SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DAVID KURTZ
ANTHONY PHAN

Correction à un article d'Attal et Émery sur « les martingales d'Azéma bidimensionnelles »

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 35 (2001), p. 120-122
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_2001__35__120_0>

CORRECTION À UN ARTICLE D'ATTAL ET ÉMERY SUR LES MARTINGALES D'AZÉMA BIDIMENSIONNELLES

par

David KURTZ et Anthony PHAN

Dans l'article [1] sur les martingales d'Azéma bidimensionnelles, il est dit page 17 qu'une martingale normale[1] est presque sûrement non convergente, donc presque sûrement non unilatéralement bornée. Ceci n'est pas exact. En temps discret, on construit sans peine une martingale X convergente, et même positive, dont la variation quadratique prévisible

$$\langle X, X\rangle_n = \sum_{m<n} \mathbb{E}\big[(X_{m+1} - X_m)^2 \mid \mathcal{F}_m\big]$$

est égale à n : prendre par exemple une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ de réels strictement positifs dont la somme est convergente, poser $X_0 = \sum_{n\geqslant 0} \varepsilon_n$, et choisir les accroissements $(X_{n+1} - X_n)_{n\geqslant 0}$ indépendants vérifiant

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} - X_n = -\varepsilon_n\} = 1 - \mathbb{P}\{X_{n+1} - X_n = 1/\varepsilon_n\} = \frac{1}{1+\varepsilon_n^2}.$$

Dans la même veine, en temps continu, il est facile d'exhiber des martingales normales positives, et *a fortiori* convergentes. C'est par exemple le cas de la martingale vérifiant

$$\mathrm{d}[X, X]_t = \mathrm{d}t + (t+1)^2\,\mathrm{d}X_t, \qquad X_0 = 1,$$

qui peut s'écrire explicitement en fonction de la suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ des instants de sauts d'un processus de Poisson standard (*voir* [2]) :

$$X_t = \frac{1}{t+1} + \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{1}_{\{1/(t+1)^3 \leqslant 1-3J_n\}} (1 - 3J_n)^{-2/3}.$$

Mais puisque les martingales auxquelles s'intéressent Attal et Émery dans leur article sont des solutions d'équations de structure markoviennes, nous allons établir le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\phi(x) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_{\{x>0\}}$. Pour tout $x_0 > 0$, l'équation de structure*

$$\mathrm{d}[X, X]_t = \mathrm{d}t + \phi(X_{t-})\,\mathrm{d}X_t, \qquad X_0 = x_0$$

a une solution, unique en loi. Cette solution est une martingale positive, à variation finie, n'ayant presque sûrement qu'un nombre fini de sauts, tendant presque sûrement vers 0 à l'infini, et possédant les propriétés de représentation prévisible et chaotique.

Rappelons que les solutions d'une équation de structure dont la loi initiale est intégrable sont toujours des martingales (par convention et d'après [2]) normales (en raison de la forme de l'équation).

---

1. C'est-à-dire une martingale locale réelle X telle que $(X_t^2 - t)_{t\geqslant 0}$ soit aussi une martingale locale, ou encore telle que $\langle X, X\rangle_t = t$.

Démonstration. — L'existence d'une telle solution X est établie par une construction trajectoire par trajectoire à l'aide de la donnée d'une suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. Nous expliciterons la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ des instants de sauts de X, instants au cours desquels $\Delta X_{S_n} = \phi(X_{S_n-})$ et entre lesquels X dérivera selon le flot de l'équation différentielle $\mathrm{d}t + \phi(x)\,\mathrm{d}x = 0$, flot qui est donné par $t \mapsto x(t) = x(0)\exp(-t)$ pour toute condition initiale $x(0) > 0$.

Le premier instant de saut est défini par

$$S_1 = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\ln\left(1 - \dfrac{2\,T_1}{x_0^2}\right) & \text{sur l'événement } \{T_1 < x_0^2/2\}, \\ \infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On pose $X_t = x_0\exp(-t)$ pour tout $t \in [\![0, S_1[\![$, et $X_{S_1} = X_{S_1-} + \phi(X_{S_1-}) = X_{S_1-} + 1/X_{S_1-}$ sur $\{S_1 < \infty\}$. La construction est à poursuivre lorsque $S_1 < \infty$:

$$S_2 = \begin{cases} S_1 - \dfrac{1}{2}\ln\left(1 - \dfrac{2\,T_2}{X_{S_1}^2}\right) & \text{si } S_1 < \infty \text{ et } T_2 < X_{S_1}^2/2, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sur $\{S_1 < \infty\}$, on pose $X_t = X_{S_1}\exp(-t + S_1)$ pour tout $t \in [\![S_1, S_2[\![$, et $X_{S_2} = X_{S_2-} + 1/X_{S_2-}$ sur $\{S_2 < \infty\}$. On continue ainsi de proche en proche pour obtenir la suite croissante $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et le processus X défini sur $[\![0, \sup_n S_n[\![$.

Les $(S_n)_{n\geqslant 1}$ sont des temps d'arrêt de la filtration engendrée par X — qui est d'ailleurs la plus petite filtration ayant cette propriété —, et il est élémentaire de vérifier que, pour chaque n, le processus arrêté $X|^{S_n}$ est une martingale positive (et même minorée par $t \mapsto x_0\exp(-t)$), solution sur $[\![0, S_n]\!]$ de l'équation de structure proposée (pour plus de détails, *voir* [4], proposition 6.1.1).

