LAURENT DENIS
AXEL GRORUD
MONIQUE PONTIER

Formes de Dirichlet sur un espace de Wiener-Poisson. Application au grossissement de filtration

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 34 (2000), p. 198-217
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_2000__34__198_0>

Formes de Dirichlet sur un Espace de Wiener-Poisson. Application au grossissement de filtration

Laurent DENIS,[1] Axel GRORUD,[2] Monique PONTIER[3]

résumé

Il existe une construction classique d'une structure de Dirichlet sur un espace de Wiener. On construit ici une structure analogue sur un espace de Poisson et sur l'espace produit Wiener-Poisson. Cette construction permet de donner une condition simple sur une variable terminale qui rend possible le grossissement initial de la filtration naturelle par cette variable. On analyse la stratégie financière optimale d'un agent qui a une information anticipant le marché en grossissant la filtration engendrée par les prix.

abstract

A Dirichlet structure is built on a Wiener-Poisson space. A simple condition is given on a terminal random variable such that the initial enlargement of the natural filtration can be done. We study the optimal financial strategy of an insider trader enlarging the filtration generated by the assets prices with his anticipating information.

1 Introduction

La motivation initiale de ce travail a été la modélisation du délit d'initié dans un marché dont les prix comportent des sauts, en prolongement d'un travail précédent [10]. Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t, t \in [0,T]), \mathbb{P})$, la dynamique des prix est régie par un mouvement brownien W de dimension m et un processus ponctuel N de dimension n ayant la propriété de représentation prévisible :

$$S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_s^i(b_s^i ds + \sigma_s^i dW_s) + \int_0^t S_{s-}^i \int_O \phi^i(x,s) N(dx,ds), 0 \le t \le T, i = 1, \cdots, d. \tag{1}$$

On se place selon le point de vue d'un investisseur "initié" : il connait des informations sur le futur, représentées par une variable aléatoire $L \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{R}^\kappa)$, (par exemple, des échanges auront lieu et il sait à quelle date). On note $\mathcal{Y}$ la filtration "naturelle" de l'initié régularisée à droite : $\mathcal{Y}_t = \cap_{s>t}(\mathcal{F}_s \vee \sigma(L)), t \in [0,T]$.

[1]L. D. : U.M.R. CNRS 6633, Département de Mathématiques Université du Maine, Avenue Olivier Messiaen,
BP 535 , 72017 LE MANS cedex. e-mail ldenis@univ-lemans.fr

[2]A. G. : L.A.T.P.,Université de Provence, Projet OMEGA INRIA, 39 rue Joliot-Curie, 13453 MARSEILLE cedex 13 ; e-mail : axel@gyptis.univ-mrs.fr.

[3]M.P. : L.S.P, U.M.R. CNRS C 5583 Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31 062 TOULOUSE cedex 04 ; e-mail : pontier@cict.fr.

Le problème qui se pose alors est que W et N ne sont plus nécessairement des semi-martingales pour la nouvelle filtration. La méthode de grossissement initial d'une filtration permet de trouver les conditions sur L pour que $W_t = B_t + A_t$ où B est un $\mathcal{Y}$−brownien et A un $\mathcal{Y}$−processus croissant et pour que N_t admette un compensateur $\mathcal{Y}$-prévisible. Dans le cas continu, Marc Yor [23], Mireille Chaleyat-Maurel et Thierry Jeulin [6] ont traité le cas où L est une variable gaussienne. Toujours sur un espace de Wiener, Thierry Jeulin [17] et Marc Yor [24] donnent explicitement le mouvement brownien de la filtration grossie dans le cas où la variable aléatoire L est un temps d'atteinte ou le temps local du brownien initial. Plus généralement, Jean Jacod [14] et Shiqi Song [22] ont résolu le problème si la famille des lois conditionnelles $Q_t(\omega, .)$ de L sachant $\mathcal{F}_t$ est dominée presque sûrement par une mesure non-aléatoire.

