

# SÉMINAIRE "SOPHUS LIE"

P. CARTIER

## Représentations linéaires des algèbres de Lie semi-simples

*Séminaire "Sophus Lie"*, tome 1 (1954-1955), exp. n° 17, p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=SSL\\_1954-1955\\_\\_1\\_\\_A20\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A20_0)

© Séminaire "Sophus Lie"  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 17RÉPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES

(Exposé de P. CARTIER, le 29.3.1955)

1.- Générateurs canoniques d'une algèbre semi-simple.

Le corps de base  $K$  est toujours de caractéristique 0 et algébriquement clos,  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie semi-simple dont  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de Cartan. On munit  $\mathfrak{h}_0^*$  d'une structure d'ordre total compatible avec sa structure d'espace  $\mathbb{Q}$ -vectoriel ;  $\Sigma$  est alors le système des racines positives et  $\Pi = \{\alpha_i\}$  le système des racines simples.

Si l'on pose  $\mathfrak{m}_+ = \sum_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_\alpha$  et  $\mathfrak{m}_- = \sum_{\alpha < 0} \mathfrak{g}_\alpha$ , on a deux sous-algèbres

nilpotentes de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}$  est somme directe de  $\mathfrak{m}_+$ ,  $\mathfrak{m}_-$  et  $\mathfrak{h}$ . J'affirme que  $\mathfrak{m}_+$  est engendrée par les  $\mathfrak{g}^{\alpha_i}$  : en effet si  $\mathfrak{m}'_+$  est la sous-algèbre de  $\mathfrak{m}_+$  engendrée par les  $\mathfrak{g}^{\alpha_i}$ , supposons par hypothèse de récurrence que  $\mathfrak{m}'_+$  contienne les  $\mathfrak{g}^\beta$  pour  $0 < \beta < \alpha$ ; alors ou bien  $\alpha$  est simple et donc  $\mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{m}'_+$ , ou bien  $\alpha = \beta + \gamma$  et comme  $\beta, \gamma < \alpha$

$\mathfrak{g}^\alpha = [\mathfrak{g}^\beta, \mathfrak{g}^\gamma] \subset [\mathfrak{m}'_+, \mathfrak{m}'_+] \subset \mathfrak{m}'_+$ . De même  $\mathfrak{m}_-$  est engendré par les  $\mathfrak{g}^{-\alpha_i}$

D'autre part, on a déjà défini  $H'_\alpha$  pour toute racine  $\alpha$  par l'équation  $\alpha(H) = B(H, H'_\alpha)$ ; on pose alors  $H_\alpha = 2 H'_\alpha / \langle \alpha, \alpha \rangle$  d'où  $\alpha(H_\alpha) = 2$  et  $H_i = H_{\alpha_i}$ . On en déduit  $\alpha_i(H_j) = 2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle / \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle = -a_{ji}$ . On sait aussi (cf. Exp. 9) que si  $X \in \mathfrak{g}^\alpha$ ,  $Y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$  alors  $[X, Y] = \langle X, Y \rangle H'_\alpha$ , par suite on peut choisir  $X_i \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}$  et  $Y_i \in \mathfrak{g}^{-\alpha_i}$  de sorte que  $[X_i, Y_i] = H_i$ . Enfin comme  $\alpha_i - \alpha_j$  n'est pas racine,  $[X_i, Y_j] = 0$  dès que  $i \neq j$ , autrement dit  $\mathfrak{g}$  est engendrée par les  $X_i$ , les  $Y_i$ ; les  $H_i$  qui vérifient entre autres les relations suivantes :

$$(1) \quad [X_i, Y_j] = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad [X_i, Y_i] = H_i \quad [H_i, X_j] = -a_{ij} X_j \\ [H_i, Y_j] = a_{ij} Y_j \quad [H_i, H_j] = 0$$

(Remarquer que ces relations ne font intervenir de  $\mathfrak{g}$  que les entiers de Cartan  $a_{ij}$ ).

Ce sont ces générateurs de  $\mathfrak{g}$  que nous appellerons canoniques.

