P. Cartier

Théorie des caractères II. Détermination des caractères

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 19 et 20, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A22_0>

Séminaire "Sophus LIE"
E.N.S., 1954/55
-:-:-:-

Exposés n^{os} 19 et 20

THÉORIE DES CARACTÈRES II.

DÉTERMINATION DES CARACTÈRES.

(Exposés de P. CARTIER, le 26.4.55
et le 3.5.55)

Les notations sont les mêmes que dans l'exposé précédent

1.- Lemmes sur les racines.

Lemme 1 : La symétrie S_i associée à la racine simple α_i permute entre elles les racines positives différentes de α_i et change α_i en $-\alpha_i$.

Soit α une racine positive quelconque $\neq 0$, soit $\alpha = \sum_j m_j \alpha_j$.
On a $S_i\alpha = \alpha - m\alpha_i = (m_i - m)\alpha_i + \sum_{j \neq i} m_j d_j$ avec $m = 2\langle \alpha, \alpha_i \rangle / \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$.
Comme les α_j forment un système fondamental de racines, les coefficients des α_j dans l'expression de $S_i\alpha$ sont de même signe ; si alors $m_i \leq m$, les autres coefficients sont ≤ 0, mais comme les m_j sont ≥ 0 puisque α est > 0 c'est que $m_j = 0$ dès que $j \neq i$ donc α est proportionnelle à α_i et elle lui est nécessairement égale. Si $m_i > m$ alors les coefficients de $S_i\alpha$ sont ≥ 0 et $S_i\alpha$ est une racine positive. Enfin on sait que $S_i\alpha_i = -\alpha_i$.

Lemme 2 : Si ρ est la demi-somme des racines positives, $\rho(H_i) = 1$
on a $S_i\rho = \rho - \rho(H_i)\alpha_i$. D'autre part, d'après le lemme 1, S_i permute tous les termes de l'expression de ρ, à l'exception de $\frac{1}{2}\alpha_i$ qui devient $-\frac{1}{2}\alpha_i$, donc $S_i\rho = \rho - \alpha_i$ et il en résulte que $\rho(H_i) = 1$.

Lemme 3 : Pour qu'une forme linéaire λ sur $\mathfrak{h}$ soit plus grande que toutes ses transformées par le groupe de Weyl, il faut et il suffit que l'on ait $\lambda(H_i) > 0$ pour tout i.

La condition est nécessaire, car si l'on avait $\lambda(H_i) \leq 0$, on aurait $S_i\lambda = \lambda - \lambda(H_i)\alpha_i \succcurlyeq \lambda$ contrairement à ce qui a été supposé. Elle est aussi suffisante : en effet supposons que $\lambda(H_i) > 0$ et démontrons que $\lambda > \sigma.\lambda$ pour toute transformation $\sigma \neq e$ appartenant au groupe de Weyl W.

Ceci est vrai pour $\sigma = S_i$ car $\lambda > S_i\lambda = \lambda - \lambda(H_i)\alpha_i$; on va alors le démontrer par récurrence sur p pour le produit de p symétries S_i ce qui suffira puisque le groupe W est engendré par les S_i. Supposons donc démontrée l'inégalité $\lambda > \sigma . \lambda$ lorsque σ est le produit de $q < p$ symétries S_i et soit $\sigma = S_{i_1} \dots S_{i_p} = \tau . S_{i_p}$; on a $\sigma . \lambda = \tau S_{i_p} \lambda = \tau.\lambda - \lambda(H_{i_p})\tau\alpha_{i_p}$. Or de deux choses l'une : ou bien $\tau\alpha_{i_p}$ est une racine positive et alors $\tau.\lambda < \sigma.\lambda$ et $\sigma.\lambda < \lambda$, ou bien $\tau\alpha_{i_p} < 0$. Soit alors k le plus petit indice tel que $\beta_\ell = S_{i_\ell} S_{i_{\ell+1}} \dots S_{i_{p-1}}\alpha_{i_p} > 0$ pour $\ell \geq k$; on a $k > 1$ puisque $\tau\alpha_{i_p} < 0$ donc $\beta_k > 0$ et $\beta_{k-1} = S_{i_{k-1}}\beta_k < 0$. D'après le lemme 1 ceci implique l'égalité de β_k et de $\alpha_{i_{k-1}}$, finalement $\tau = \tau' S_{i_{k-1}} \tau''$ avec $\tau''\alpha_{i_p} = \alpha_{i_{k-1}}$. Mais il est clair que $\tau'' S_\alpha \tau''^{-1}$ est pour toute racine α la symétrie par rapport à l'hyperplan orthogonal à $\tau''\alpha$, donc $\tau'' S_\alpha \tau''^{-1} = S_{\tau''\alpha}$ et $\tau'' S_{i_p} = S_{i_{k-1}} \tau''$; comme le carré de $S_{i_{k-1}}$ est l'identité, il en résulte que $\sigma = \tau' \tau''$ est le produit de $p-2$ symétries S_i et par conséquent, dans ce cas aussi $\sigma\lambda < \lambda$ si $\sigma \neq e$.

2.- <u>Digression sur les exponentielles</u>.

