes U$, on a :

(2) $$S \circ \Delta = \Delta .$$

Autrement dit, Δ est commutative.

c) $P : U \otimes U \longrightarrow U$ désignant l'application $a \otimes b \longrightarrow ab$ déduite du produit, on a :

(3) $$P \circ (I \otimes \varepsilon) \circ \Delta = P \circ (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta = I$$

Autrement dit, Δ est compatible avec l'augmentation.

(HA_3) Il existe une filtration d'algèbre croissante de U par des sous-modules $U_{(n)}$, $n = 0 , 1 , \ldots$, qui vérifie :

(4) $$U_{(0)} = K.1$$

(5) $$\Delta U_{(n)} \quad \sum_{0 \leq p \leq n} U_{(p)} \otimes U_{(n-p)}$$, pour tout $n \geq 0$, où

$U_{(p)} \otimes U_{(n-p)}$ est un abus d'écriture pour désigner l'image canonique de $U_{(p)} \otimes U_{(n-p)}$ dans $U \otimes U$.

Rappelons que, pour définir une filtration d'algèbre croissante, les sous-modules $U_{(n)}$ doivent vérifier :

(6) $$U_{(0)} \subset U_{(1)} \subset \cdots \subset U_{(n)} \subset U_{(n+1)} \subset \cdots$$

(7) $$U = \bigcup_{n \geqslant 0} U_{(n)}$$

(8) $$U_{(m)} U_{(n)} \subset U_{(m+n)} \quad \text{pour tous } m , n .$$

Lemme 1 :

a) Δ est un monomorphisme.

b) si $u \in U^+$, $\delta u = \Delta u - u \otimes 1 - 1 \otimes u \in U^+ \otimes U^+$

Démonstration :

a) résulte immédiatement de (3) .

(HA_1) entraîne la décomposition en somme directe :

$$U \otimes U = U^+ \otimes \bar{U}^+ + U^+ \otimes 1 + 1 \otimes U^+ + K . 1 \otimes 1 .$$

Soit $u \in U^+$; posons $\Delta u = u_1 \otimes 1 + 1 \otimes u_2 + k\, 1 \otimes 1 + u'$, avec $u_1 , u_2 \in U^+$, $k \in K$, $u' \in U^+ \otimes U^+$. Nous avons :

$$P \circ (I \otimes \mathcal{E}) \circ \Delta u = u_1 + k.1 \text{ , et, de même,}$$
$$P \circ (\mathcal{E} \otimes I) \circ \Delta u = u_2 + k.1 .$$

D'où, d'après (3), $u_1 = u_2 = u$, $k = 0$, ce qui équivaut à b) .

Lemme 2 : Posons, pour tout $n \geqslant 0$, $U^+_{(n)} = U_{(n)} \cap U^+$. Alors :

a) pour tout $n \geqslant 0$, $U_{(n)} = U^+_{(n)} \oplus K.1$.

b) si $u \in U^+_{(n)}$, $\delta u = \Delta u - u \otimes 1 - 1 \otimes u \in \sum_{1 \leq p \leq n-1} U^+_{(p)} \otimes U^+_{(n-p)}$.

Démonstration : a) résulte de $U_{(n)} \supset U_{(0)} = K.1$ et de (HA_1) .

D'autre part, il résulte de (HA_3) et de a) que :

$$\Delta U_{(n)} \subset 1 \otimes U_{(n)} + U_{(n)} \otimes 1 + \sum_{1 \leq p \leq n-1} U^+_{(p)} \otimes U^+_{(n-p)} .$$

Le lemme 1,b entraîne b . Ce dernier résultat va nous permettre de définir une filtration (U_n) qui vérifiera (HA_3) et sera maximale en ce sens que $U_{(n)} \subset U_n$ pour tout $n \geqslant 0$, quelle que soit la filtration $(U_{(n)})$ vérifiant l'axiome (HA_3) .