Nous terminerons ce paragraphe en démontrant que  $\lambda \in \mathfrak{h}^*_0$  équivaut à " $\lambda(H_i)$  rationnel pour tout  $i$ ". En effet si  $\lambda = \sum m_i \alpha_i$  ( $m_i \in K$ ) on a  $\lambda(H_i) = \sum m_j \alpha_j(H_i)$  et  $\alpha_j(H_i)$  est entier, donc si les  $m_i$  sont rationnels, les nombres  $\lambda(H_i)$  sont rationnels et si ces nombres, réciproquement, sont rationnels, les  $m_i$  sont solution unique d'un système d'équations linéaires à coefficients rationnels, donc rationnels eux-mêmes. Ceci prouve notre assertion.

## 2.- Poids des représentations linéaires.

Soit  $(\rho, V)$  une représentation linéaire de  $\mathfrak{U}$  dans un espace vectoriel de dimension quelconque non nécessairement finie. On note alors  $V_\lambda$  l'ensemble des vecteurs de  $V$  qui vérifient les équations  $\rho(H)v = \lambda(H)v$  et ceci pour toute forme linéaire sur  $\mathfrak{h}$ .  $V_\lambda$  est un sous-espace de  $V$  et  $V_\lambda \subset V^\lambda$  ( $V^\lambda$  est l'ensemble des  $v \in V$  qui sont annulés par une puissance de  $(\rho(H) - \lambda(H).1)$  cf ; Exp. 9). Si  $V_\lambda$  est différent de 0, on dira que  $\lambda$  est un poids de la représentation considérée.

Lemme : la somme des différents  $V_\lambda$  est directe et pour tout sous-espace invariant  $W$ , on a  $W \cap (\sum_\lambda V_\lambda) = \sum_\lambda (W \cap V_\lambda)$  ; toute représentation de dimension finie possède au moins un poids ; enfin  $\rho(\mathfrak{U}^\alpha)V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$  donc  $\sum_\lambda V_\lambda$  est un sous-espace invariant.

On a  $V_\lambda \subset V^\lambda$  et on sait par l'exposé 9 que la somme des  $V^\lambda$  est directe (la démonstration de ce fait ne suppose pas  $V$  de dimension finie) donc la somme des  $V_\lambda$  est directe. Appliquons ceci à la représentation quotient dans  $V/W$  pour un sous-espace invariant  $W$ , donc si  $\sum_\lambda v_\lambda \equiv 0 \pmod{W}$ ,  $v_\lambda$  étant dans  $V_\lambda$ , on a  $v_\lambda \equiv 0 \pmod{W}$  donc  $W \cap (\sum_\lambda V_\lambda) \subset \sum_\lambda (W \cap V_\lambda)$ . L'inclusion de sens contraire étant évidente, la deuxième assertion est démontrée. Si  $V$  est de dimension finie, on peut trouver un sous-espace irréductible pour  $\mathfrak{h}$ , qui est alors de dimension 1 par le lemme de Schur, donc il existe un poids. Enfin si  $v \in V_\lambda$  et  $x \in \mathfrak{U}^\alpha$  alors

$$\rho(H)\rho(x)v = \rho([H,x])v + \rho(x)\rho(H)v = \alpha(H)\rho(x)v + \lambda(H)\rho(x)v = (\lambda(H) + \alpha(H))\rho(x)v$$

donc  $\rho(x)v$  est dans  $V_{\lambda+\alpha}$

Ceci démontre le lemme.