On désigne par P le groupe additif des formes linéaires λ sur $\mathfrak{h}$ telles que $\lambda(H_i)$ soit entier et par P_+ le sous-monoïde défini par les inégalités $\lambda(H_i) \geq 0$. Soit A l'algèbre du groupe P à coefficients dans K et $\{e^\lambda\}$ la base canonique de A ; on a donc $e^\lambda . e^\mu = e^{\lambda+\mu}$. Le sous-anneau de A formé des combinaisons linéaires des e^λ avec $\lambda \in P_+$ a des générateurs algébriquement indépendants qui sont e^{λ_i} ($\lambda_i(H_j) = \delta_{ij}$) donc c'est un anneau d'intégrité qui est même factoriel. A peut s'identifier à l'anneau des fractions de B par rapport à l'ensemble multiplicativement clos des e^λ ($\lambda \in P_+$), donc c'est aussi un anneau d'intégrité qui est factoriel.

On considère en plus le module $M = A \otimes \mathfrak{h}^*$ sur l'anneau A. On définit un produit scalaire sur M par la convention

$\langle a \otimes \lambda , b \otimes \mu \rangle = ab \langle \lambda , \mu \rangle$ puis un opérateur Δ sur A (laplacien) par $\Delta(e^\lambda) = \langle \lambda , \lambda \rangle e^\lambda$ et un opérateur g ("gradient") de A dans M par la convention $g(e^\lambda) = e^\lambda \otimes \lambda$. On a alors les formules suivantes :

(1) $\quad g(ab) = b.g(a) + a.g(b)$

(2) $\quad \Delta(ab) = a\Delta(b) + 2 \langle g(a) , g(b) \rangle + \Delta(a)b$

En effet on vérifie immédiatement ces égalités lorsque $a = e^\lambda$, $b = e^\mu$, la deuxième par exemple provenant de l'identité $\langle \lambda + \mu , \lambda + \mu \rangle = \langle \lambda , \lambda \rangle + 2 \langle \lambda , \mu \rangle + \langle \mu , \mu \rangle$ et le cas général s'en déduit par linéarité.

Il nous reste à faire agir W sur l'algèbre A , ce que l'on fait par la convention $\sigma . e^\lambda = e^{\sigma . \lambda}$. Un élément $\sigma \in W$ est une transformation orthogonale de $\mathfrak{h}^*$ donc possède un déterminant qui est égal à ± 1 . Un élément de A , soit a , sera dit symétrique ou antisymétrique suivant que l'on a $\sigma . a = a$ ou $\sigma . a = \det \sigma . a$; pour que a soit symétrique, il faut et il suffit que $S_i a = a$ pour tout i et pour qu'il soit antisymétrique, il faut et il suffit que $S_i a = -a$ puisque $\det S_i = -1$ et que les S_i engendrent W .

Soit w l'ordre du groupe W et Q l'opérateur de A défini par

(3) $$Q.a = \sum_{\sigma \in W} \det \sigma \, \sigma . a$$

Si a est quelconque, on a $\sigma . Q . a = \sum_{\sigma'} \det \sigma' . \sigma\sigma' . a = (\det \sigma)^{-1} Q.a$ donc $Q.a$ est antisymétrique et si a est antisymétrique $Q.a = wa$, ce qui prouve, puisque K est de caractéristique 0 , que Q applique A sur le sous-espace des éléments antisymétriques. Il en résulte que tout élément antisymétrique de A est combinaison linéaire des $Q.e^\lambda = \sum_\sigma \det \sigma \; e^{\sigma . \lambda}$; on peut évidemment se limiter aux λ tels que $\lambda \geqslant \sigma . \lambda$ pour tout $\sigma \in W$, donc en tout cas aux λ tels que $\lambda(H_i) \geqslant 0$ (car $\lambda \geqslant S_i \lambda$) . Mais si pour un i donné on a $\lambda(H_i) = 0$ on a $S_i \lambda = \lambda$ et par suite si l'on fait une partition $W = T \cup T.S_i$, on a $Q.e^\lambda = \sum_{\sigma \in T} (\det \sigma \, e^{\sigma . \lambda} + \det(\sigma S_i) e^{\sigma S_i \lambda}) = 0$ puisque le déterminant de S_i est -1 . Finalement <u>tout élément antisymétrique de</u> A <u>s'écrit comme combinaison linéaire des</u> $Q.e^\lambda$ <u>pour les</u> λ <u>tels que</u> $\lambda(H_i) > 0$.

Soit α une racine et $a \in A$ tel que $S_\alpha a = -a$; il est clair que a est combinaison linéaire de termes de la forme

$e^{\lambda} - S_{\alpha} e^{\lambda} = e^{\lambda} - e^{\lambda - \lambda(H_{\alpha})\alpha} = e^{\lambda}(1 - (e^{-\alpha})^{\lambda(H_{\alpha})})$ car $\lambda(H_{\alpha})$ est un entier. Il est alors clair que $e^{\lambda} - S_{\alpha} e^{\lambda}$ est divisible par $1 - e^{-\alpha}$, donc aussi que a est divisible par $1 - e^{-\alpha}$. Si a est antisymétrique, il est divisible par tous les éléments $1 - e^{-\alpha}$, premiers entre eux, donc par leur produit puisque A est un anneau factoriel et donc aussi par

$$\prod_{\alpha > 0} (e^{\frac{1}{2}\alpha} - e^{-\frac{1}{2}\alpha}) = e^{+\rho} \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-\alpha}) = D .$$

