P. Cartier

Théorie des caractères I. Définition des caractères

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 18, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A21_0>

Séminaire "Sophus LIE"
E.N.S., 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 18

THÉORIE DES CARACTÈRES I .
DÉFINITION DES CARACTÈRES.

(Exposé de P. CARTIER, le 19.4.55)

1.- Application bécarre dans les algèbres enveloppantes.

Nous considérons une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ semi-simple sur le corps de base K algébriquement clos de caractéristique 0 et son algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}) = U$. On définit une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$ dans U qui prolonge la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ et appelée encore représentation adjointe, en posant $(\mathrm{ad}\ g)(x) = gx - xg = [g , x]$. Les sous-espaces $U_p(\mathfrak{g})$ de la filtration de U sont de dimension finie et stables pour la représentation adjointe en vertu de la formule

$$(1) \qquad [g , g_1 g_2 \dots g_p] = \sum_{i=1}^{p} g_1 g_2 \dots [g , g_i] \dots g_p$$

$\mathfrak{g}$ étant semi-simple, il en résulte que la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans les $U_p(\mathfrak{g})$ est complètement réductible, et qu'elle l'est aussi dans U qui est la réunion des $U_p(\mathfrak{g})$. Le lemme 1 de l'exposé 7 montre que U est somme directe de $U^{\natural}$ et de U^0 , $x \in U^{\natural}$ signifiant que x est annulé par tous les $\mathrm{ad}\ g$, i.e. que x commute à $\mathfrak{g}$, donc à U , autrement dit $U^{\natural}$ est le centre de U ; d'autre part U^0 est le sous-espace sous tendu par les $(\mathrm{ad} g)(x) = [g , x]$, donc il est contenu dans le sous-espace $[U , U]$ sous-tendu par les $[x , y]$ $(x , y \in U)$ et il lui est même égal car si $x = g_1 g_2 \dots g_p$, on a

$$(2) \qquad [x,y] = [g_1 g_2 \dots g_p , y] = \sum_{i=1}^{p} [g_i , g_{i+1} g_{i+2} \dots g_p y g_1 \dots g_{i-1}] \in U^0$$

En résumé, U est somme directe de son centre $U^{\natural}$ et du sous-espace $[U , U]$. On peut introduire le projecteur $x \longrightarrow x^{\natural}$ de U sur $U^{\natural}$ parallélement à $[U , U]$; on a alors $(xy)^{\natural} = (yx)^{\natural}$ puisque $xy - yx$ est dans $[U , U]$, $(x^{\natural})^{\natural} = x^{\natural}$ puisque $x \longrightarrow x^{\natural}$ est un projecteur ; enfin si $z \in U^{\natural}$ et $t = \sum [x_i , y_i] \in [U , U]$, on a $zt = \sum [zx_i , y_i] \in [U , U]$ tandis que si $z' \in U^{\natural}$, $zz' \in U^{\natural}$ et ceci prouve que pour $z \in U^{\natural}$, on a $(zx)^{\natural} = zx^{\natural}$. Enfin si une forme linéaire f sur U vérifie $f(xy) = f(yx)$, elle est nulle sur $[U , U]$ et donc $f(x) = f(x^{\natural})$ et f est déterminée par sa valeur sur $U^{\natural}$;

réciproquement si f est une forme linéaire quelconque sur $U^\natural$, on la prolonge par la formule $f(x) = f(x^\natural)$ en une forme linéaire sur U vérifiant $f(xy) = f(yx)$. On peut donc énoncer le théorème suivant :

<u>THÉORÈME</u> : <u>L'algèbre enveloppante U d'une algèbre semi-simple $\mathfrak{g}$ est somme directe de son centre $U^\natural$ et du sous-espace $[U , U]$ sous-tendu par les éléments $[x , y]$ $(x , y \in U)$. La projection correspondante de U sur $U^\natural$ a les propriétés suivantes qui sont caractéristiques</u> :

a) $(xy)^\natural = (yx)^\natural$ $\qquad (x^\natural)^\natural = x^\natural$

b) $(x^\natural y) = x^\natural y^\natural$ $\qquad$ (Identité de Reynolds)

<u>Pour qu'une forme linéaire f sur U vérifie l'identité $f(xy) = f(yx)$, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme $f(x) = f'(x^\natural)$ où f' est la restriction de f à $U^\natural$</u> .