Ce travail donne la construction d'une structure de Dirichlet sur l'espace de Wiener-Poisson. On utilise les résultats de Bouleau-Hirsch [3] pour obtenir une structure de Dirichlet conditionnelle ce qui permet alors de donner une condition simple sur L (l'hypothèse $\boldsymbol{H_C}$, section 4.2) pour obtenir la continuité absolue de ces lois conditionnelles, y compris dans le cas de variables aléatoires L vectorielles, ce qui prolonge au cas vectoriel les travaux de [3] et [4] dans une structure plus simple. Nous appliquons cette construction aux marchés financiers, ce qui prolonge aux espaces de Wiener-Poisson les résultats obtenus dans [10].

Après quelques rappels, notations (section 2), dans la section 3 on définit une structure de Dirichlet sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ d'abord par un rappel rapide sur la partie brownienne puis, sur l'espace de Poisson on construit une structure de Dirichlet par une succession de produits indépendants (cf. [4]) ; enfin on effectue le produit de ces deux structures. Puis, dans la section 4, on utilise cette construction et la propriété d'indépendance des accroissements de W et N pour obtenir une structure de Dirichlet conditionnelle et étudier la loi conditionnelle de L sachant $\mathcal{F}_t$. L'hypothèse $\boldsymbol{H_C}$ permet d'appliquer les résultats de J. Jacod sur le grossissement initial de filtration et de construire un $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$-mouvement brownien et la $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$-intensité du processus N. Enfin, la section 5 donne un théorème de représentation des $(\mathcal{Y}, Q)$-martingales pour une probabilité Q équivalente à $\mathbb{P}$ telle que W est un $(\mathcal{Y}, Q)$-mouvement brownien et la $(\mathcal{Y}, Q)$-intensité du processus N est la $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-intensité du processus N, ainsi qu'un théorème d'existence de probabilités neutres au risque pour le marché défini en (1). On en déduit une caractérisation des probabilités neutres au risque équivalentes à la probabilité Q, ce qui étend aussi des résultats connus pour ce modèle de marché financier même sans investisseur informé (cf. [1]).

2 Notations et définitions

On considère W un mouvement brownien standard de dimension m défini sur son espace canonique $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, (\mathcal{F}_t^W, t \in [0;T]), \mathbb{P}^W)$, où $\Omega^W = C([0,T]; \mathbb{R}^m)$ et la filtration est relative à W.

On note $(\Omega^N, \mathcal{F}^N, \mathbb{P}^N)$ un espace de probabilité qui sera construit dans la section 3 en même temps qu'un processus ponctuel marqué $(Z_n, T_n), n \in \mathbb{N}$, (cf [5]) noté N, d'intensité $\nu(x)dxds$, de compensateur $\tilde{N}(dx, ds) = N(dx, ds) - \nu(x)dxds$, où $x \in O$ ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que ν est strictement positive sur O et de classe $\mathcal{C}^1$, que $\nu(O) = +\infty$ et qu'il existe une suite d'ouverts disjoints $O_i, \cup_i O_i = O$, tels que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\nu(O_i) < \infty$.

On se place désormais sur l'espace de probabilité filtré produit :

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t, t \in [0;T]), \mathbb{P}) = (\Omega^W \times \Omega^N, \mathcal{F}^W \otimes \mathcal{F}^N, \mathcal{F}_t^W \otimes \mathcal{F}_t^N, t \in [0;T]), \mathbb{P}^W \otimes \mathbb{P}^N).$$

3 Structures de Dirichlet

3.1 Structure de Dirichlet sur l'espace de Wiener

Sur l'espace de Wiener Ω^W, on définit la structure de Dirichlet $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, \mathbb{P}^W, \mathbb{D}^W, \mathcal{E}^W)$ de la façon suivante :