D est antisymétrique car d'après le lemme 1, S_i permute entre eux les facteurs de D à l'exception de $e^{\frac{1}{2}\alpha_i} - e^{-\frac{1}{2}\alpha_i}$ qui est changé en $e^{-\frac{1}{2}\alpha_i} - e^{\frac{1}{2}\alpha_i} = -(e^{\frac{1}{2}\alpha_i} - e^{-\frac{1}{2}\alpha_i})$ donc $S_i D = -D$ et D est bien antisymétrique. Les exposants du développement de D en combinaison linéaire des e^{λ} sont compris entre ρ et $-\rho$, donc D est combinaison linéaire des $Q.e^{\lambda}$ avec $\rho \geqslant \lambda \geqslant -\rho$; mais chacun de ces $Q.e^{\lambda}$ étant antisymétrique est divisible par D : $Q.e^{\lambda} = b.D$. Or le "plus haut" terme de b.D est le produit des plus hauts termes de b et de D et de même pour le "plus bas" terme donc l'intervalle des termes de b.D est somme des intervalles correspondants pour b et D et ceci est manifestement impossible si $\rho > \lambda > -\rho$ et $b \neq 0$ et cela implique que b est constant si $\lambda = \rho$. Donc D est proportionnel à $Q.e^{\rho}$ et lui est même égal puisque dans D et dans $Q.e^{\rho}$, le terme de plus haut rang est égal à e^{ρ} .

Soit finalement a symétrique, donc a.D antisymétrique est combinaison linéaire des $Q.e^{\lambda}$ avec $\lambda(H_i) > 0$ (donc $\geqslant 1$) autrement dit a.D est combinaison linéaire des $Q.e^{\lambda+\rho}$ ($\lambda \in P_+$) et a <u>est combinaison linéaire des</u> $Q.e^{\lambda+\rho}/Q.e^{\rho}$ puisque $D = Q.e^{\rho}$ et que $Q.e^{\lambda+\rho}$ étant antisymétrique est divisible par D .

3.- Caractères des représentations de dimension finie.

Soit (ρ, V) une représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{g}$ ayant Λ pour poids dominant, $m_{\lambda} = \dim V_{\lambda}$ la multiplicité du poids λ de V . Si h est un élément de $U(\mathfrak{h}) \subset U(\mathfrak{g})$, l'opérateur $\rho(h)$ est scalaire dans V_{λ}, sa valeur étant $f_{\lambda}(h) = \langle h, e^{\lambda} \rangle$ (e^{λ} est la forme linéaire $\sum_{m \geqslant 0} (m!)^{-1} \lambda^m$ sur $U(\mathfrak{h})$) donc

$Tr_V(\rho(h)) = \sum_{\lambda} m_{\lambda} f_{\lambda}(h) = \langle h, \sum_{\lambda} m_{\lambda} e^{\lambda} \rangle$ et $\dim V = \sum_{\lambda} m_{\lambda}$. Ceci nous conduit donc à étudier l'élément $\Psi_{\Lambda} = \sum_{\lambda} m_{\lambda} e^{\lambda}$ <u>de l'algèbre</u> A ;

on sait que c'est un élément symétrique de A puisque deux poids de V conjugués par le groupe de Weyl ont même multiplicité, donc Ψ_Λ est combinaison linéaire des $Q.e^{\lambda+\rho}/Q.e^{\rho}$: on va montrer plus précisément qu'il est égal à $Q.e^{\Lambda+\rho}/Q.e^{\rho}$.

<u>Lemme 4</u> : <u>Les</u> E_α <u>étant choisis dans</u> $\mathfrak{g}^\alpha$ <u>de sorte que</u> $\langle E_\alpha , E_{-\alpha}\rangle = 1$, <u>si l'on pose</u> $t(\lambda,\alpha) = \mathrm{Tr}_{V_\lambda}(\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha}))$, <u>on a</u> :

(4) $$t(\lambda,\alpha) - t(\lambda+\alpha,\alpha) = m_\lambda \langle \lambda , \alpha\rangle$$

On définit deux opérateurs P_+ et P_- dans le sous-espace T somme de V_λ et de $V_{\lambda+\alpha}$ par la condition que pour $x \in V_\lambda$ et $y \in V_{\lambda+\alpha}$, on ait :

(5) $$P_+x = \rho(E_\alpha)x \qquad P_-x = 0 \qquad P_+y = 0 \qquad P_-y = \rho(E_{-\alpha})y$$

On en déduit $([P_+ , P_-])x = -\rho(E_{-\alpha})\rho(E_\alpha)x = \langle\lambda,\alpha\rangle x - \rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})x$

$$([P_+ , P_-])y = \rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})y$$

d'où $0 = \mathrm{Tr}_T([P_+ , P_-]) = \langle\lambda,\alpha\rangle\, m_\lambda - t(\lambda,\alpha) + t(\lambda+\alpha,\alpha)$ ce qui n'est autre chose que la formule (4) .

Si l'on définit des éléments de $\mathfrak{h}$ par les formules $\langle H_i , K_j\rangle = \delta_{ij}$ on a deux bases duales de $\mathfrak{g}$ avec $\{E_\alpha , H_i\}$ d'une part et $\{E_{-\alpha} K_j\}$ d'autre part donc l'élément de Casimir sera $\Gamma = \sum_\alpha E_\alpha E_{-\alpha} + \sum_i H_i K_i$. C'est un élément du centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, et comme la représentation (ρ , V) est irréductible , le lemme de Schur montre que $\rho(\Gamma)$ est un opérateur scalaire $\gamma.1$. On a alors :

$$\gamma.m_\lambda = \mathrm{Tr}_{V_\lambda}(\rho(\Gamma)) = \sum_\alpha \mathrm{Tr}_{V_\lambda}(\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})) + \sum_i \mathrm{Tr}_{V_\lambda}(\rho(H_i)\rho(K_i))$$
$$= \sum_\alpha t(\lambda,\alpha) + \sum_i m_\lambda \lambda(H_i)\lambda(K_i) = \sum_\alpha t(\lambda,\alpha) + m_\lambda\langle\lambda , \lambda\rangle$$

soit finalement

(6) $$m_\lambda(\gamma - \langle\lambda , \lambda\rangle) = \sum_\alpha t(\lambda,\alpha)$$

Considérons le produit $R = \prod_\alpha (e^\alpha - 1)$; on a $R = \prod_{\alpha>0}(e^\alpha-1)(e^{-\alpha}-1) = -D^2$.