Nous allons montrer que $S_\infty = \sup_n S_n$ est presque sûrement infini. Soit $t > 0$. Chaque martingale $X|^{S_n}$ étant normale sur $[\![0, S_n]\!]$, on a

$$\mathbb{E}[X_{S_n\wedge t}^2] = x_0^2 + \mathbb{E}[S_n \wedge t] \leqslant x_0^2 + t,$$

ce qui montre que la martingale à temps discret $(X_{S_n\wedge t})_{n\geqslant 1}$ converge (presque sûrement et dans L^2) vers une limite. Ainsi, sur $\{S_\infty < t\}$, la limite $X_{S_\infty-}$ existe presque sûrement, donc les sauts $\Delta X_{S_n} = \phi(X_{S_n-})$ tendent vers zéro. Mais ceci ne peut avoir lieu puisque ϕ est minorée sur tout intervalle borné $]0, A[$ de $]0, +\infty[$, et que, sur $\{S_\infty < t\}$, la suite $(X_{S_n-})_{n\geqslant 1}$ est majorée et qu'alors la suite $(\phi(X_{S_n-}))_{n\geqslant 1}$ est minorée par une variable aléatoire strictement positive. Ainsi pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}\{S_\infty < t\} = 0$. En conséquence, X est défini sur $[\![0, \infty[\![$, et c'est une martingale normale, solution de l'équation de structure.

Par construction, le processus X est à variation finie et reste strictement positif ; le théorème de convergence des martingales positives entraîne l'existence d'une limite presque sûre X_∞, finie presque sûrement. Sur $\{S_n < \infty,\ \text{pour tout } n\}$ on a donc $\Delta X_{S_n} \to 0$, ce qui comme précédemment est impossible puisque pour chaque trajectoire les $(X_{S_n-})_{n\geqslant 1}$ demeurent dans un intervalle borné de $]0, +\infty[$. Ainsi S_n est infini pour n assez grand, et si S_N est le dernier instant de saut de X, on a $X_t = X_{S_N}\exp(-t + S_N)$ pour tout $t \geqslant S_N$, d'où $X_\infty = 0$.

Pour l'unicité, on remarque que toute solution X issue de $x_0 > 0$ est une martingale strictement positive (X demeure au dessus de $t \mapsto x_0\exp(-t)$) et ainsi converge presque sûrement. Les propriétés élémentaires des solutions d'équations d'équation de structure assurent l'unicité en loi jusqu'au premier instant où la valeur absolue du paramètre — qui est ici le processus $(\phi(X_{t-}))_{t\geqslant 0}$ — devient inférieure à un $\varepsilon > 0$. En laissant tendre ce ε vers 0, on en déduit qu'il n'y a pas d'autre solution que celle proposée ci-dessus.

Enfin, la propriété de représentation prévisible se déduit de l'unicité par la proposition 3 de [2], et la représentation chaotique de la représentation prévisible par le théorème 5 de [3]. □

Remarque. — Au prix de quelques complications mineures dans la démonstration, la proposition reste vraie pour toute fonction borélienne $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $\phi(x) > 0$ pour tout $x > 0$;

(ii) ϕ est localement bornée dans l'ouvert $]0, +\infty[$ et minorée sur tout intervalle borné $]0, A[$ par une constante strictement positive ;

(iii) $\int_{0+} \phi(u)\,\mathrm{d}u = +\infty$.

L'hypothèse (ii) pourrait être affaiblie en ne supposant la minoration que sur les compacts de $]0, +\infty[$, mais ceci ferait perdre une partie de la conclusion : si ϕ pouvait prendre des valeurs arbitrairement petites au voisinage de 0^+, une martingale solution pourrait comporter une infinité de petits sauts à l'infini, sa limite presque sûre restant cependant nulle.

Revenons maintenant à l'article [1]. L'assertion fausse y était utilisée pour prouver le résultat suivant : si $Z = (X, Y)$ est une martingale normale à valeurs dans une conique propre ou dégénérée du plan $\mathbb{R}^2$, alors cette conique est nécessairement une hyperbole (éventuellement dégénérée en deux droites concourantes). Ce résultat subsiste, avec presque la même démonstration ; le seul point à compléter est la preuve que la conique ne peut pas être une parabole. Supposons donc Z à valeurs dans une parabole ; par un déplacement euclidien (ce qui respecte la normalité), on pourrait en mettre l'équation sous la forme $y = a\,x^2$, avec $a \neq 0$. On aurait donc $Y_t = a\,X_t^2$; en passant aux espérances, on obtiendrait l'identité $\mathbb{E}[Y_0] = a\big(\mathbb{E}[X_0^2] + t\big)$, dont il serait absurde qu'elle soit satisfaite pour tout t.

Références

[1] Attal (S.) et Émery (M.), « Martingales d'Azéma bidimensionnelles », *Hommage à P.-A. Meyer et J. Neveu. Astérisque*, Astérisque 236, Société Mathématique de France (1996), p. 9–21.

[2] Émery (M.), « On the Azéma martingales », *Séminaire de probabilités XXIII*, Lecture Notes in Mathematics 1372, Springer (1989), p. 66–87.

[3] Émery (M.), « Quelques cas de représentation chaotique », *Séminaire de probabilités XXV*, Lecture Notes in Mathematics 1485, Springer (1991), p. 10–23.

[4] Taviot (G.), *Martingales et Équations de Structure : Étude Géométrique*, thèse de doctorat, Université Louis Pasteur (1999).

I.R.M.A.
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg cedex

kurtz@math.u-strasbg.fr
phan@math.u-strasbg.fr