## 3.- Représentations possédant un vecteur dominant.

Nous dirons que la représentation  $(\rho, V)$  possède un vecteur dominant  $v$  si  $v \in V_\lambda$  pour un certain poids  $\lambda$ , si  $\rho(X_i)v = 0$ , et si  $V$  est engendré

par  $v$  (comme  $\mathcal{U}$ -module) ;  $\lambda$  sera par définition un poids dominant

1) Comme  $\mathcal{M}_+$  est engendrée par les  $X_i$ , un vecteur dominant est annulé par  $\rho(\mathcal{M}_+)$  et  $\rho(H)v = \lambda(H)v$  puisque  $v \in V_\lambda$  ;  $\mathfrak{h} + \mathcal{M}_+ = \mathfrak{p}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{U}$  dont  $\mathcal{M}_+$  est un idéal puisque  $[\mathfrak{h}, \mathcal{M}_+] = \mathcal{M}_+$ . Il résulte de ce qu'on vient de voir que la droite  $K.v$  est invariante par  $\mathfrak{p}$ , donc aussi par l'algèbre enveloppante  $U_0$  de  $\mathfrak{p}$ .

$\mathcal{U}$  est somme directe de  $\mathcal{M}_-$  et  $\mathfrak{p}$ , donc l'algèbre enveloppante  $U$  de  $\mathcal{U}$  est comme espace vectoriel produit tensoriel de  $U_-$  (algèbre enveloppante de  $\mathcal{M}_-$ ) et de  $U_0$  d'après le théorème de Birkoff-Witt et  $U = U_- U_0$ .  $V$  est engendré par  $v$ , donc  $V = \rho(U)v = \rho(U_-)v$  puisque  $\rho(U_0)v = K.v$  autrement dit  $V$  est engendré par  $v$  en tant que  $\mathfrak{p}$ -module. On définit une nouvelle relation d'ordre (partielle) sur  $\mathfrak{h}^*$ , compatible avec l'addition mais non avec les homothéties en convenant que " $\mu \leq \nu$ " équivaut à " $\nu - \mu = \sum m_i \alpha_i$ , les  $m_i$  étant des entiers positifs ou nuls". Le sous-espace  $K.v + \sum_{\mu < \lambda} V_\mu$  de  $V$  contient  $v$  et est invariant par  $\mathcal{M}_-$  en vertu des formules  $\rho(\mathcal{U}_-^\alpha) V_\mu \subset V_{\mu-\alpha}$  et  $\mu - \alpha < \mu < \lambda$ , donc est égal à  $V$ , autrement dit  $V_\lambda$  est de dimension 1 et les autres poids de  $V$  sont de la forme  $\lambda - \sum m_i \alpha_i$

Comme  $V = \rho(U_-)v$ , et que  $Y_i$  appartient à la racine  $-\alpha_i$ ,  $V_\mu$  est sous-tendu par les vecteurs  $\rho(Y_{i_1}) \dots \rho(Y_{i_p})v$  pour toute suite  $i_1, i_2, \dots, i_p$  telle que  $\lambda - \alpha_{i_1} \dots - \alpha_{i_p} = \mu$ . Comme il n'y a qu'un nombre fini de telles suites,  $V_\mu$  est de dimension finie.

Enfin le poids dominant  $\lambda$  étant le plus haut des poids pour l'ordre  $\succ$  est bien défini par la représentation.

2) Soit  $I \subset U$  l'annulateur d'un vecteur dominant : c'est un idéal à gauche qui contient  $\mathcal{M}_+$  et les  $H - \lambda(H)$  pour  $H \in \mathfrak{h}$ , donc l'idéal à gauche  $J_\lambda$  engendré par ces éléments et réciproquement si  $I$  est un idéal à gauche de  $U$  contenant  $J_\lambda$ , le générateur canonique de la représentation naturelle dans  $U/I$  est un vecteur dominant de poids  $\lambda$ . Pour démontrer qu'il existe des représentations ayant  $\lambda$  pour poids dominant, il suffit donc de démontrer que  $J_\lambda \neq U$  et toute représentation admettant  $\lambda$  pour poids dominant sera un quotient de  $U/J_\lambda$ . Or si  $J'_\lambda$  est l'idéal de  $U_0$  engendré par  $\mathcal{M}_+$  et les  $H - \lambda(H)$ ,  $J'_\lambda \neq U_0$  car  $J'_\lambda$  est contenu dans le noyau de la représentation de dimension 1 de  $\mathfrak{p}$  définie par  $\theta(H) = \lambda(H)1$  et  $\theta(n) = 0$  (c'est bien une représentation car elle est de dimension 1 et nulle sur  $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathcal{M}_+$ ). Mais comme  $U = U_- U_0$ , on a  $J = U_- J'_\lambda$  et si l'on identifie  $U$  à  $U_- \otimes U_0$ ,

$J_\lambda$  est identifié à  $U_- \otimes J'_\lambda$  qui est différent de  $U$  puisque  $J'_\lambda$  est différent de  $U_0$  et c'est ce qu'il fallait démontrer.