La formule b) provient de ce que l'on a déjà démontré, en remarquant que $x^\natural$ est un élément générique de U . Remarquons que le théorème est valable même si K n'est pas algébriquement clos et si $\mathfrak{g}$ est seulement réductive, car la représentation adjointe s'annule sur le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ est semi-simple.

Soit maintenant $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $U(\mathfrak{h})$ son algèbre enveloppante qu'on considère comme plongée dans U . Notre intention est de montrer maintenant que la connaissance de l'application $\natural$ sur $U(\mathfrak{h})$ est suffisante pour la déterminer entièrement.

<u>Proposition 1</u> : <u>Le plus petit sous-espace de U contenant $U(\mathfrak{h})$ et invariant par la représentation adjointe est $U(\mathfrak{g})$ tout entier. En conséquence tout élément x de U est de la forme $h + \sum [g_i , x_i]$ $(h \in U(\mathfrak{h})$, $g_i \in \mathfrak{g}$, $x_i \in U)$ et U est somme de $[U , U]$ et de $U(\mathfrak{h})$</u> .

Soit S l'algèbre symétrique construite sur $\mathfrak{g}$; c'est le quotient de l'algèbre tensorielle de $\mathfrak{g}$ par l'idéal I engendré par les tenseurs $g \otimes g' - g' \otimes g$ d'ordre 2 . Si $TS(\mathfrak{g})$ désigne l'espace des tenseurs symétriques, $T(\mathfrak{g})$ est somme directe de I et de $TS(\mathfrak{g})$, comme on le voit en appliquant l'opérateur de symétrisation, et l'on peut donc identifier $TS(\mathfrak{g})$ et $S(\mathfrak{g})$. Si l'on munit $T(\mathfrak{g})$ de la représentation adjointe

$(\mathrm{ad}\ g)(g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_n) = \sum_{i=1}^{n} g_1 \otimes \dots \otimes [g , g_i] \dots \otimes g_n$, ad g commute aux opérateurs du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur $T_n(\mathfrak{g})$ donc I et $TS(\mathfrak{g})$

sont invariants par la représentation adjointe. $S(\mathfrak{g})$ est donc muni par passage au quotient d'une représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ et l'isomorphisme de $S(\mathfrak{g})$ et de $TS(\mathfrak{g})$ devient un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules.

D'autre part, il résulte du théorème de Birkhoff-Witt que $T(\mathfrak{g})$ est somme directe de $TS(\mathfrak{g})$ et de l'idéal J engendré par les tenseurs $g \otimes g' - g' \otimes g - [g , g']$, et comme $U = T(\mathfrak{g})/J$ et que la représentation adjointe de U s'obtient par passage au quotient de celle de $T(\mathfrak{g})$, il en résulte comme plus haut un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules de $TS(\mathfrak{g})$ et de U, d'où en composant un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules de U et de $S(\mathfrak{g})$. Il est par ailleurs clair que $U(\mathfrak{h})$ correspond à $S(\mathfrak{h})$ par cet isomorphisme.

Soit T le plus petit sous-espace de $S(\mathfrak{g})$ invariant par la représentation adjointe et contenant $S(\mathfrak{h})$. La formule (3) qui suit montre immédiatement par récurrence sur p que T contient les éléments de la forme $x = E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} \dots E_{\alpha_p} H^{n-p}$ ($E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $H \in \mathfrak{h}$, $\alpha(H) \neq 0$ pour toute racine α).

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{ad} E_{\alpha_1}(E_{\alpha_2} \dots E_{\alpha_p} H^{n-p+1}) = \sum_{i=2}^{p} N_i E_{\alpha_2} \dots E_{\alpha_1+\alpha_i} \dots E_{\alpha_p} H^{n-p+1}$$
$$+ (-p+n+1)\alpha_1(H) E_{\alpha_1} \dots E_{\alpha_p} H^{n-p}$$

si $\quad [E_{\alpha_1} , E_{\alpha_i}] = N_i E_{\alpha_1+\alpha_i}$.

Or il est bien connu et bien facile de voir que $S(\mathfrak{h})$ est sous-tendu par les éléments de la forme H^m avec un H qui n'annule aucune racine α et il en résulte que $S(\mathfrak{g}) = T$.

C.Q.F.D.

2.- Caractères d'une algèbre de Lie semi-simple.

