Séminaire "Sophus Lie"

P. Cartier

Théorie des algèbres semi-simples

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 7, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A10_0>

Exposé n° 7

THÉORIE DES ALGÈBRES SEMI-SIMPLES

(Exposé de P. CARTIER, le 4.1.55)

Le corps de base est supposé de caractéristique 0 dans cet exposé.

1.- Préliminaires.

Soit V un espace vectoriel de dimension quelconque sur K et A une famille d'endomorphismes de V. On dit que V muni de A est <u>complètement réductible</u> si tout espace de V invariant par A admet un supplémentaire invariant par A.

<u>Lemme 1.- V étant complètement réductible, on appelle $V^\natural$ le sous espace des vecteurs annulés par tous les $X \in A$ et V^0 le sous espace engendré par les vecteurs $X v$ $(X \in A, v \in V)$.</u>

1). <u>V est somme directe de $V^\natural$ et V^0.</u>

2). <u>si V est muni d'une différentielle d commutant aux $X \in A$ et telle que $X v$ est un bord si v est un cycle</u> $H(V) \simeq H(V^\natural)$, ($H(V)$ désigne l'homologie de V pour d, $H(V) = Z(V)/B(V)$).

1) Il est clair que $V^\natural$ et V^0 sont invariants par A. $V^\natural$ admet donc un supplémentaire invariant W. Si $v = w + V'$ $w \in W$ $v' \in V^\natural$ on a $X v = X w \in W$ donc $W \supset V^0$. Soit alors T un supplémentaire de V^0 dans W. Si $t \in T$ $X t \in T \cap V^0 = 0$ donc $t \in V^\natural$ mais $T \cap V^\natural \subset W \cap V^\natural = 0$ donc $t = 0$, autrement dit $T = 0$ $W = V^0$ et V est somme directe de $V^\natural$ et V^0. Noter que si U est un sous-espace invariant de V, U est somme directe de U^0 et $U^\natural$; par ailleurs il est clair que $U^0 \subset V^0$ et $U^\natural \subset V^\natural$. Par suite $U^0 = U \cap V^0$ $U^\natural = U \cap V^\natural$ en particulier si $U \subset V^0$ $U = U^0$.

2) d commutant à A, V^0 et $V^\natural$ sont invariants par d donc $H(V)$ est somme directe de $H(V^0)$ et $H(V^\natural)$. Il suffit donc de montrer que $H(V^0) = 0$. Soit $v \in V^0$ $d v = 0$, U le sous espace invariant engendré par v : il est sous tendu par v et les $X v$. Mais $U \subset V^0$ donc $U \subset U^0$ et v est donc de la forme $\sum h_i X_i v + \sum \mu_i Y_i Z_i v$. v est un cycle donc $X_i v$ est un bord ; par ailleurs $d Z_i v = Z_i d v = 0$ donc $Z_i v$ est un cycle et $Y_i Z_i v$ est un bord. Finalement v est un bord.

C.Q.F.D.

Ce lemme permet de définir une application $\natural \quad V \longrightarrow V^{\natural}$ parallèlement à V^0, donc $v^{\natural\natural} = v^{\natural}$ $(X\, v)^{\natural} = 0$.

2.- Cohomologie des algèbres semi-simples.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, (θ, V) une représentation linéaire irréductible non triviale de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}$ annulés par θ. Il existe alors un idéal $\mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{g}$ soit isomorphe à $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ (cf. Exposé n° 6); si on restreint la représentation θ à $\mathfrak{b}$ elle est fidèle et $\mathfrak{b}$ est encore semi-simple donc (théorème 3 de l'Exposé n° 6) la restriction à $\mathfrak{b}$ de la forme quadratique $T\,r(\theta(x)\,\theta(y))$ est non dégénérée. On peut donc former l'élément de Casimir C_V correspondant à l'idéal $\mathfrak{b}$ et à la forme quadratique $T\,r(\theta\,(x)\,\theta\,(y))$. C'est un élément du centre de $U(\mathfrak{g})$ donc (Exposé n° 4, Proposition 2) C_V^* annule les $H^p(\mathfrak{g}, V)$, mais $\theta\,(C_V)$ est un automorphisme de V et ceci implique que $H^p(\mathfrak{g}, V) = 0$ pour $p \geqslant 0$. En outre si $V = K$, $\theta = 0$, $H^1(\mathfrak{g}, V) = 0$ car $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ on peut appliquer le théorème 2 de l'Exposé 4, qui montre donc que toute représentation de $\mathfrak{g}$ est complètement réductible.