3) Soit maintenant  $W$  un sous-espace invariant de  $V$ ; on a  $W = \sum_{\mu} (W \cap V_\mu)$  en vertu du lemme puisque  $V = \sum_{\mu} V_\mu$ . Comme  $V_\lambda$  est de dimension 1, on a  $W \cap V_\lambda = 0$  ou  $W \cap V_\lambda = V_\lambda$ ; dans ce dernier cas  $W$  contient  $v$  donc est égal à  $V$  puisque  $v$  est générateur. Donc si  $W \neq V$   $W \subset V^+ = \sum_{\mu < \lambda} V_\mu$ ; la somme des sous-espaces invariants par  $\mathcal{G}$  contenus dans  $V^+$  est un sous-espace invariant différent de  $V$  qui est évidemment le plus grand des sous-espaces invariants différents de  $V$ . Ceci s'applique en particulier à la représentation dans  $U/J_\lambda$  et il en résulte qu'il existe un seul idéal à gauche maximal de  $U$  contenant  $J_\lambda$ , autrement dit, il existe à un isomorphisme près une seule représentation irréductible de poids dominant  $\lambda$ .

Résumons les résultats obtenus jusqu'à présent :

THÉORÈME 1 : Soit  $(\rho, V)$  une représentation linéaire de  $\mathcal{G}$  ayant un poids dominant  $\lambda$ . Alors  $V$  est somme directe des différents  $V_\mu$  qui sont tous de dimension finie,  $V_\lambda$  étant de dimension 1. Le seul poids dominant est  $\lambda$  et tout autre poids est de la forme  $\lambda - \sum m_i \alpha_i$  où les  $m_i$  sont des entiers  $\geq 0$ . Enfin, pour toute forme linéaire  $\lambda$  sur  $\mathfrak{h}$  il existe une et, à un isomorphisme près, une seule représentation irréductible de poids dominant  $\lambda$ .

#### 4.- Représentations irréductibles de dimension finie.

Nous allons maintenant nous intéresser aux représentations irréductibles de dimension finie de  $\mathcal{G}$  obtenant une classification complète de ces représentations. Se limiter aux représentations irréductibles n'est pas une restriction essentielle vu le théorème de complète réductibilité.

1) Une représentation  $(\rho, V)$  de dimension finie possède au moins un poids d'après le lemme, mais ses poids sont en nombre fini puisque la somme des  $V_\mu$  est directe et  $V$  de dimension finie. Il existe donc un poids de  $V$  maximal pour l'ordre (partiel)  $\mu \geq \nu$ , soit  $\lambda$ . Comme  $\lambda + \alpha_i > \lambda$ ,  $\lambda + \alpha_i$  n'est pas un poids et comme  $\rho(X_i) V_\lambda \subset V_{\lambda + \alpha_i} = 0$  il en résulte que  $\rho(X_i) v = 0$  pour tout  $v \in V_\lambda$ ; si  $v \neq 0$  c'est un générateur de  $V$  puisque la représentation est irréductible et par suite  $v$  est un vecteur dominant. On peut donc appliquer à la représentation en question les résultats du paragraphe précédent en particulier  $V$  est somme directe des  $V_\mu$  et tout poids est de la forme  $\lambda - \sum m_i \alpha_i$

2) Soit  $\mu$  un poids de  $V$  et  $\alpha$  une racine de  $\mathcal{G}$ ; on pose