Nous dirons qu'une forme linéaire χ sur U est un caractère de $\mathfrak{g}$ si elle vérifie les propriétés suivantes :

(4) $\qquad \chi(xy) = \chi(yx) \qquad\qquad \chi(1) = 1$

(5) $\qquad \chi(x^\natural y) = \chi(x)\,\chi(y)$

En vertu du théorème 1, on a $\chi(x) = \chi(x^\natural)$ et la formule b) montre que (5) équivaut au fait que χ soit multiplicative sur le centre de U .

Soit (ρ , V) une représentation linéaire irréductible de $\mathfrak{g}$ dans un espace V de dimension finie, que l'on prolonge à U de la manière usuelle.

Posons $\chi(x) = (\dim V)^{-1}\,\mathrm{Tr}(\rho(x))$ pour $x \in U$. On obtient ainsi un caractère de $\mathfrak{g}$: en effet la formule (4) résulte des propriétés de la trace $\mathrm{Tr}(1) = \dim V$ $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$; quant au fait que χ est multiplicative sur $U^\natural$, il résulte de ce que la représentation étant irréductible, le lemme de Schur montre que pour $x \in U^\natural$, $\rho(x)$ est un opérateur scalaire donc $= \alpha(x).1$ où α est évidemment multiplicative et en prenant la trace on voit que $\alpha(x) = \chi(x)$ pour $x \in U^\natural$. Le caractère ainsi obtenu s'appelle le caractère de la représentation (ρ, V).

Une représentation de dimension finie irréductible est définie à un isomorphisme près par la donnée de son caractère. En effet la relation " $\chi(ax) = 0$ pour tout $x \in U$ " équivaut à " $\mathrm{Tr}(\rho(a)\rho(x)) = 0$ pour tout $x \in U$ " et donc, comme par le théorème de Burnside, les $\rho(x)$ forment l'algèbre de tous les opérateurs de V, ceci équivaut à $\rho(a) = 0$. Donc en vertu du théorème de Burnside une fois de plus, le quotient de U par l'idéal des a tels que $\chi(ax) = 0$ pour tout $x \in U$ est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{L}(V)$ de tous les opérateurs de V. Si donc (ρ, V) et (ρ', V') ont le même caractère χ, on en déduit un isomorphisme de $\mathcal{L}(V)$ sur $\mathcal{L}(V')$ et il est bien connu qu'un tel isomorphisme provient d'un isomorphisme de V sur V' qui définit l'équivalence cherchée.

Plus généralement on pourra définir le caractère d'une représentation linéaire irréductible de dimension infinie, chaque fois que les opérateurs correspondant aux éléments du centre de U seront scalaires donc de la forme $\rho(x) = \chi(x).1$ et l'on prolongera χ à U par la formule $\chi(x) = \chi(x^\natural)$. χ est alors visiblement un caractère de $\mathfrak{g}$, mais il ne caractérise plus la représentation en question comme on le verra plus loin (exposé 19).

Nous allons montrer que si la représentation (ρ, V) a un poids dominant Λ, on peut définir son caractère χ_Λ et l'on pourra même donner une formule explicite pour χ_Λ et montrer qu'il n'y a pas d'autres caractères de $\mathfrak{g}$ que ceux que l'on construit ainsi. (cf. exposé 19)

Si $x \in U^\natural$, il est clair que $\rho(x)$ conserve les V_λ ; or V_Λ est de dimension 1, donc pour $v \in V_\Lambda$, on a $\rho(x)v = \alpha_\Lambda(x)v$ où α_Λ est une forme linéaire bien définie sur $U^\natural$. Or il est clair que les vecteurs v tels que $\rho(x)v = \alpha_\Lambda(x)v$ pour tout $x \in U^\natural$, forment un sous-espace invariant de V qui lui est même égal puisqu'il contient V_Λ qui engendre V. Donc si $\chi_\Lambda(x) = \alpha_\Lambda(x^\natural)$, χ_Λ est un caractère de $\mathfrak{g}$.