Nous allons calculer $R(\gamma\Psi_\Lambda - \Delta(\Psi_\Lambda)) = S$

$$S = \prod_{\beta} (e^{\beta}-1) \sum_{\lambda} m_{\lambda}\, e^{\lambda}(\gamma - \langle \lambda, \lambda \rangle \qquad \text{donc d'après (6)}$$
$$= \prod_{\beta} (e^{\beta}-1) \sum_{\lambda} e^{\lambda} \sum_{\alpha} t(\lambda, \alpha)$$
$$= \sum_{\alpha} \prod_{\beta \neq \alpha} (e^{\beta}-1) \sum_{\lambda} t(\lambda, \alpha)(e^{\lambda+\alpha} - e^{\lambda})$$
$$= \sum_{\alpha} \prod_{\beta \neq \alpha} (e^{\beta}-1) \sum_{\lambda} e^{\lambda+\alpha}(t(\lambda,\alpha) - t(\lambda+\alpha,\alpha)) \qquad \text{donc d'après le lemme 4}$$
$$= \sum_{\alpha} \prod_{\beta \neq \alpha} (e^{\beta}-1) \sum_{\lambda} m_{\lambda} \langle \lambda, \alpha \rangle e^{\lambda+\alpha}$$
$$= \langle (\sum_{\alpha} e^{\alpha} \prod_{\beta \neq \alpha} (e^{\beta}-1) \otimes \alpha, \sum_{\lambda} m_{\lambda} e^{\lambda} \otimes \lambda \rangle$$
$$= \langle g(R), g(\Psi_{\Lambda}) \rangle$$

Autrement dit en divisant par D : $D(\gamma\Psi_{\Lambda} - \Delta(\Psi_{\Lambda})) = 2\langle g(D), g(\Psi_{\Lambda})\rangle$

Dès lors $\gamma(D\Psi_{\Lambda}) = D\,\Delta(\Psi_{\Lambda}) + 2\langle g(D), g(\Psi_{\Lambda})\rangle = \Delta(D\Psi_{\Lambda}) - \Delta(D)\Psi_{\Lambda}$

Or d'une manière générale, $\Delta(Q.e^{\rho}) = \langle \rho, \rho \rangle Q.e^{\rho}$ donc $\Delta(D) = \langle \rho, \rho \rangle D$ et $D.\Psi_{\Lambda}$ est vecteur propre de l'opérateur Δ ; pour calculer la valeur propre correspondante, remarquons que le terme le plus haut de $D.\Psi_{\Lambda}$ est $e^{\Lambda+\rho}$ qui se trouve multiplié par $\langle \Lambda+\rho, \Lambda+\rho\rangle$ par l'opérateur Δ. Comme $D.\Psi_{\Lambda}$ est antisymétrique, on a $w.D.\Psi_{\Lambda} = Q(D.\Psi_{\Lambda}) = \sum_{\sigma}\sum_{\lambda} \det\sigma\, m_{\lambda}\, Q.e^{\lambda+\sigma.\rho}$ et chacun des termes de cette somme est vecteur propre de Δ avec la valeur propre $\langle \lambda+\sigma.\rho, \lambda+\sigma.\rho\rangle$. Comme $D.\Psi_{\Lambda}$ est vecteur propre de Δ avec la valeur propre $\langle \Lambda+\rho, \Lambda+\rho\rangle$, on peut se limiter dans cette somme aux termes pour lesquels $\langle \lambda+\sigma\rho, \lambda+\sigma.\rho\rangle = \langle \Lambda+\rho, \Lambda+\rho\rangle$; or il se trouve qu'on a le résultat suivant :

<u>Lemme 5</u> : <u>Si</u> λ <u>est un poids de</u> V <u>distinct de</u> $\sigma.\Lambda$, <u>on a</u> $|\lambda+\sigma.\rho| < |\Lambda+\rho|$

On a vu en effet à l'exposé 17 (page 6, dernier paragraphe) que λ est conjugué à un poids μ tel que $\mu(H_i) \geq 0$ et que $|\mu| \leq |\Lambda|$; donc $\langle \lambda, \lambda\rangle = \langle \mu, \mu\rangle \leq \langle \Lambda, \Lambda\rangle$. D'autre part $\sigma^{-1}.\lambda$ est un poids de V, donc il est égal à $\Lambda - \sum_i m_i \alpha_i$ où les m_i sont des entiers ≥ 0 ; par suite $\langle \lambda, \sigma.\rho\rangle = \langle \sigma^{-1}.\lambda, \rho\rangle = \langle \Lambda, \rho\rangle - \sum_i m_i \langle \rho, \alpha_i\rangle$ et $|\Lambda+\rho|^2 - |\lambda+\sigma\rho|^2 = |\Lambda|^2 - |\lambda|^2 + \sum_i m_i |\alpha_i|^2$ ce qui est > 0 sauf si les m_i sont tous nuls, i.e. sauf si $\sigma^{-1}.\lambda = \Lambda$. (Noter que d'après le lemme 2, $\rho(H_i) = 2\langle \rho, \alpha_i\rangle / \langle \alpha_i, \alpha_i\rangle = 1$)