Posons, comme définition <u>par récurrence</u> :

$$(9)\quad \begin{cases} U_0^+ = (0) \\ u \in U_n^+ \Longleftrightarrow u \in U^+ \quad \text{et} \quad \delta u \in \sum_{1 \leq p \leq n-1} U_p^+ \otimes U_{n-p}^+ \\ U_n = K.1 + U_n^+ \quad , \text{ pour tout } \; n \geq 0 \end{cases}$$

Le lemme 2,b entraîne, par récurrence $U_{(n)} \subset U_n$.

Les relations $U_0 = K.1 \subset U_1 \subset \dots \subset U_n \subset \dots$ s'établissent immédiatement, ainsi que

$$\Delta U_n \subset \sum_{0 \leq p \leq n} U_p \otimes U_{n-p} \quad .$$

Réciproquement, soit $u \in U^+$, tel que $\delta u \in \sum_{1 \leq p \leq n-1} U_p \otimes U_{n-p}$.

On déduit immédiatement du lemme 1,b que $\delta u \in \sum_{1 \leq p \leq n-1} U_p^+ \otimes U_{n-p}^+$, donc $u \in U_n^+$.

Démontrons par récurrence que $U_m U_n \subset U_{m+n}$, en supposant cette propriété exacte pour $m \leq j$, $n \leq k$, $m + n \neq j + k$ (elle est évidente pour m ou $n = 0$). Si $u \in U_j^+$, $v \in U_k^+$,

$$\Delta uv = (\Delta u)(\Delta v) \in \Big(\sum_{0 \leq m \leq j} U_m^+ \otimes U_{j-m}^+ \Big) \Big(\sum_{0 \leq n \leq k} U_n^+ \otimes U_{k-n}^+ \Big) \quad .$$

On déduit de l'hypothèse de récurrence que

$$\Delta uv \subset \sum_{1 \leq p \leq i+j-1} U_p^+ \otimes U_{i+j-p}^+ + U_j^+ U_k^+ \otimes 1 + 1 \otimes U_j^+ U_k^+ \quad ,$$

d'où (lemme 1) , $\delta uv \subset \sum_{1 \leq p \leq i+j-1} U_p^+ \otimes U_{i+j-p}^+$, et $uv \in U_{i+j}^+$.

Il en résulte $U_i U_j = U_i^+ U_j^+ + U_i^+ + U_j^+ + K1 \subset U_{i+j}$.

Nous voyons donc que les (U_n) constituent une filtration de U . L'axiome (HA_3) pourrait donc être remplacé par le suivant : $\bigcup_{n \geq 0} U_n = U$. Nous ne considèrerons désormais que la filtration (U_n) .

2.- <u>Dualité des hyperalgèbres</u>.

Pour éviter des complications inutiles, nous imposerons à une hyperalgèbre U la condition suivante :

(HA_4) U <u>est un</u> K-<u>module libre de base</u> $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$; <u>chacun des sous-modules</u> U_n <u>de la filtration canonique est engendré par une partie de la base</u> $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Cet axiome appliqué à $U_0 = K.1$, implique que l'un des e_α est un scalaire inversible.

Nous désignerons par V le dual du K-module U . La valeur de $v \in V$ pour $u \in U$ sera notée $\langle v , u \rangle (\in K)$. Soit $e^*_\alpha \in V$ défini par $\langle e^*_\alpha , e_\beta \rangle = 0$ si $\beta \neq \alpha$, $\langle e^*_\alpha , e_\alpha \rangle = 1$. Le module V s'identifie au produit direct $\prod_{\alpha \in A} K.e^*_\alpha$. Nous introduisons sur V la topologie produit des topologies discrètes sur les facteurs $K.e^*_\alpha$. On vérifie que cette topologie n'est autre que la topologie de la convergence simple $\sigma(V , U)$, avec la topologie discrète sur K . Le module V est évidemment complet, et ses éléments s'écrivent univoquement $\sum_{\alpha \in A} k_\alpha e^*_\alpha$, où les $k_\alpha \in K$ sont quelconques.