V est somme directe de V_Λ et de V^+, donc pour tout $x \in U$, on a $\rho(x)v \equiv \beta_\Lambda(x)v \mod V^+$ pour tout $v \in V_\Lambda$ avec une forme linéaire β_Λ sur U qui prolonge évidemment α_Λ, d'où $\chi_\Lambda(x) = \beta_\Lambda(x^\natural)$. Or si l'on reprend la décomposition $\mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ de $\mathfrak{g}$ et la décomposition $U_- \otimes U_0 \otimes U_+$ de U qui lui correspond, on peut déterminer β_Λ comme suit ; V_Λ est annulé par $\mathfrak{n}_+$, donc par l'idéal $\mathfrak{n}_+ U_+$ de U_+ ; comme $\rho(1)v=v$, on en déduit que $\rho(u_+)v = \varepsilon_+(u_+)v$ pour $u_+ \in U_+$ et $v \in V_\Lambda$ (ε_+ est l'augmentation de U_+). De même on a $\rho(H)v = \Lambda(H)v$ pour $H \in \mathfrak{h}$ et $v \in V_\Lambda$, donc si f_Λ est l'homomorphisme de $U_0 = U(\mathfrak{h})$ sur K qui envoie 1 sur 1 et H sur $\Lambda(H)$ $(H \in \mathfrak{h})$, on a $\rho(h)v = f_\Lambda(h)v$ pour $h \in U_0$ et $v \in V_\Lambda$. Enfin, on sait que $\mathfrak{n}_-$ envoie V_Λ dans V^+, d'où $\rho(u_-)v \equiv \varepsilon_-(u_-)v \mod V^+$ pour $u_- \in U_-$ et $v \in V_\Lambda$. En résumé <u>si l'on note</u> β <u>l'application</u> $\varepsilon_- \otimes 1 \otimes \varepsilon_+$ <u>de</u> $U \simeq U_- \otimes U_0 \otimes U_+$ <u>dans</u> U_0, on a $\rho(x)v \equiv f_\Lambda(\beta(x))v \mod V^+$ pour $v \in V_\Lambda$ et par suite $\chi_\Lambda(x) = \beta_\Lambda(x^\natural) = f_\Lambda(\beta(x^\natural))$. On a donc à étudier l'application $\gamma : x \to \beta(x^\natural)$ de U dans $U(\mathfrak{h})$, χ_Λ <u>étant égal à</u> $f_\Lambda \circ \gamma$.

<u>Proposition 2</u> : <u>L'application</u> $\gamma : x \to \beta(x^\natural)$ <u>définit un isomorphisme d'algèbres de</u> $U^\natural$ <u>dans</u> $U(\mathfrak{h})$.

Tout élément de U est combinaison linéaire d'éléments de la forme $E_{-\alpha_1} E_{-\alpha_2} \dots E_{-\alpha_p} h E_{\beta_1} E_{\beta_2} \dots E_{\beta_q}$ où $h \in U(\mathfrak{h})$ et les α_i sont des racines positives ainsi que les β_j. Par ad H $(H \in \mathfrak{h})$ un tel élément se trouve multiplié par $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i(H) - \sum_{j=1}^{q} \beta_j(H)$, par suite, un élément de $U^\natural$ commutant en particulier à $\mathfrak{h}$ est combinaison linéaire des éléments de la forme précédente pour lesquels $\sum \alpha_i - \sum \beta_j = 0$, donc se décompose de manière unique en la somme d'un élément de $U(\mathfrak{h})$ (termes dans lesquels les α_i et les β_j sont nulles) et d'un élément de l'idéal à gauche $\mathfrak{P} = U\mathfrak{n}_+$ (car il ne peut y avoir un α_i non nul sans un β_j non nul en même temps puisque $\sum \alpha_i = \sum \beta_j \geq 0$). D'autre part β annule $\mathfrak{P} = U_- U_0 (U_+ \mathfrak{n}_+)$ et induit l'identité sur $U(\mathfrak{h})$, donc la composante de $x \in U^\natural$ selon $U(\mathfrak{h})$ est égale à $\beta(x) = \gamma(x)$, autrement dit $x - \gamma(x) \in \mathfrak{P}$; mais alors

$$(6) \qquad xy - \gamma(x)\gamma(y) = (x - \gamma(x))y + \gamma(x)(y - \gamma(y))$$
$$= y(x - \gamma(x)) + \gamma(x)(y - \gamma(y)) \in \mathfrak{P}$$

ce qui prouve que $\gamma(xy) = \gamma(x)\gamma(y)$ si x et y sont dans $U^\natural$.