Reprenant la formule donnant $D.\Psi_\Lambda$, on peut donc écrire :

$D.\Psi_\Lambda = w^{-1}\sum_\sigma \det^2\sigma\ m_{\sigma.\Lambda} Q.e^{(\Lambda+\rho)} = m_\Lambda Q.e^{\Lambda+\rho}$ et donc

$\Psi_\Lambda = Q.e^{\Lambda+\rho}/Q.e^\rho$ car $m_\Lambda = 1$

Il nous reste à obtenir la valeur de $\dim V = \sum_\lambda m_\lambda$; ce nombre se déduit de Ψ_Λ par la spécialisation $e^\lambda \longrightarrow 1$ de A dans K , spécialisation que nous effectuerons en deux pas, remplaçant d'abord e^λ par la série formelle en T $e^{T\langle\lambda,\rho\rangle}$ puis en faisant correspondre à toute série formelle en T son terme constant. Soit f_μ la spécialisation $e^\lambda \longrightarrow e^{T\langle\lambda,\mu\rangle}$; on a $f_\mu(Q.e^\lambda) = \sum_\sigma \det\sigma\, e^{T\langle\sigma\lambda,\mu\rangle}$

$= \sum \det\sigma\, e^{T\langle\lambda,\sigma^{-1}\mu\rangle} = f_\lambda(Q.e^\mu)$ donc

$f_\rho(Q.e^\lambda) = f_\lambda(Q.e^\rho) = \prod_{\alpha>0}(e^{\frac{1}{2}T\langle\alpha,\lambda\rangle} - e^{-\frac{1}{2}T\langle\alpha,\lambda\rangle})$ série dont le terme constant est $\prod_{\alpha>0} T\langle\alpha,\lambda\rangle$. Le terme constant de

$f_\rho(\Psi_\Lambda) = f_\rho(Q.e^{\Lambda+\rho})/f_\rho(Q.e^\rho)$ est donc $\prod_{\alpha>0}\langle\Lambda+\rho,\alpha\rangle/\prod_{\alpha>0}\langle\rho,\alpha\rangle$

En résumé, on a démontré les résultats suivants :

(7) $\quad \mathrm{Tr}(\rho(h)) = \langle h\ ,\ \sum_\sigma \det\sigma\, e^{\sigma(\Lambda+\rho)}/\sum_\sigma \det\sigma\, e^{\sigma.\rho}\rangle$

(8) $\quad \dim V = \prod_{\alpha>0} \dfrac{\langle\Lambda+\rho,\alpha\rangle}{\langle\rho,\alpha\rangle}$

4.- Détermination des caractères de l'algèbre semi-simple $\mathfrak{g}$.

Nous allons maintenant déterminer à l'aide de ces formules l'application γ introduite dans l'exposé précédent ou tout au moins sa restriction à la sous-algèbre $U(\mathfrak{h})$ de $U(\mathfrak{g})$, ce qui est suffisant puisque l'on sait par la proposition 1 de l'exposé précédent que $U(\mathfrak{g})$ est somme de $U(\mathfrak{h})$ et de $[U,U]$.

Comme $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie abélienne, $U(\mathfrak{h})$ n'est autre que $S(\mathfrak{h})$ donc si $h \in U(\mathfrak{h})$ $\chi_\lambda(h) = f_\lambda(\gamma(h)) = \langle\gamma(h),e^\lambda\rangle = \langle h,{}^t\gamma.e^\lambda\rangle$; par ailleurs si Λ est le poids dominant d'une représentation irréductible de dimension finie, on a $\chi_\Lambda(h) = (\dim V)^{-1}\mathrm{Tr}(\rho(h))$, d'où d'après les formules du paragraphe précédent :

(9) $\quad {}^t\gamma.e^\Lambda = \dfrac{\prod_{\alpha>0}\langle\rho,\alpha\rangle}{Q.e^\rho} \cdot \dfrac{Q.e^{\Lambda+\rho}}{\prod_{\alpha>0}\langle\Lambda+\rho,\alpha\rangle}$ si $\Lambda(H_i) \geqslant 0$ est entier i.e. $\Lambda \in P_+$

Nous allons introduire 3 opérateurs δ_i de $U(\mathfrak{h})$ et démontrer que $\gamma\delta_3 = \delta_1\delta_2$. δ_1 sera défini comme l'automorphisme de l'algèbre $U(\mathfrak{h})$ qui transforme $H \in \mathfrak{h}$ en $H + \rho(H)$.