Pour $h \in \Omega^W$ tel que $\dot{h}$ est dans $L^2([0;T], \mathbb{R}^m)$ on note $w(h) = \int_0^T \dot{h}(s) dW_s$.
$\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des fonctionnelles de Wiener à valeurs réelles simples (cf. P.Malliavin [19] ou D.Nualart [20]) :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \{F &\in L^2(\Omega) / \exists n \in \mathbb{N}, f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n), \text{tels que :} \\ F &= f(w(h_1), \cdots, w(h_n)), \text{ avec } \dot{h}_1, \cdots, \dot{h}_n \in L^2([0;T]; \mathbb{R}^m)\} \end{aligned}$$

Pour $F \in \mathcal{S}$ on définit $D^W F \in L^2(\Omega \times [0;T]; \mathbb{R}^m)$ par

$$D_t^W F = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(w(h_1), \cdots, w(h_n)) \dot{h}_i(t).$$

D^W est le gradient stochastique usuel associé à W. On note $\mathbb{D}_T^W$ l'espace de Sobolev construit à l'aide de D^W des fonctionnelles sur Ω^W. Alors l'opérateur carré du champ et la forme de Dirichlet sont définis sur $\mathbb{D}_T^W$ respectivement par :

$$\Gamma_T^W(F) = \|D_.^W F\|^2 \ ; \ \mathcal{E}_T^W(F) = \frac{1}{2} E[\|D_.^W F\|^2],$$

où $\|.\|$ désigne la norme dans $L^2([0;T]; \mathbb{R}^m)$.
On dispose d'un critère classique d'absolue continuité ([3]) :

Proposition 3.1 *Soit $F \in (\mathbb{D}_T^W)^\kappa$. Alors $F * (\det(\Gamma_T^W(F)) \cdot P^W)$, la mesure image de $\det(\Gamma_T^W(F)) \cdot P^W$ par F, est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Preuve: Le corollaire II 5.2.3. de [3] donne le résultat pour toute forme de Dirichlet $(\mathbb{D}, \mathcal{E})$ dont l'opérateur carré du champ est construit à partir de dérivées directionnelles. □

3.2 Structure de Dirichlet sur l'espace de Poisson

3.2.1 Construction de l'espace

On désigne par dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et par λ la mesure $\nu(x)dx$ sur O.
Dans un premier temps, on supposera que $\lambda(O) < +\infty$.
On construit une mesure de Poisson à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \times O$ et d'intensité $\nu(x)dtdx$:

1. Soit $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ un espace de probabilité sur lequel est défini un processus de Poisson de paramètre $\lambda(O)$ que l'on note M. La suite des instants de sauts de ce processus sera notée par $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$, on a ainsi :

$$\forall t \geq 0, \ M_t = \sum_{i=1}^{+\infty} 1_{\{T_i \leq t\}}.$$

2. Soit $(O, \mathcal{B}, \lambda/\lambda(O))$ l'espace de probabilité où $\mathcal{B}$ désigne la tribu borélienne sur O et on note
$$(U, \mathcal{G}, Q) = (O, \mathcal{B}, \lambda/\lambda(O))^{\otimes \mathbb{N}}.$$
On notera $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des applications coordonnées sur U, il est clair que les variables aléatoires $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$, à valeurs dans O, sont indépendantes et de loi commune $\lambda/\lambda(O)$.

3. On pose $(\Omega^N, \mathcal{F}^N, P^N) = (\Omega' \times U, \mathcal{F}' \otimes \mathcal{G}, P' \otimes Q)$, et on définit sur cet espace produit la mesure aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \times O$ par :
$$\forall w = (w', x) \in \Omega^N, \; N(w) = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_{(T_i(w'), Z_i(x))}.$$

On reconnait alors que N est une mesure de Poisson à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \times O$ et d'intensité $\nu(x)dxdt$ (Cf. [12]). Enfin, $(\mathcal{F}_t^N)_{t \geq 0}$ désignera la filtration naturelle de N. On retrouve ainsi le processus ponctuel marqué introduit en 2 dans le cas $\lambda(O) < +\infty$.