Donc si (θ, V) est une représentation linéaire quelconque de dimension finie de $\mathfrak{g}$. V est somme directe de sous modules irréductibles ou triviaux, donc $V = V^{\natural} + \sum V_i$, V_i étant irréductible non trivial. Comme $H^p(\mathfrak{g}, V_i) = 0$ on voit que $H^p(\mathfrak{g}, V) = H^p(\mathfrak{g}, V^{\natural})$. Il reste donc à étudier le cas de $V = K$, $\theta = 0$.

Pour ceci rappelons que $C^p(\mathfrak{g}, K)$ est l'espace des $\mathfrak{g}$-homomorphismes de C_p dans K autrement dit les formes linéaires sur C_p telles que $f(u.c) = 0$ si $u \in U(\mathfrak{g})$, $\varepsilon(u) = 0$. Rappelons que C est engendrée par les x et les $\underline{x}$ $(x \in \mathfrak{g})$ et que $d\,x = \underline{x}$. On définit alors $\theta(x)f$ et $i(x)f$ pour la cochaine f par les formules

$$(\theta(x)f)(c) = f(c.\underline{x}) \qquad (i(x)f)(c) = f(c\,x)(-1)^p$$

d'où

$$(i(x)df + di(x)f)(c) = f(d(c.x)) - f(dc.x) = f(c.\underline{x}) = (\theta(x)f)(c)$$

donc si $df = 0$, $\theta(x)f = di(x)f$ est un bord. Comme il est clair que $[\theta(x)\,\theta(y)] = \theta([x\ y])$ c'est-à-dire que les $\theta(x)$ définissent une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$ dans $C^p(\mathfrak{g}, K)$ et que par ailleurs $\theta(x)d = i(x)d^2 + di(x)d = d\,\theta(x)$ (car $d^2 = 0$), il suffit de remarquer que toute représentation de $\mathfrak{g}$ est complètement réductible pour pouvoir appliquer le 2) du lemme 1. Nous allons montrer que, si f est annulée par les $\theta(x)$,

$d\,f = 0$, ce qui achèvera de prouver que $H^P(\mathfrak{g}, K)$ s'identifie aux cochaînes invariantes de degré P . Or il suffit de calculer $d(x_1\dots x_p)$ dans C_p

$$d(x_1\dots x_p) = \sum_i (-1)^{i-1}\, x_1 \dots \underline{x}_i \dots x_p$$

mais $\underline{x}_i\, x_1\dots\hat{x}_i\dots x_p = x_1\dots\underline{x}_i\dots x_p + \sum_{j<i} x_1\dots[x_i,x_j]\dots\hat{x}_i\dots x_p$

$$x_1\dots\hat{x}_i\dots x_p\, \underline{x}_i = x_1\dots\underline{x}_i\dots x_p - \sum_{j>i} x_1\dots\hat{x}_i\dots[x_i,x_j]\dots x_p$$

additionnons ces deux égalités membre à membre, multiplions par $(-1)^{i-1}$ et sommons en i ; il viendra alors en utilisant le fait que les x_i anticommutent dans $C(\mathfrak{g})$

$$\begin{aligned}
&\sum(-1)^{i-1}\, \underline{x}_i\, x_1\dots\hat{x}_i\dots x_p + \sum(-1)^{i-1}\, x_1\dots\hat{x}_i\dots x_p\, \underline{x}_i \\
&\quad = 2\, d(x_1\dots x_p) + \sum_i \sum_{j<i} (-1)^{i+j-2}\, [x_i,x_j]\, x_1\dots\hat{x}_j\dots\hat{x}_i\dots x_p \\
&\qquad\qquad + \sum_i \sum_{j>i} (-1)^{i+j-2}\, [x_i,x_j]\, x_1\dots\hat{x}_i\dots\hat{x}_j\dots x_p \\
&\quad = 2\, d(x_1 \dots x_p)
\end{aligned}$$

Mais f s'annule sur les termes commençant ou se terminant par $\underline{x}_i$ donc $2\, df(x_1 \dots x_p) = 0$ c'est-à-dire $df = 0$.