Réciproquement, soit u' une forme K-linéaire continue sur V . Elle est entièrement définie par ses valeurs sur les e^*_α qui constituent un ensemble total dans V . Elle est continue si et seulement si u' s'annule sur tous les e^*_α à l'excpetion d'un nombre fini d'entre eux. Les remarques montrent que <u>le dual de</u> V <u>s'identifie à</u> U .

Le produit tensoriel $U \otimes U$ admet la base $(e_\alpha \otimes e_\beta)_{(\alpha,\beta) \in A^2}$.
Nous avons, comme dans le cas général, un homomorphisme naturel de $V \otimes V$ dans le dual de $U \otimes U$. Les considérations précédentes montrent que cet homomorphisme est injectif ; nous identifierons $V \otimes V$ à un sous-module du dual de $U \otimes U$; ce dernier sera noté $V \hat{\otimes} V$. Le module $V \hat{\otimes} V$, muni de sa topologie de convergence simple peut-être considéré comme le <u>complété</u> de $V \otimes V$. La topologie induite sur $V \otimes V$ se définit directement par le système fondamental de voisinages de 0 : $V \otimes J + J \otimes V$, J parcourant un système fondamental de voisinages de 0 dans V . Le dual de $V \hat{\otimes} V$ est $U \otimes U$.

Nous pouvons alors <u>transposer</u> les applications Δ , P , ε , S .

P :	$U \otimes U \longrightarrow U$	a comme transposé	Δ' :	$V \longrightarrow V \hat{\otimes} V$
Δ :	$U \longrightarrow U \otimes U$	a comme transposé	P' :	$V \hat{\otimes} V \longrightarrow V$
ε :	$U \longrightarrow U$	a comme transposé	ε' :	$V \longrightarrow V$
S :	$U \otimes U \longrightarrow U \otimes U$	a comme transposé	S' :	$V \hat{\otimes} V \longrightarrow V \hat{\otimes} V$

Nous noterons I' l'application identique de V (transposée de I) .

L'associativité de P se traduit par :

$$P \circ (I \otimes P) = P \circ (P \otimes I) \tag{9}$$

D'où, par transposition :[1]

$$(I' \otimes \Delta') \circ \Delta' = (\Delta' \otimes I') \circ \Delta' \ , \tag{10}$$

c'est-à-dire l'associativité de l'application diagonale Δ' (Cf. (1)) .

De même, transposant (1), nous obtenons :

$$P' \circ (P' \otimes I') = P' \circ (P' \otimes I') \ , \tag{11}$$

c'est-à-dire l'associativité du produit P' ; V devient ainsi une algèbre associative. Transposant (2), nous avons :

$$P' \circ S' = P' \ , \tag{12}$$

ce qui signifie que l'algèbre V est commutative.

Désignons par e l'élément de V défini par $\varepsilon u = \langle e , u \rangle\ 1$ pour $u \in U$.

Nous avons, pour tous $v \in V$, et $u , u' \in U$:

$$\langle e \otimes v \ , \ u \otimes u' \rangle = \langle e , u \rangle \langle v , u' \rangle = \langle v , P \circ (\varepsilon \otimes I)(u \otimes u') \rangle$$

D'où $\langle e \otimes v , \Delta u \rangle = \langle v , u \rangle$, d'après (3) , et $P'(e \otimes v) = v$.
On démontre de même que e est unité à droite. L'algèbre V est donc unitaire; l'unité e sera notée (abusivement) 1 .