3.2.2 Structure de Dirichlet associée

On définit sur $C_b^\infty(O)$ la forme bilinéaire symétrique par :
$$\forall f, g \in C_b^\infty(O), \; e(f,g) = \frac{1}{\lambda(O)} \int_O (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)) \, \nu(x) dx.$$

Il est facile (Cf. [9]) de vérifier que la forme (C_b^∞, e) est fermable dans $L^2(O, \mathcal{B}, \lambda/\lambda(O))$. On note $(H(O), e)$ sa fermeture, c'est une structure de Dirichlet sur $L^2(O, \mathcal{B}, \lambda/\lambda(O))$ et elle admet pour opérateur carré du champ la forme bilinéaire :
$$\forall f, g \in H(O)^2, \; \gamma(f,g) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Remarquons enfin que :
$$H(O) = \{f \in L^2(O, \mathcal{B}, \lambda/\lambda(O)); \; \forall i \in \{1, \cdots, n\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(O, \mathcal{B}, \lambda/\lambda(O))\}.$$

En suivant Bouleau-Hirsch ([3]) on définit une structure de Dirichlet sur $L^2(\Omega^N, \mathcal{F}^N, P^N)$ comme étant la structure produit de $L^2(\Omega', \mathcal{F}', P')$ (structure élémentaire) et de la structure $(H(O), e)^{\otimes \mathbb{N}}$ (structure produit infini). Il s'agit donc d'une structure de Dirichlet sur $L^2(\Omega', \mathcal{F}', P') \otimes L^2(U, \mathcal{G}, Q)$ que l'on assimile de façon naturelle à $L^2(\Omega^N, \mathcal{F}^N, P^N)$. On notera $(\mathbb{D}^N, \mathcal{E}^N)$ cette structure. Comme simple conséquence des résultats dus à Bouleau-Hirsch, on a :

Proposition 3.2 $(\mathbb{D}^N, \mathcal{E}^N)$ *est une forme de Dirichlet locale telle que* $1 \in \mathbb{D}$ *et* $\mathcal{E}(1) = 0$.

De plus, elle admet un opérateur carré du champ que l'on note Γ^N. □

De fait le problème est situé dans un modèle d'horizon fini : l'espace $\mathbb{D}^N$ est alors "trop gros", c'est pour cela qu'on préfère le restreindre aux fonctionnelles des trajectoires en temps fini.

Définition 3.3 : *Pour tout $t > 0$, on note $\mathbb{D}_t^N$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{D}^N$ qui sont $\mathcal{F}_t$ mesurables.*

On a alors de façon triviale :

Proposition 3.4 *$(\mathbb{D}_t^N, \mathcal{E}^N)$ est un forme de Dirichlet sur $L^2(\Omega^N, \mathcal{F}_t^N, P^N)$, locale et qui admet pour carré du champ la restriction de Γ^N à $\mathbb{D}_t^N$, notée Γ_t^N.* □

Mais comme on sait expliciter (voir [3]) les éléments d'une structure produit, on sait ici aussi expliciter les éléments de $\mathbb{D}_t^N$, ce qui donne :

Proposition 3.5 *Soit $F \in L^2(\Omega^N, \mathcal{F}_t^N, P^N)$, alors $F \in \mathbb{D}_t^N$ si et seulement si F peut s'écrire :*

$$F = a \cdot \mathbf{1}_{\{M_t=0\}} + \sum_{i=1}^{+\infty} f_i(T_1, \cdots, T_i, Z_1, \cdots, Z_i)\mathbf{1}_{\{M_t=i\}},$$

où $a \in \mathbb{R}$ et

1. *pour tout $i \in \mathbb{N}$, f_i est telle que pour P'-presque tout $w \in \Omega'$, pour tout $j \in \{1, \cdots, i\}$ et pour presque tout $(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_i)$ dans O^{i-1}, l'application*

$$x \in O \longrightarrow f_i(T_1, \cdots, T_i, x_1, \cdots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \cdots x_i)$$

appartient à $H(O)$,

2. *$\sum_{i=1}^{+\infty} E(\sum_{j=1}^{i} \| \nabla_{i+j} f_i(T_1, \cdots, T_i, Z_1, \cdots, Z_i) \|^2)\mathbf{1}_{\{M_t=i\}}) < +\infty$.*

De plus, on a : $\Gamma_t^N(F) = \sum_{i=1}^{+\infty}(\sum_{j=1}^{i} \| \nabla_{i+j} f_i(T_1, \cdots, T_i, Z_1, \cdots, Z_i) \|^2)\mathbf{1}_{\{M_t=i\}}$.