Remarquons finalement que les cochaînes à valeurs dans K s'identifient aux formes linéaires sur l'algèbre extérieure $\Lambda(\mathfrak{g})$ et qu'alors

$$(\theta(x)f)(a) = f(a\, \underline{x}) = -\, f([\underline{x}\ ,\ a]) = -\, f(\theta(x)a) \qquad a \in \Lambda(\mathfrak{g})$$

$\theta(x)a$ désignant la valeur de a pour la dérivation de $\Lambda(\mathfrak{g})$ qui prolonge $\mathrm{ad}x$ sur $\Lambda^1(\mathfrak{g})$. Autrement dit $\theta(x)f = 0$ signifie que f est une forme multilinéaire invariante sur $\mathfrak{g}$.

<u>Théorème 1 : si V est un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie $H^p(\mathfrak{g}, V)$ est isomorphe à $H^p(\mathfrak{g}, V^{\natural})$. Par ailleurs $H^p(\mathfrak{g}, K)$ s'identifie à l'espace des formes p-linéaires alternées invariantes sur $\mathfrak{g}$.</u>

Tirons maintenant les conséquences de ce théorème en ce qui concerne la théorie des algèbres semi-simples. Tout d'abord on a vu que toute représentation de $\mathfrak{g}$ est complètement réductible. Réciproquement si cette propriété est vraie, la représentation adjointe est complètement réductible donc tout idéal admet une supplémentaire. Si $\mathfrak{g}$ n'était pas semi-simple, elle aurait un idéal abélien non nul $\mathfrak{a}$, alors $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ et toute représentation de $\mathfrak{a}$ se prolonge en une représentation de $\mathfrak{g}$ nulle sur $\mathfrak{b}$. Or une algèbre de Lie abélienne possède des représentations non complètement réductibles, par exemple, la représentation matricielle

$$a \longrightarrow \begin{Vmatrix} 0 & \lambda(a) \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad \lambda \text{ forme linéaire sur } \mathfrak{a} .$$

donc :

Théorème 2 : Pour qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit semi simple, il faut et il suffit que toute représentation linéaire de $\mathfrak{g}$ soit complètement réductible.

Corollaire : si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, toute dérivation de $\mathfrak{g}$ est intérieure.

Soit $\mathfrak{D}$ l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{J}$ l'idéal de $\mathfrak{D}$ formé des dérivations intérieures. $x \longrightarrow adx$ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{J}$; donc $\mathfrak{J}$ est un idéal semi-simple de $\mathfrak{D}$. La représentation adjointe de $\mathfrak{J}$ dans $\mathfrak{D}$ est complètement réductible, donc $\mathfrak{D}$ est somme directe de $[\mathfrak{J}, \mathfrak{D}]$ et du sous espace $\mathfrak{D}^{\natural}$ des éléments commutant à $\mathfrak{J}$. Or si $D \in \mathfrak{D}^{\natural}$ $[adx, D] = adDx = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$, mais alors $Dx = 0$ et finalement $D = 0$. Comme $[\mathfrak{J}, \mathfrak{D}] \subset \mathfrak{J}$ puisque $\mathfrak{J}$ est un idéal de $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{J}$.

C.Q.F.D.

On peut démontrer ceci autrement : D une dérivation de $\mathfrak{g}$ est une 1-cochaîne à valeurs dans $\mathfrak{g}$ (muni de la représentation adjointe)

$$\begin{aligned} \delta D(x,y) &= adx\, D(y) - ady\, D(x) - D([x,y]) \\ &= [x, D(y)] + [D(x), y] - D([x,y]) = 0 \end{aligned}$$

D est un cocycle donc un cobord puisque $\mathfrak{g}^{\natural} = 0$ (c'est le centre de $\mathfrak{g}$) et il existe $a \in \mathfrak{g}$ tel que $D(x) = -adx.a = ada.x$.