$W = \sum_k V_{\mu+k\alpha}$  c'est un sous-espace de  $V$  invariant par la sous-algèbre  $\mathcal{F}$  de base  $E_\alpha, E_{-\alpha}, H_\alpha$  en vertu de la formule  $\rho(\mathfrak{g}^\alpha) V_\mu \subset V_{\mu+\alpha}$ . Comme  $\alpha(H_\alpha) = 2$ , deux poids distincts de la série  $\mu + k\alpha$  prennent des valeurs distinctes pour  $H_\alpha$ . Ceci dit, on peut appliquer à la représentation de  $\mathcal{F}$  dans  $W$  les résultats du théorème 1 de l'exposé 10. On voit par le 1) de ce théorème que  $2\mu(H_\alpha)/\alpha(H_\alpha) = \mu(H_\alpha)$  est un entier; le 3) du même dit qu'il existe un poids de  $\mathcal{F}$  dans  $W$  soit  $\mu'$  tel que  $\mu'(H_\alpha) = -\mu(H_\alpha)$ , autrement dit, il existe un poids  $\mu'$  de  $V$  de la forme  $\mu + k\alpha$  tel que  $\mu + \mu'$  soit orthogonal à  $\alpha$ . Il en résulte immédiatement que  $\mu' = S_\alpha \mu$  et que l'ensemble des poids de  $V$  est invariant par le groupe de Weyl qui est engendré par les  $S_\alpha$ ; enfin le 3) du th. 1 de l'exposé 10 dit que  $V_\mu$  et  $V_{\mu'}$  ont même dimension, donc deux poids de  $V$  équivalents par le groupe de Weyl ont même multiplicité ( $= \dim V_\mu$ ).

Le 4) du th. de l'exp. 10 affirme que si  $\mu + \alpha$  est un poids de  $W$ , et  $X \in \mathfrak{g}^\alpha$  pour une certaine racine  $\alpha$ ,  $\rho(X)W_\mu \neq 0$  autrement dit  $\rho(\mathfrak{g}^\alpha) V_\mu \neq 0$

3) De ce que l'on vient de démontrer, résulte que  $S_i \lambda = \lambda - \lambda(H_i)\alpha_i$  est un poids de  $V$ , donc d'après la forme des poids de  $V$ , que  $\lambda(H_i)$  est un entier  $\geq 0$  et même plus généralement  $\lambda(H_\alpha)$  est un entier  $\geq 0$  pour toute racine  $\alpha > 0$ . Réciproquement, soit  $(\rho, V)$  une représentation irréductible admettant un poids dominant  $\lambda$  tel que  $\lambda(H_i)$  soit un entier  $\geq 0$ ; on va montrer que  $V$  est de dimension finie. Soit  $\mathfrak{g}_i$  la sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  ayant  $X_i, Y_i, H_i$  pour base et  $T_i$  le sous-espace de  $V$  invariant par  $\mathfrak{g}_i$  engendré par  $v$ . La représentation de  $\mathfrak{g}_i$  dans  $T_i$  admet  $\lambda$  pour poids dominant, on peut donc appliquer les résultats du paragraphe précédent à l'algèbre simple  $\mathfrak{g}_i$ , donc  $T_i$  est sous-tendu par les  $\rho(Y_i)^k v$ . Si  $j \neq i$  on a  $[X_j, Y_i] = 0$  donc  $\rho(X_j)\rho(Y_i)^k v = \rho(Y_i)^k \rho(X_j)v = 0$  i.e.  $\rho(X_j)$  annule le sous-espace  $T_i$ ; si alors un sous-espace  $U_i$  de  $T_i$  invariant par  $\mathfrak{g}_i$  distinct de 0 et de  $T_i$ , <sup>on avait</sup> il serait contenu dans  $T_i^+ \subset V^+$  d'après le th. 1 et comme  $\rho(X_j)$  est nul sur  $T_i$ ,  $U_i$  serait invariant par les  $X_j$  pour  $j \neq i$  et par  $X_i$  donc par  $\mathfrak{h}_{ij}$ ; mais les poids de  $T_i$  par rapport à  $\mathfrak{g}$  sont de la forme  $\lambda - k\alpha_i$  donc à deux distincts de ces poids correspondent des poids distincts de  $\mathfrak{g}_i$  (noter que  $\alpha_i(H_i) = 2$ ); en conséquence  $U_i = \sum_{\mu} (U_i \cap V_\mu)$  donc est invariant par  $\mathfrak{h}$ . Le sous-espace  $U_i$  serait donc invariant par  $\mathfrak{g}$  et contenu dans  $V^+$ , mais alors  $0 \neq \rho(U)U_i = \rho(U_-)\rho(U_0)U_i \subset \rho(U_-)V^+ \subset V^+$  c'est-à-dire que la représentation de  $\mathfrak{g}$