Remarque 3.6 : *1- Ici, $\nabla_{i+j} f_i$ désigne le gradient de f_i pris par rapport à la variable n-dimensionnelle x_j ; la norme $\|.\|$ désigne la norme vectorielle.*

2- Les gradients se font toujours par rapport aux amplitudes des sauts (et non par rapport aux instants de saut).

3- Lorsque que ce n'est pas précisé, "presque tout" se rapporte à la mesure de Lebesgue sur l'espace considéré.

4- Enfin, on retrouve ici le même opérateur que celui introduit dans le chapitre 9 de [2] pour un processus de Poisson d'intensité la mesure de Lebesgue sur un ouvert.

Preuve : D'une part, si $F = a \cdot \mathbf{1}_{\{M_t=0\}} + \sum_{i=1}^{+\infty} f_i(T_1, \cdots, T_i, Z_1, \cdots, Z_i)\mathbf{1}_{\{M_t=i\}}$, cette fonctionnelle est clairement $\mathcal{F}_t$-mesurable, puisque pour tout i, sur l'événement $\{M_t = i\}$ le temps T_i est inférieur ou égal à t et donc F ne dépend que du passé avant t. Ensuite, les propriétés 1 et 2 montrent que F est élément de $\mathbb{D}^N$.

Réciproquement, par définition un élément de $\mathbb{D}_t^N$ est une fonctionnelle F sur $\Omega' \times U$ telle que pour tout $u \in U, F(.,u) \in H'$ et pour tout $w \in \Omega', F(w,.) \in H(O)^{\otimes \mathbb{N}}$. Par ailleurs, la restriction $F(w,u)\mathbf{1}_{\{M_t=i\}}$ ne doit dépendre que de $T_1, \cdots, T_i, Z_1, \cdots, Z_i$ pour être $\mathcal{F}_t$-mesurable et doit donc être de la forme annoncée dans les propriétés 1 et 2 pour que $F(w,.) \in H(O)^{\otimes \mathbb{N}}$. □

On va maintenant s'attacher à donner un critère d'absolue continuité ; pour cela on introduit quelques notations :

Soit $\kappa \in \mathbb{N}$ et $F = (F_1, \cdots, F_\kappa) \in (\mathbb{D}_t^N)^\kappa$, on note par $\Gamma_t^N(F)$ la matrice $\kappa \times \kappa$:

$$\Gamma_t^N(F) = (\Gamma_t^N(F_i, F_j))_{i,j \in \{1,\cdots,\kappa\}},$$

et det désignera le déterminant.

Théorème 3.7 *Soit $F \in (\mathbb{D}_t^N)^\kappa$. Alors $F * (\det(\Gamma_t^N(F)) \cdot P^N)$, la mesure image de $det(\Gamma_t^N(F)) \cdot P^N$ par F, est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Preuve : On remarque d'abord que $\Gamma_t^N(F) = 0$ sur $\{M_t = 0\}$. En fait, il suffit de montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $F * (\det(\Gamma_t^N(F))\mathbf{1}_{\{M_t=i\}} \cdot P^N)$ est absolument continue.

Soit donc $i \in \mathbb{N}$ fixé. D'après la proposition précédente, on peut écrire :

$$F.\mathbf{1}_{\{M_t=i\}} = f(T_1, \cdots, T_i, Z_1, \cdots, Z_i)\mathbf{1}_{\{M_t=i\}},$$

où f appartient au domaine de la structure de Dirichlet produit $(L^2(\Omega', \mathcal{F}', P') \otimes (H(O), e)^{\otimes i})^\kappa$.