Théorème 3 : Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, toute extension de $\mathfrak{g}$ par une algèbre résoluble est inessentielle. Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ sont deux sections, elles sont conjuguées par un automorphisme spécial.

Il suffit de remarquer que $H^2(\mathfrak{g}, V) = H^1(\mathfrak{g}, V) = 0$ pour toute représentation irréductible non triviale de $\mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ pour pouvoir appliquer le théorème 2 de l'Exposé n° 5 .

3.- Algèbres réductives.

Définition : Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, on dira que $\mathfrak{h}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$ lorsque la représentation adjointe de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ est complètement réductible, $\mathfrak{g}$ réductive dans $\mathfrak{g}$ se dira simplement $\mathfrak{g}$ - réductive.

Théorème 4 : Les 3 conditions suivantes sont équivalentes :

1) Pour tout $x \in \mathfrak{g}$ non nul il existe une représentation irréductible (θ, V) de $\mathfrak{g}$ avec $\theta(x) \neq 0$.

2) $\mathfrak{g}$ est somme directe d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre

<u>abélienne</u> : $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} + [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ ($\mathfrak{z}$ centre de $\mathfrak{g}$).

3) <u>$\mathfrak{g}$ est réductive</u>.

1) $\Longrightarrow$ 3) Soit $\mathfrak{m}$ un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{n} = [\mathfrak{m},\mathfrak{g}]$. Le lemme 2 de l'Exposé n° 5 montre que $\theta([\mathfrak{m},\mathfrak{g}])$ est dans le radical de l'algèbre associative $\theta(U(\mathfrak{g}))$ donc que $\theta(\mathfrak{n}) = 0$ si (θ,V) est une représentation irréductible. Finalement $\mathfrak{n} = 0$ d'après la condition 1). Tout idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ est contenu dans le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ n'a pas d'idéal résoluble $\neq 0$ car un tel idéal serait de la forme $\mathfrak{m}/\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{m}$ serait résoluble $\neq \mathfrak{z}$. Donc $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ est semi-simple. La représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ s'annule sur $\mathfrak{z}$ et toute représentation de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ est complètement réductible, donc $\mathfrak{g}$ est réductive.

3) $\Longrightarrow$ 2) Soit $\mathfrak{g}$ réductive. Le lemme 1 montre que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\natural} + [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ c'est-à-dire $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} + [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. D'autre part $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est somme directe d'idéaux minimaux qui ne peuvent être abéliens sinon ils appartiendraient à $\mathfrak{z}$. Donc $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est somme directe d'algèbres simples : elle est semi-simple.

2) $\Longrightarrow$ 1) Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{a}$, $\mathfrak{h}$ semi-simple, $\mathfrak{a}$ abélienne. La représentation adjointe de $\mathfrak{h}$ est fidèle sur $\mathfrak{h}$. Soit une base $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ du dual de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$. On construit une représentation complètement réductible fidèle de $\mathfrak{g}$ en posant

$$\theta(h + a) = \left\| \begin{matrix} \mathrm{ad}\,h & & 0 \\ & \lambda_1(a) & \\ 0 & & \lambda_n(a) \end{matrix} \right\|$$

C.Q.F.D.

Supposons donnée une représentation irréductible d'une algèbre de Lie réductive soit (θ, V). Soit $\mathfrak{a}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$ contenu dans le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$. Le commutant de $\theta(\mathfrak{g})$ est un corps L d'après le lemme de Schur, corps qui contient $\theta(\mathfrak{a})$. Donc l'algèbre d'opérateurs engendrée par $\theta(\mathfrak{a})$ est un sous corps M de L et la réduction à $\mathfrak{a}$ de la représentation donnée est complètement réductible. Même résultat si (θ,V) est complètement réductible.

Remarquons que si A est une algèbre associative et commutative toute représentation irréductible s'effectue dans A/M où M est un idéal maximal de A. De là on déduit que toute représentation irréductible d'une algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{a}$ s'obtient comme suit : on considère une extension de degré finie L sur K et une application linéaire θ de $\mathfrak{a}$ dans L, $\theta(\mathfrak{a})$ engendrant le corps L sur K ; la représentation se passe alors dans L avec $\theta(x)(\ell) = \theta(x).\ell$ (produit dans le corps L).