$\mathfrak{g}$ est en dualité avec elle-même par la forme de Killing et l'on peut donc mettre $S^m(\mathfrak{g})$ en dualité avec elle-même (cf. Appendice) par la formule

$$\langle g_1 \dots g_m \, , \, g'_1 \dots g'_m \rangle = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \prod_{i=1}^{m} \langle g_i \, , \, g'_{\sigma(i)} \rangle$$

D'autre part si on prend une base de $\mathfrak{g}$ de la forme $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $H_i = H_{\alpha_i}$, les monômes commutatifs de degré m en ces éléments forment une base de $S^m(\mathfrak{g})$ et comme $\mathfrak{h}$ est orthogonale à tous les $\mathfrak{g}^\alpha$, les monômes qui ne renferment pas de E_α sont orthogonaux à ceux qui en renferment comme on le voit tout de suite sur la formule de dualité. Les premiers de ces monômes forment une base de $S(\mathfrak{h})$ et les seconds une base d'un sous-espace supplémentaire $\mathfrak{g}_m$ qui est d'ailleurs l'image canonique de $\mathfrak{F} \cap U_m(\mathfrak{g})$ dans $U_m(\mathfrak{g})/U_{m-1}(\mathfrak{g}) \simeq S^m(\mathfrak{g})$. Or la forme bilinéaire sur $S^m(\mathfrak{g})$ est invariante par la représentation adjointe : (les g^m sous-tendent $S^m(\mathfrak{g})$).

(7) $$\langle (\mathrm{ad}\,g)\,(g'^m) \, , \, g''^m \rangle = \langle m\,[g.g']\,g'^{m-1}, \, g''^m \rangle$$
$$= m.m! \, \langle [g.g'] \, , \, g'' \rangle \langle g'.g'' \rangle^{m-1}$$

de même $$\langle (\mathrm{ad}\,g)(g''^m) \, , \, g'^m \rangle = m.m! \, \langle [g.g''] \, , \, g' \rangle \langle g'' \, , \, g' \rangle^{m-1}$$
$$= - \langle (\mathrm{ad}\,g)(g'^m) \, , \, g''^m \rangle$$

Si un élément $s \neq 0$ de $S^m(\mathfrak{g})$ est invariant par la représentation adjointe, il est orthogonal à ceux de la forme $(\mathrm{ad}\ g)t$ car $\langle s \, , (\mathrm{ad}\ g)t \rangle = - \langle (\mathrm{ad}\ g)s \, , \, t \rangle = 0$ donc il ne peut être dans $\mathfrak{g}_m$, car il serait orthogonal à $S^m(\mathfrak{h})$ et on a vu dans la démonstration de la proposition 1 que $S^m(\mathfrak{g})$ est somme de $S^m(\mathfrak{h})$ et de $(\mathrm{ad}\ \mathfrak{g})\ S^m(\mathfrak{g})$, donc s serait orthogonal à $S^m(\mathfrak{g})$ et donc nul.

Pour montrer que γ est biunivoque, il suffit de montrer que $U^\natural \cap \mathfrak{F} = (0)$. Supposons déjà démontré que $U^\natural \cap U_m(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{F} = (0)$ pour $m = 0, 1, \dots, p$ (le cas $m = 0$ est trivial car $\mathfrak{g}U(\mathfrak{g}) \supset \mathfrak{F}$). Soit alors $s \in U^\natural \cap U_{p+1}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{F}$; son image s' dans $U_{p+1}(\mathfrak{g})/U_p(\mathfrak{g})$ est donc contenue dans $\mathfrak{g}_{p+1}$ et elle est invariante dans $S^{p+1}(\mathfrak{g})$ car la représentation adjointe dans $S^{p+1}(\mathfrak{g})$ s'obtient par passage au quotient, donc par ce qu'on a vu $s' = 0$, donc $s \in U^\natural \cap U_p(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{F} = (0)$. Comme U est réunion des U_p notre assertion est démontrée.

C.Q.F.D.