dans  $V$  ne serait pas irréductible.

On vient donc de démontrer que la représentation de  $\mathcal{G}_i$  dans  $T_i$  est irréductible et possède un poids dominant  $\lambda$  tel que  $\lambda(H_i)$  soit un entier  $\geq 0$ . Mais on sait alors par les résultats de l'exposé 10 qu'il existe une représentation irréductible de dimension finie de  $\mathcal{G}_i$  ayant ce même poids dominant ; en vertu du théorème d'unicité qu'on a démontré,  $T_i$  est de dimension finie. Considérons maintenant la famille  $F_i$  des sous-espaces de dimension finie de  $V$  invariants par  $\mathcal{G}_i$ . Si  $M$  et  $N$  sont dans  $F_i$  il est clair que  $M + N$  est dans  $F_i$  et d'autre part  $\rho(\mathcal{G})M$  est de dimension finie et  $\rho(\mathcal{G}_i)\rho(\mathcal{G})M \subset \rho([\mathcal{G}, \mathcal{G}_i])M + \rho(\mathcal{G})\rho(\mathcal{G}_i)M \subset \rho(\mathcal{G})M$  donc ce sous-espace est aussi dans  $F_i$ . De là découle que la réunion  $W_i$  des sous-espaces de la famille  $F_i$  est un sous-espace invariant par  $\mathcal{G}$ , mais comme  $T_i \in F_i$  et que  $v \in T_i$ ,  $v \in W_i$  et donc,  $v$  étant générateur  $W_i = V$ .

Soit maintenant  $\mu$  un poids quelconque de  $V$  et  $x \in V_\mu$ . Le sous-espace  $\sum_k V_{\mu+k\alpha_i}$  est invariant par  $\mathcal{G}_i$ , donc il existe un sous-espace  $M$  de dimension finie invariant par  $\mathcal{G}_i$ , contenant  $x$  et contenu dans  $\sum V_{\mu+k\alpha_i}$ . Par le même argument qu'en 2), on voit que  $S_i \mu$  est alors un poids de  $V$  et par suite comme on sait que le groupe de Weyl est engendré par les symétries  $S_i$ , l'ensemble  $P$  des poids de  $V$  est invariant par le groupe de Weyl.

On sait que tous les  $V_\mu$  sont de dimension finie ; il suffit donc, pour achever la démonstration du fait que  $V$  est de dimension finie, de démontrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de poids distincts. Soit  $\mu$  un poids de  $V$  et  $\sigma \cdot \mu$  les différents transformés de  $\mu$  (en nombre fini) par le groupe de Weyl ; parmi ces transformés soit  $\nu$  le plus haut pour l'ordre  $\geq$ , on a donc  $\nu \geq S_i \nu$  d'où  $\nu(H_i)\alpha_i \geq 0$  ce qui implique  $\nu(H_i) \geq 0$ . Tout poids est donc conjugué à un poids  $\nu$  tel que  $\nu(H_i) \geq 0$  ou encore  $\langle \nu, \alpha_i \rangle \geq 0$  ; par suite si  $\beta \geq 0$   $\langle \nu, \beta \rangle \geq 0$  puis comme  $\nu = \lambda - \beta$  avec  $\beta \geq 0$   $\lambda = \nu + \beta$   $\langle \lambda, \lambda \rangle = \langle \nu, \nu \rangle + \langle \beta, \beta \rangle + 2\langle \nu, \beta \rangle \geq \langle \nu, \nu \rangle$ . Les poids tels que  $\nu(H_i) \geq 0$  sont donc contenus dans l'intersection du réseau discret des éléments de  $\mathfrak{h}_0^*$  de la forme  $\lambda - \sum m_i \alpha_i$  ( $m_i$  entier) et de la boule de rayon  $|\lambda|$  donc en nombre fini. Comme tout poids de  $V$  est conjugué par le groupe de Weyl qui est fini à l'un de ces poids en nombre fini,  $P$  est fini et  $V$  est de dimension finie.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉOREME 2 : Soit  $(\rho, V)$  une représentation linéaire irréductible de  $\mathcal{G}$  dans un espace de dimension finie. Alors :