Soit alors $\mathfrak{g}$ réductive $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{z}$, (θ,V) une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$ dont la restriction à $\mathfrak{z}$ est complètement réductible. Il résulte de ce qu'on vient de dire que V est somme directe de sous-espaces V_i invariants par $\theta(\mathfrak{z})$, la restriction de $\theta(\mathfrak{z})$ à V_i engendrant un corps L_i d'opérat urs et L_i étant non isomorphe à L_j pour $i \neq j$. Tout opérateur commutant à $\theta(\mathfrak{z})$ conserve alors les V_i qui sont donc invariants par $\theta(\mathfrak{g})$. Un sous-espace de V_i invariant par $\theta(\mathfrak{g})$ est alors la même chose qu'un sous-espace L_i-vectoriel de V_i invariant par $\mathfrak{h}$. Mais le critère de Cartan montre immédiatement que $\mathfrak{h}$ étant semi-simple, il en est de même de $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}^{L_i}$ (algèbre déduite de $\mathfrak{h}$ par extension du corps des scalaires) et donc toute représentation de $\mathfrak{h}'$ est complètement réductible. Donc la représentation de $\mathfrak{g}$ dans V_i est complètement réductible, ainsi que la représentation de $\mathfrak{g}$ dans V .

<u>Proposition 1</u> : $\mathfrak{g}$ <u>étant réductive, pour qu'une représentation de</u> $\mathfrak{g}$ <u>soit complètement réductible, il faut et il suffit que la restriction de cette représentation au centre</u> $\mathfrak{z}$ <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>le soit</u>.

Considérons maintenant deux représentations complètement réductibles de $\mathfrak{g}$, (θ_i,V_i) et leur produit tensoriel (ρ,W) . La restriction de ρ à $\mathfrak{z}$ est identique au produit des restrictions à $\mathfrak{z}$ de θ_1 et θ_2 . Si nous montrons donc que le produit tensoriel de deux représentations complètement réductibles de $\mathfrak{z}$ est de cette espèce, une double application de la Proposition 1 montrera que ρ est complètement réductible. Soient donc deux extensions L_i de K et $\Psi_i = \mathfrak{z} \longrightarrow L_i$ deux applications linéaires, on définit une représentation linéaire de $\mathfrak{z} \times \mathfrak{z}$ dans $L_1 \otimes L_2$ en posant $\theta(\mathfrak{z}_1,\mathfrak{z}_2) = \Psi_1(\mathfrak{z}_1) \otimes 1 + 1 \otimes \Psi_2(\mathfrak{z}_2)$. Un sous espace invariant de $L_1 \otimes L_2$ est alors ni plus ni moins qu'un idéal de l'algèbre $L_1 \otimes L_2$. Mais on est en caractéristique nulle, donc $L_1 \otimes L_2$ est une algèbre <u>semi-simple</u> donc la représentation de $\mathfrak{z} \times \mathfrak{z}$ est complètement réductible et il en est de même de la restriction de cette représentation à l'ensemble des $(z\,,z\,)$. Autrement dit le produit tensoriel des représentations Ψ_1 et Ψ_2 est complètement réductible.

<u>Proposition 2</u> : <u>le produit tensoriel de deux représentations complètement réductibles d'une algèbre de Lie quelconque est complètement réductible</u>.

La proposition a été démontrée pour $\mathfrak{g}$ réductive. Mais si $\mathfrak{n}$ est le noyau de $\theta_1 \oplus \theta_2$, on a, en fait, affaire à des représentations de $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$

et $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ est réductive d'après la condition 1 du théorème 4.

<u>Corollaire</u> : si (θ,V) est complètement réductible, il en est de même des représentations canoniques de $\mathfrak{g}$ dans $T(V)$, $S(V)$, $\wedge(V)$. De plus si V est une algèbre de Lie dont les $\theta(g)$ sont des dérivations, la représentation de $\mathfrak{g}$ dans $U(V)$ est aussi complètement réductible.