APPENDICE

Soient V et V' deux espaces vectoriels de dimension finie sur un corps K quelconque de caractéristique 0 mis en dualité par une forme bilinéaire $\langle v , v' \rangle$. On définit une forme bilinéaire sur $S^m(V) \times S^m(V')$ par la formule :

$$\langle v_1 v_2 \dots v_m , v'_1 v'_2 \dots v'_m \rangle = \det_S \langle v_i , v'_j \rangle = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \prod_{i=1}^{m} \langle v_i , v'_{\sigma(i)} \rangle \tag{8}$$

Le second membre de cette formule étant linéaire en chacune des variables et symétrique par rapport aux v_i et par rapport aux v'_i séparément définit bien une forme bilinéaire sur $S^m(V) \times S^m(V')$. On déduit facilement de la formule (8) que $\langle v_1 v_2 \dots v_m , v'^m \rangle = m! \prod_{i=1}^{m} \langle v_i , v' \rangle$ et $\langle v^m , v'^m \rangle = m! \langle v , v' \rangle^m$. Soient $\{e_j\}$ et $\{f_j\}$ deux bases duales de V et V' si $v = \sum x_j e_j$ et $v' = \sum y_j f_j$, on a $\langle v , v' \rangle = \sum x_j y_j$ et en prenant les coefficients de $\prod_j x_j^{m_j} \prod_k y_k^{n_k}$ dans l'égalité $\langle v^m , v'^m \rangle = m! \langle v , v' \rangle^m$, on a

$$\left\langle \prod_j e_j^{m_j} , \prod_k e_k^{n_k} \right\rangle = \prod_j \delta_{m_j, n_j} (m_j)! \tag{9}$$

ce qui montre immédiatement que $S^m(V)$ et $S^m(V')$ sont en dualité par le produit scalaire considéré.

Le dual de $S(V)$ qui est somme directe des $S^m(V)$, est donc isomorphe au produit direct $S^*(V')$ des $S^m(V')$, deux éléments de degré différents étant orthogonaux. Pour $v' \in V'$ posons $e^{v'} = \sum_{m \geqslant 0} (m!)^{-1} v'^m \in S^*(V')$; on a alors $\langle v_1 v_2 \dots v_p , e^{v'} \rangle = \prod_i \langle v_i , v' \rangle$ d'où résulte que $f_{v'} : s \to \langle s , e^{v'} \rangle$ est l'homomorphisme de $S(V)$ dans K qui applique 1 sur 1 et v sur $\langle v , v' \rangle$. $S(V)$ s'identifie à l'algèbre des polynomes par rapport aux éléments de base e_j et pour la même raison $S^*(V')$ s'identifie à l'algèbre des séries formelles par rapport aux indéterminées f_j. La formule (9) montre alors que la topologie faible $\sigma(S^*(V'), S(V))$ n'est autre que la topologie usuelle des algèbres de séries formelles donc est compatible avec la structure d'algèbre de $S^*(V')$.

Pour qu'un opérateur de $S^{*}(V')$ soit le transposé d'un opérateur de $S(V)$, il faut et il suffit d'après la théorie de la dualité faible qu'il soit continu, en particulier l'opérateur de multiplication par un élément fixe de $S^{*}(V')$ est transposé d'un opérateur de $S(V)$.

Les exponentielles se multiplient par la règle usuelle d'addition des exposants comme il résulte de la formule de définition et de la formule du binôme. Soit $A \subset S^{*}(V')$ le sous-espace engendré par les exponentielles $e^{v'}$ pour les v' tels que $\langle e_j , v' \rangle$ soit un entier positif autrement dit A est l'algèbre engendrée par les e^{f_j}. On va montrer que A <u>est partout dense dans</u> $S^{*}(V')$ autrement dit que pour tout $s \in S^{*}(V')$ et pour tout entier p, il existe $a \in A$ tel que $s-a$ ait ses composantes de degré $\leq p$ nulles. Or f_j et $e^{f_j} - 1$ ont mêmes composantes de degré 1 et de degré 0 tandis que $1 = e^0 \in A$; si $\sum_j m_j = m, \prod_j (f_j)^{m_j}$ a mêmes composantes de degré $\leq m$ que $\prod_j (e^{f_j} - 1)^{m_j}$ donc pour tout polynome homogène de degré m en les f_j il existe $a \in A$ ayant mêmes composantes de degré $\leq m$ que lui. Soit alors $s \in S^{*}(V')$ quelconque et supposons qu'il existe $a_p \in A$ ayant mêmes composantes de degré $\leq p$ que s, donc $s - a_p$ est somme d'un polynome homogène P de degré p et de termes de degré $> p$ puis P est somme de $a'_p \in A$ et de termes de degré $> p$, donc s est somme de $a_{p+1} = a_p + a'_p \in A$ et de termes de degré $> p$, ce qui prouve notre assertion par récurrence sur p.