D'autre part, le groupe de Weyl est un groupe de transformations linéaires de $\mathfrak{h}$ donc se prolonge de manière bien définie en un groupe d'automorphismes de $U(\mathfrak{h})$; on a $S_\alpha H \equiv H \mod H_\alpha$ pour $H \in \mathfrak{h}$, donc puisque S_α est un automorphisme de $U(\mathfrak{h})$ et que $\mathfrak{h}$ engendre $U(\mathfrak{h})$, $S_\alpha h \equiv h \mod H_\alpha$; si alors h est antisymétrique $S_\alpha h = -h$ et $h \equiv 0 \mod H_\alpha$; h est divisible par chacun des H_α correspondant aux $\alpha > 0$ et donc par leur produit puisque $U(\mathfrak{h})$ est isomorphe à un anneau de polynomes, donc est un anneau factoriel. Or $k = \prod_{\alpha>0} H_\alpha$ est antisymétrique car d'après le lemme 1, S_i permute les différents facteurs à l'exception de H_i changé en $-H_i$ et par suite $S_i k = -k$. On définit alors δ_2 ainsi : $\delta_2(h) = \sum_\sigma \det\sigma . \sigma h/k$ $\delta_2(h)$ est symétrique et réciproquement un élément symétrique est le quotient d'un élément antisymétrique par k donc de la forme $\delta_2(h)$: δ_2 <u>applique</u> $U(\mathfrak{h})$ <u>sur le sous-espace des éléments symétriques</u>. Enfin δ_3 sera défini comme le transposé de l'opérateur de multiplication par $Q.e^\rho / \prod_{\alpha>0} \langle \rho, \alpha \rangle$; comme un anneau de séries formelles est sans diviseurs de 0 , ${}^t\delta_3$ est un opérateur biunivoque et par conséquent δ_3 applique $U(\mathfrak{h})$ <u>sur</u> $U(\mathfrak{h})$.

$e^\lambda \circ \delta_1$ est un homomorphisme de $U(\mathfrak{h})$ dans K qui applique $H \in \mathfrak{h}$ sur $\lambda(H) + \rho(H)$ donc est égal à $e^{\lambda+\rho}$ ce qui signifie ${}^t\delta_1 e^\lambda = e^{\lambda+\rho}$; On a ensuite $\langle \delta_2(h), e^\lambda \rangle = \langle \sum_\sigma \det\sigma\,\sigma.h/\prod_{\alpha>0} H_\alpha , e^\lambda \rangle$

$= \sum_\sigma \det\sigma \langle \sigma.h, e^\lambda \rangle / \prod_{\alpha>0} \langle \lambda, \alpha \rangle$, donc

${}^t\delta_2\, {}^t\delta_1 e^\lambda = \sum_\sigma \det\sigma\, e^{\sigma(\lambda+\rho)} / \prod_{\alpha>0} \langle \alpha, \lambda+\rho \rangle$. La formule (9) montre que pour $\lambda \in P_+$, ceci est égal à ${}^t\delta_3\, {}^t\gamma e^\lambda$ et comme on a démontré à l'appendice de l'exposé 18 que les e^λ avec $\lambda \in P_+$ forment un système total dans le dual de $U(\mathfrak{h})$, on a donc démontré que ${}^t\delta_2\, {}^t\delta_1 = {}^t\delta_3\, {}^t\gamma$ autrement dit $\delta_1\delta_2 = \gamma\delta_3$ et également le fait que ${}^t\gamma e^\lambda$ est donné pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ par la formule (9) .

δ_3 applique $U(\mathfrak{h})$ sur $U(\mathfrak{h})$ donc l'image de γ est égale à celle de $\gamma\delta_3 = \delta_1\delta_2$ et c'est donc l'image par l'automorphisme δ_1 de l'algèbre S formée des éléments symétriques de $U(\mathfrak{h})$. C'est un théorème bien connu dont on trouvera la démonstration en appendice que tout homomorphisme de S dans K se prolonge en un homomorphisme de $U(\mathfrak{h})$ dans K donc est de la forme $s \to \langle s , e^{\lambda} \rangle$; donc tout homomorphisme de $\gamma(U^{\natural}) = \gamma(U(\mathfrak{h})) = \delta_1(S)$ est de la forme $s \to \langle s , e^{\lambda} \rangle$ autrement dit tout caractère de $\mathfrak{g}$ est de la forme $e^{\lambda} \circ \gamma = \chi_{\lambda}$ et il est donné par la formule (9) .

Pour que $\chi_{\lambda} = \chi_{\mu}$, il faut et il suffit que e^{λ} et e^{μ} coïncident sur $\gamma(U(\mathfrak{h})) = \delta_1(S)$ autrement dit que ${}^t\delta_1 \, e^{\lambda}$ et ${}^t\delta_1 \, e^{\mu}$ coïncident sur S ce qui par le théorème de l'appendice signifie que $\lambda + \rho$ et $\mu + \rho$ sont conjugués par le groupe de Weyl.

Théorème 1 : (Harish-Chandra). <u>La représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ soit ω_{λ} admettant λ pour poids dominant admet un caractère χ_{λ} qui est donné par la formule</u> :

$$(10) \qquad \chi_{\lambda}(h) = \left\langle h \, , \prod_{\alpha > 0} \frac{\langle \rho , \alpha \rangle}{\langle \lambda + \rho , \alpha \rangle} . \frac{\sum_{\sigma} \det \, e^{\sigma . (\lambda + \rho)}}{\sum_{\sigma} \det \sigma \, e^{\sigma . \rho}} \right\rangle$$

<u>Tout caractère de $\mathfrak{g}$ est de la forme χ_{λ} ; enfin pour que $\chi_{\lambda} = \chi_{\mu}$, il faut et il suffit que $\lambda + \rho$ et $\mu + \rho$ soient conjugués par le groupe de Weyl</u>.

Remarquons qu'en conséquence si $\lambda \neq \mu$ mais $\lambda + \rho = \sigma(\mu + \rho)$, ω_{λ} et ω_{μ} sont inéquivalentes, mais ont même caractère, contrairement au cas des représentations de dimension finie.

5.- <u>Application bécarre dans l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$</u> .