$S(V)$ et $\wedge(V)$ étant des quotients de $T(V)$ et $T(V)$ étant somme directe des $\underbrace{V\otimes V \ldots \otimes V}_{n \text{ fois}}$ les premières assertions sont évidentes. D'autre part $U(V)$ est quotient de $S(V)$ par l'idéal J engendré par les $u\otimes v - v\otimes u - [u,v] = g_{u,v}$ et J est stable pour les $\theta(x)$ car

$$\theta(x)g_{u,v} = g_{\theta(x)u,v} + g_{u,\theta(x)v} \in J$$

Ce corollaire s'appliquera au cas de $\mathfrak{h}$ réductive dans $\mathfrak{g}$, la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ étant la représentation adjointe.

<u>Théorème 5</u> : <u>si</u> $\mathfrak{h}$ <u>est réductive dans</u> $\mathfrak{g}$ <u>et</u> (θ,V) <u>est une représentation complètement réductible de</u> $\mathfrak{g}$, <u>cette représentation reste de même espèce quand on la restreint à</u> $\mathfrak{h}$.

On peut sans restreindre la généralité supposer (θ,V) irréductible. Soit $W\subset V$ un sous espace irréductible pour $\mathfrak{h}$. Comme V est irréductible pour $\mathfrak{g}$, tout élément de V est de la forme $\sum\theta(u_i)w_i$, $(w_i\in W$, $u_i\in U(\mathfrak{g})$). Autrement l'application $\rho : u\otimes w \longrightarrow \theta(u)w$ de $U(\mathfrak{g})\otimes W \rightarrow V$ est surjective. Montrons que cette application est compatible avec les opérateurs de $\mathfrak{h}$. $d_x\, u \longrightarrow xu - ux$ $(x\in\mathfrak{h})$ est la dérivation de $U(\mathfrak{g})$ qui prolonge $\operatorname{ad}x$ donc la représentation $x\rightarrow d_x$ de $\mathfrak{h}$ dans $U(\mathfrak{g})$ est complètement réductible (corollaire de la proposition 2). D'autre part, l'image de $d_x\,u\otimes w + u\otimes\theta(x)w$ est $\theta(d_x\,u)w + \theta(u)\,\theta(x)w = \theta(x)\,\theta(u)w$ donc ρ est compatible avec les opérateurs de $\mathfrak{h}$. La représentation de $\mathfrak{h}$ dans $U(\mathfrak{g})\otimes W$ étant complètement réductible, il en est de même de la représentation de $\mathfrak{h}$ dans V.

C.Q.F.D.

4.- <u>Le théorème des invariants de Hilbert</u>.

V est une algèbre de Lie et θ une représentation complètement réductible de $\mathfrak{g}$ dans V. $U = U(V)$ est l'algèbre enveloppante de V. D'après le corollaire de la proposition 2 et le lemme 1, $U = U^{\natural} + U^0$. Comme les $\theta(g)$ sont des dérivations $U^{\natural}$ est une sous-algèbre. D'autre part si $u\in U^{\natural}$ $v\in U^0$ on a $v = \sum\theta(g_i)v_i$ et $uv = \sum u\,\theta(g_i)v_i = \sum\theta(g_i)(u\,v_i)\in U^0$ donc

$U^\natural U^0 \subset U^0$. De même $U^0 U^\natural \subset U^0$. L'application $\natural$ a donc les propriétés :

$$(u\, v^\natural)^\natural = u^\natural v^\natural = (u^\natural v)^\natural \quad .$$

Plus généralement soit ω une classe de représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ (de dimension finie) et U_ω le sous-espace de U engendré par tous les sous-espaces invariants irréductibles de classe ω . Le théorème de densité de Jacobson montre que U est somme directe des U_ω . D'autre part, les U_ω sont invariants par $\theta(\mathfrak{g})$ et par tous les opérateurs commutant aux $\theta(g)$ en particulier aux multiplications à droite et à gauche par les $u \in U^\natural$. Autrement dit les U_ω sont des modules sur $U^\natural$.

<u>Théorème 6 : L'algèbre</u> $U^\natural$ <u>a un nombre fini de générateurs</u>. <u>Chaque</u> U_ω <u>est un module de type fini sur</u> $U^\natural$.