- a) Il existe un poids dominant  $\lambda$  et  $V$  est somme directe des  $V_\mu$   
 b) L'ensemble  $P$  des poids de  $V$  est fini et invariant par le groupe de Weyl ; si deux poids  $\mu$  et  $\nu$  sont conjugués par le groupe de Weyl,  $V_\mu$  et  $V_\nu$  ont même dimension.  
 c) Pour qu'une représentation irréductible de poids dominant  $\lambda$  soit de dimension finie, il faut et il suffit que  $\lambda(H_i)$  soit un entier  $\geq 0$  pour tout  $i$  et alors  $\mu(H_\alpha)$  est entier pour toute racine  $\alpha$  et tout poids  $\mu$ .  
 d) Si  $\alpha$  est une racine de  $\mathcal{G}$  et  $\mu$  un poids de  $V$  tel que  $\mu + \alpha$  soit encore un poids, alors  $\rho(\mathcal{G}^\alpha)V_\mu \neq 0$

Remarques : 1) Supposons qu'il existe  $v \in V_\lambda$  tel que pour toute racine  $\alpha$   $v$  soit annulé par  $\rho(E_\alpha)$  ou  $\rho(E_{-\alpha})$  ; alors l'ensemble  $Q$  des racines  $\alpha$  telles que  $\rho(E_\alpha)v = 0$  vérifie  $(Q + Q) \cap \Delta \subset Q$  et  $Q \cup -Q = \Delta$ . On démontre facilement alors que pour un choix convenable de  $\sum$ ,  $\sum \subset Q$ , donc que  $v$  est un vecteur dominant. Ceci, joint au théorème 1 est l'essentiel d'un résultat récent de Harish-Chandra (Proc. Nat. Ac. Sc. of U.S.A. déc. 1954).

2) Soit  $A$  l'algèbre associative universelle engendrée par des  $X_i, Y_i, H_i$  soumis aux relations (1) avec  $[a, b] = ab - ba$ . La démonstration du théorème d'unicité se transpose aisément au cas de l'algèbre  $A$ , donc il existe une seule représentation irréductible de  $A$  de poids dominant  $\lambda$ , et comme toute représentation de  $\mathcal{G}$ , i.e. de  $U$  fournit une représentation de  $A$ , toute représentation irréductible de dimension finie de  $A$  provient d'une représentation de  $\mathcal{G}$ . Soit  $\mathcal{Q}_i$  la représentation irréductible de poids dominant  $\lambda_i$  défini par  $\lambda_i(H_j) = \delta_{ij}$  ; si  $\lambda(H_i) = m_i$ ,

$\lambda = \sum_i m_i \lambda_i$  et la représentation irréductible associée à  $\lambda$  est contenue dans  $\bigotimes_i \mathcal{Q}_i^{\otimes m_i}$  donc  $\sum_i \mathcal{Q}_i$  est une représentation fidèle de  $\mathcal{G}$ . On a donc un moyen de construire  $\mathcal{G}$  à partir des entiers de Cartan en construisant la représentation  $\sum \mathcal{Q}_i$  de  $A$  et considérant l'algèbre de Lie d'opérateurs engendrée par les générateurs de  $A$ .