Munissons l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$ de la représentation adjointe. D'après le théorème de Birkhoff-Witt, $U_p(\mathfrak{g})/U_{p-1}(\mathfrak{g})$ s'identifie à $S^p(\mathfrak{g})$ et on voit facilement que cette identification est compatible avec les opérateurs de la représentation adjointe. Or, si d'une manière générale, nous considérons deux $\mathfrak{g}$-modules M et N et un $\mathfrak{g}$-homomorphisme p de M sur N , on a $p(M^0) = N^0$ et $p(M^{\natural}) = N^{\natural}$ donc $p(m^{\natural}) = p(m)^{\natural}$. $S^p(\mathfrak{h})$ étant plongé dans $S^p(\mathfrak{g})$ admet $\mathfrak{g}_p$ pour supplémentaire, ces deux espaces étant orthogonaux (cf exp. 18) ; nous allons chercher à caractériser le sous-espace T de $S^p(\mathfrak{h})$ projection orthogonale du sous-espace des invariants de $S^p(\mathfrak{g})$ pour la représentation adjointe.

Soit $u \to u'$ la projection canonique de $U_p(\mathfrak{g})$ sur $S^p(\mathfrak{g})$. D'après la proposition 1 de l'exp. 18 (ou plutôt un léger renforcement que donne sa démonstration) tout élément u de $U_p(\mathfrak{g})$ s'écrit sous la forme $u = h + \sum [g_i , u_i]$ où $h \in U_p(\mathfrak{h})$ et les u_i sont dans $U_p(\mathfrak{g})$; par suite $u^\natural = h^\natural = \gamma(h) + p$ où $\gamma(h)$ est comme on sait dans $U_p(\mathfrak{g})$ et $p \in \mathfrak{P}$. Appliquant l'homomorphisme $u \rightarrow u'$ on trouve alors $(u')^\natural = (u^\natural)' = \gamma(h)' + p'$ et p' est dans $\mathfrak{g}_p$ tandis que $\gamma(h)'$ appartient à $S^p(\mathfrak{h})$; ceci signifie que T se compose des éléments de la forme $\gamma(h)'$ avec $h \in U_p(\mathfrak{h})$.

Comme l'algèbre $\mathfrak{h}$ est abélienne, on peut identifier $U(\mathfrak{h})$ et $S(\mathfrak{h})$, $U_p(\mathfrak{h})$ étant identifié à $\sum_{k \leq p} S^k(\mathfrak{h})$; or γ conserve les sous-espaces $U_k(\mathfrak{h})$ donc si $h \in U_{p-1}(\mathfrak{h})$ on a $\gamma(h)' = 0$, ce qui montre qu'on peut remplacer h par n'importe quel élément de $U_p(\mathfrak{h})$ ayant même terme de degré p sans changer $\gamma(h)'$. Soit n le nombre des racines positives le terme de plus bas degré de $Q.e^\rho = \prod_{\alpha > 0}(e^{\frac{1}{2}\alpha} - e^{-\frac{1}{2}\alpha})$ est donc de degré n puisqu'il est égal à $\prod_{\alpha > 0} \alpha$; par suite si f est un élément du dual de $S(\mathfrak{h})$ dont les composantes de degré $\leq p$ sont nulles, les composantes de degré $\leq p+n$ de ${}^t\delta_3 f = f.D/\prod_{\alpha > 0}\langle \rho, \alpha \rangle$ seront nulles, autrement dit si f est nulle sur $U_p(\mathfrak{h})$, ${}^t\delta_3 f$ est nulle sur $U_{p+n}(\mathfrak{h})$, ce qui prouve par dualité que δ_3 envoie $U_{p+n}(\mathfrak{h})$ dans $U_p(\mathfrak{h})$. Montrons que lorsque a parcourt $S^{p+n}(\mathfrak{h})$, la composante de degré p de $\delta_3 a$ peut être arbitraire ; sinon, il y aurait une forme f non nulle sur $U(\mathfrak{h})$ mais nulle sur les $S^q(\mathfrak{h})$ pour $q \neq p$. Alors ${}^t\delta_3 f$ serait orthogonale à $S^{p+n}(\mathfrak{h})$ donc sa composante de degré $p+n$ serait nulle ; or ceci n'est pas puisque cette composante est égale à $f.\prod_{\alpha > 0} \alpha / \langle \rho , \alpha \rangle \neq 0$. On a donc montré qu'il existe k de degré $p+n$ tel que h et $\delta_3 k$ aient même composante de degré p.

On sait donc maintenant que T se compose des éléments de la forme $\gamma\delta_3(h)' = \delta_1 \delta_2(h)'$ avec $h \in S^{p+n}(\mathfrak{h})$ or $\delta_2(h)$ est de degré p et il est facile de voir que si k est de degré p, k et $\delta_1(k)$ ne diffèrent que par des termes degré $< p$ (par linéarité on se ramène au cas où k est le produit de p éléments h_i de degré 1 et alors $\delta_1(k)$ est le produit des $h_i + \rho(h_i)$) donc $\delta_1 \delta_2(h)' = \delta_2(h)'$ et il résulte alors d'un raisonnement déjà fait que T qui est l'image de δ_2, est le sous-espace des éléments de $S^p(\mathfrak{h})$ invariants par le groupe de Weyl.

<u>Théorème 2</u> : (Chevalley). <u>Le sous-espace des éléments de $S^p(\mathfrak{h})$ invariants par le groupe de Weyl est la projection orthogonale sur $S^p(\mathfrak{h})$ de</u>

<u>l'ensemble des invariants de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $S^p(\mathfrak{g})$</u> .