L'application $\varepsilon' : V \longrightarrow V$ est un projecteur ($\varepsilon \circ \varepsilon = \varepsilon$ se transpose en $\varepsilon' \circ \varepsilon' = \varepsilon'$). Pour $v \in V$, $u \in U$, on a :

$$\langle \varepsilon' v \ , u \rangle = \langle v , \varepsilon u \rangle = \langle v , \langle 1 , u \rangle . 1 \rangle = \langle 1 , u \rangle \langle v , 1 \rangle$$

d'où $\varepsilon' v = \langle v , 1 \rangle . 1$, ce qui montre que ε' est une augmentation.

Nous définissons les sous-modules V_n de V $(n = 0 , 1 , \ldots)$ en posant $v \in V_n$ si et seulement si $\langle v , U_{n-1} \rangle = (0)$; par convention, $U_{-1} = (0)$.

Ainsi $V_0 = V \supset V_1 \supset \ldots \supset V_n \supset \ldots$

Comme $\bigcup_{n \geq 0} U_n = U$, $\bigcap_{n \geq 0} V_n = (0)$.

---

(1) Nous laissons au lecteur le soin de formuler plus précisément les énoncés concernant le module $V \hat{\otimes} V \hat{\otimes} V$.

La relation (4) signifie que V_1 <u>est le noyau de</u> ε' .

Soient $v \in V_m$, $v' \in V_n$. Nous avons

$$< P'(v \otimes v'), u > = < v \otimes v' , \Delta u > .$$

Si $u \in U_{m+n-1}$, $\Delta u \in \sum_{j+k=m+n-1} U_j \otimes U_k$; comme $j + k = m + n - 1$, $j \leqslant m - 1$ ou $k \leqslant n - 1$; il en résulte :

(13) $$V_m V_n \subset V_{m+n} \quad , \text{ pour tous } m , n \geqslant 0 .$$

En particulier, les V_n sont des <u>idéaux bilatères</u>. Il est clair que les V_n sont engendrés (en tant que sous-modules fermés) par des parties de l'ensemble $(e^*_\alpha)_{\alpha \in A}$.

La topologie de V n'est pas définie, en général, par les V_n . Elle admet comme système fondamental de voisinages de 0 les orthogonaux des sous-espaces de type fini de U . Or tout sous-espace de type fini M de U est contenu dans un sous-espace M engendré par un nombre fini d'éléments basiques (e_α) , et vérifiant de plus : $\Delta M \subset M \otimes M$.

Démontrons ce résultat par récurrence sur n , n étant le plus petit entier tel que $M_0 \subset U_n$ (un tel entier existe parceque M_0 est de type fini). Nous pouvons supposer, en remplaçant éventuellement M_0 par un sous-module de type fini qui le contient, que M_0 est engendré par $M_0 \cap U_{n-1}$ et par un nombre fini de $e_\alpha \in U_n - U_{n-1}$, soit l'ensemble $(e_\beta)_{\beta \in B}$, $B \subset A$. Supposons également que $1 \in M_0$. Soit $M_1 \subset U_{n-1}$ un sous-module de type fini de U_{n-1} , contenant $M_0 \cap U_{n-1}$, et tel que $\delta e_\beta \in M_1 \otimes M$, pour $\beta \in B$. Soit M_2 un sous-module de type fini contenant M_1 engendré par des éléments basiques et tel que $\Delta M_2 \subset M_2 \otimes M_2$ (un tel module existe, par l'hypothèse de récurrence). Il suffit de prendre M engendré par M_2 et les $(e_\beta)_{\beta \in B}$.

Soit M^* l'orthogonal de M ; M^* est un idéal. En effet, si $v \in M^*$, $v' \in V$, $u \in M$, on a $< vv' , u > = < v \otimes v' , \Delta u > = 0$, car $\Delta u \in M \otimes M$.

Ainsi la topologie de V est définie par un système fondamental de voisinage de 0 , constituée par des idéaux bilatères de codimension finie, engendré par des éléments basiques e^*_α . Soit J un tel idéal ; son orthogonal est contenu dans un U_{n-1} ; donc $V_n \subset J$, et, a fortiori, $(V_1)^n \subset J$.