Les applications les plus importantes concernent le cas où $\mathfrak{h}$ est une sous algèbre réductive de V , et le cas où V est abélienne, c'est-à-dire où V est une représentation de $\mathfrak{g}$ simplement supposée complètement réductible.

<u>Démonstration</u> : soit d'abord V abélienne. $U^\natural$ est somme des $U^\natural \cap U^p$ $(U^p = S^p(V))$ car les U^p sont des sous-espaces invariants. Soit I l'idéal de $S(V)$ engendré par les $U^\natural \cap U^p$ pour $p > 0$. D'après le théorème de Hilbert, I a une base finie $s_1 \ldots s_n$ dont on peut prendre les membres dans les $U^p \cap U^\natural$. Soit T la sous algèbre engendrée par les s_i et $T \subset U^\natural$. Montrons par récurrence sur p que $T \cap U^p = U^\natural \cap U^p$. C'est évident si $p = 0$ et supposons le démontré pour $p < q$ alors si $u \in U^q \cap U^\natural$ $u = \sum s_i' \, s_i$ s_i' étant homogène de degré p_i . Comme $\deg s_i > 0$ on peut supposer $p_i < q$. Alors $u = u^\natural = \sum (s_i' \, s_i^\natural)^\natural = \sum s_i'^\natural s_i$. Mais $t_i = s_i'^\natural \in U^\natural \cap U^{p_i} \subset T \cap U^{p_i}$ donc $t_i \in T$ et finalement $u \in T$. Donc $U^\natural \cap U^q = T \cap U^q$.

Venons-en à l'assertion sur U_ω (ρ, D) sera une représentation de classe ω et L l'espace des applications linéaires de D dans $S(V)$. L'application $\tau : f \otimes d \longrightarrow f(d)$ applique $L \otimes D$ sur $S(V)$ et elle est compatible avec les opérateurs de $\mathfrak{g}$. Par ailleurs L est un $S(V)$ module de façon naturelle par $(u.f)(d) = u\, f(d)$ et ce module est de type fini. De plus on vérifie $\theta(g)u.f + u.\theta(g)f = \theta(g)(u.f)$ car $\theta(g)$ est une dérivation de $S(V)$ d'où $(u.f^\natural)^\natural = u^\natural.f^\natural.L^\natural$ est l'espace des $\mathfrak{g}$-homomorphismes de D dans $S(V)$ donc τ applique $L^\natural$ sur U_ω. Soit J le sous-$S(V)$-module de L engendré par $L^\natural$. Il a une base finie car $S(V)$ est noethérien. Soit (t_i) une base de J avec $t_i \in L$. Alors si $f \in L^\natural$ $f = \sum u_i \, . \, t_i$ d'où $f = f^\natural = \sum (u_i \, . \, t_i^\natural)^\natural = \sum u_i^\natural . t_i$. Donc (t_i) est une base de $L^\natural$ sur $U^\natural$. La réunion des images des t_i dans U_ω est de dimension finie et engendre U_ω comme $U^\natural$-module (à gauche).

Passons maintenant au cas général. U est filtrée par les U_p et $U_p/U_{p-1} \simeq S^p(V)$. Les U_p sont stables pour $\mathfrak{g}$ et complètement réductibles donc l'image dans S^p de $U_p \cap U_\omega$ est $S^p \cap S_\omega$ de même l'image de $U_p \cap U^\natural$ est $S^p \cap S^\natural$. Donc l'algèbre graduée associée à $U^\natural$ est $S^\natural$ qui a un nombre fini de générateurs $s_1 \dots s_n$. Ces éléments proviennent d'éléments $u_i \in U^{p_i}$. Alors si R est la sous-algèbre de $U^\natural$ engendrée par les u_i , et $u \in U^\natural \cap U_p$ on a $u \in T$ mod $U_{p-1} \cap T$. Mais par récurrence sur p on peut supposer $U_{p-1} \cap T = U_{p-1} \cap U^\natural$ donc $u \in T$ et finalement $U^\natural \cap U_p = T \cap U_p$ d'où $(p \longrightarrow \infty)$ $T = U^\natural$.

U_ω est un $U^\natural$-module filtré dont le gradué associé est S_ω donc une technique analogue montre que U_ω a une base finie sur $U^\natural$.

C.Q.F.D.