<u>Remarque</u> : Il résulte de la démonstration du théorème 2 que si u est de la forme $\delta_3(h)$ avec $h \in S^{p+n}(\mathfrak{h})$, on a $u^\natural = \delta_2(h)$. On peut de là démontrer que si h et h' sont dans $S(\mathfrak{h})$, on a

$$(11) \quad \langle h^\natural, h' \rangle = \langle h^\natural, h'^\natural \rangle = \langle \delta_2(h), \delta_2(h') \rangle$$

$$= \langle \sum_\sigma \det \sigma . \sigma . h / \prod_{\alpha > 0} H_\alpha \, , \sum_\sigma \det \sigma \sigma . h' / \prod_{\alpha > 0} H_\alpha \rangle$$

APPENDICE

<u>Théorème</u> : <u>Soit</u> V <u>un espace vectoriel de dimension finie sur un corps algébriquement clos de caractéristique</u> 0 , G <u>un groupe fini de transformations linéaires dans</u> V <u>que l'on prolonge en un groupe d'automorphismes de l'algèbre symétrique</u> $S(V) = A$. A <u>est un module de type fini sur la sous-algèbre</u> $A^\natural$ <u>des invariants de</u> G ; <u>tout homomorphisme de</u> $A^\natural$ <u>dans</u> K <u>se prolonge à</u> A <u>et deux homomorphismes de</u> A <u>dans</u> K <u>coïncident sur</u> $A^\natural$ <u>si et seulement s'ils sont conjugués par</u> G .

Soit B le A-module A^G ensemble des fonctions à valeur dans A définies dans G et soit C l'ensemble des fonctions de la forme $g \to g.a$ avec $a \in A$ fixe. B est un A-module de type fini sur l'anneau noethérien A , donc tout sous-module de B est de type fini, en particulier le sous-module C' engendré par C ; C' a donc un système fini de générateurs qu'on peut même prendre dans C , autrement dit il existe un nombre fini d'éléments $a_i \in A$ tels que pour tout $a \in A$, il existe $b_i \in A$ avec $g.a = \sum_i (g.a_i) b_i$ d'où $a = \sum_i a_i.(g^{-1} b_i)$. Sommant les égalités correspondantes aux différents $g \in G$, on a $a = \sum_i a_i . b_i^\natural$ et $b_i^\natural = 1/[G] \sum_{g \in G} g.b_i \in A^\natural$, autrement dit les a_i forment un système fini de générateurs pour le $A^\natural$-module A .

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal de $A^\natural$ et $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}A$; on a $\mathfrak{q} \cap A^\natural = \mathfrak{p}$, en effet si $q \in \mathfrak{q}$ est aussi dans $A^\natural$, on a $a = \sum p_i c_i$ $(p_i \in \mathfrak{p}, c_i \in A)$ et $a = a^\natural$, d'où l'application bécarre ayant les bonnes propriétés, $a = a^\natural = \sum p_i (c_i)^\natural \in \mathfrak{p}$. En particulier si $\mathfrak{p} \neq A^\natural$, $\mathfrak{p} A \neq A$. Soit f un homomorphisme de A dans K et $\mathfrak{p}$ le noyau de f ; $\mathfrak{p} A$ est différent de A et $A/\mathfrak{p}A$ est une algèbre de dimension finie sur K

puisque A est module de type fini sur $A^{\natural}$ et $A^{\natural}/\mathfrak{p} = K$. Si $\mathfrak{p}'$ est un idéal maximal de A contenant $\mathfrak{p}A$, $A/\mathfrak{p}'$ est un corps et une algèbre de dimension finie sur K, i.e. une extension algébrique de degré fini de K, donc isomorphe à K puisque K est un corps algébriquement clos. Autrement dit, il existe un homomorphisme non nul de A dans K nul sur $\mathfrak{p}$, qui induit par conséquent f sur $A^{\natural}$.

Soient f_1 et f_2 deux homomorphismes de A dans K qui coïncident sur $A^{\natural}$; si f est un homomorphisme de A dans K, $a \to f(g.a)$ en est un autre : f^g, pour tout $g \in G$. Pour tout $a \in A$, on a $\sum_g g.a \in A^{\natural}$, donc $f_1(\sum_{g\in G} g.a) = f_2(\sum_{g \in G} g.a)$ i.e. $\sum_{g\in G} f_1^g - \sum_{g \in G} f_2^g = 0$; si n_i est l'ordre du sous-groupe H_i de G laissant invariant f_i $(i = 1, 2)$ on a donc $n_1 \sum_{\alpha} f_{1,\alpha} - n_2 \sum_{\beta} f_{2,\beta} = 0$, tous les termes de chacune des sommes partielles étant distincts. Or, des homomorphismes distincts h_k de A dans K sont linéairement indépendants : il existe en effet $a \in A$ tel que les scalaires $h_k(a)$ soient distincts, et si l'on pose

$$a_m = \prod_{k \neq m} \frac{a-h_k(a)}{h_m(a)-h_k(a)} \quad , \text{ on a } \quad h_k(a_m) = \delta_{km}$$

ce qui prouve que les h_k sont des formes linéaires linéairement indépendantes sur A. Revenant aux f_i, il résulte de l'indépendance des homomorphismes distincts que l'un des $f_{1,\alpha}$ doit être égal à l'un des $f_{2,\beta}$ donc que f_1 et f_2 doivent être conjugués. Réciproquement si $f_2 = f_1^g$, il est clair que f_1 et f_2 coïncident sur $A^{\natural}$.

C.Q.F.D.