Soit alors B, un ensemble borélien de $\mathbb{R}^\kappa$ et de mesure de Lebesgue nulle. On a :

$$\begin{aligned} &\int 1_B(F(w))(\det(\Gamma_t^N(F(w)))^{1/2})\mathbf{1}_{\{M_t=i\}}\, dP^N(w) = \\ \frac{1}{\lambda(O)^i}\int_{\Omega'}\int_{O^i} \quad &1_B(f(T_1(w'), \cdots, T_i(w'), x_1, \cdots, x_i)) \cdot \\ &Jf(w', x_1, \cdots, x_i)\nu(x_1)\cdots\nu(x_i)\, dx_1 \cdots dx_i dP'(w'), \end{aligned}$$

Jf désigne la quantité $\det[(\sum_{j=1}^i \nabla_j f_k \cdot \nabla_j f_l)_{k,l\in\{1,\cdots,\kappa\}}]^{1/2}$.

La formule de la co-aire pour les fonctions de $\mathbb{R}^{i\times n}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^\kappa$ (Cf. [3] II.5 ou [7]) assure alors que :

$$\int_O \cdots \int_O 1_B(f(T_1(w'), \cdots, T_i(w'), x_1, \cdots, x_i)) \cdot Jf(w', x_1, \cdots, x_i)\, dx_1 \cdots dx_i = 0,$$

pour P'-presque tout w' et, comme ν est strictement positive sur O :

$$\int_{O^i} 1_B(f(T_1(w'), \cdots, T_i(w'), x_1, \cdots, x_i))\cdot Jf(w', x_1, \cdots, x_i)\nu(x_1)\cdots\nu(x_i)\, dx_1 \cdots dx_i = 0,$$

pour P'-presque tout w' et donc

$$\int 1_B(F(w))(\det(\Gamma^N(F(w))))^{1/2}\mathbf{1}_{\{M_t=i\}}\, dP^N(w) = 0.$$

Ainsi la mesure image de $[det(\Gamma_t^N(F))]^{\frac{1}{2}} \cdot P^N$ par F, est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, donc aussi son produit par la fonction positive $[det(\Gamma_t^N(F))]^{\frac{1}{2}}$, ce qui achève la preuve. □

3.2.3 Cas d'un nombre infini de sauts

Dans ce qui précède, on a supposé que l'on avait un nombre fini de sauts sur chaque intervalle fini de temps (hypothèse $\lambda(O) < \infty$), en fait les hypothèses 2 sont que O est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\lambda(O) = +\infty$ et tel qu'il existe un suite $(O_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'ouverts disjoints tels que :

$$O = \bigcup_{i=1}^{+\infty} O_i, \text{ avec } \forall i \in \mathbb{N},\ \lambda(O_i) < +\infty$$

Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on peut se donner un espace de probabilité $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$ sur lequel sont définies, comme en 3.2.2, des mesures de Poisson N^i, à valeurs dans $[0, T] \times O_i$ d'intensité $\nu(x)dxds$, ainsi que la structure de Dirichlet $(\mathbb{D}_t^i, \mathcal{E}_t^i)$ admettant pour opérateur carré du champ Γ_t^i.

On pose alors $(\Omega^N, \mathcal{F}^N, P^N) = \otimes_{i=1}^{+\infty}(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$ et on définit la mesure aléatoire N par :

$$\forall w = (w_1, \cdots, w_i, \cdots),\ N(w) = \sum_{i=1}^{+\infty} N^i(w_i),$$

c'est à dire la mesure de Poisson N à valeurs dans $[0,T] \times O$ et d'intensité $\nu(x)dtdx$ définie en 2 (Cf. [12], pages 42-43).

Introduisons à présent quelques notations :
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $\Omega^i = \prod_{j\in\mathbb{N}, j\neq i} \Omega_j$ et $P^i = \prod_{j\in\mathbb{N}, j\neq i} P_i$. De façon naturelle, on identifie Ω^N et $\Omega_i \times \Omega^i$.
La structure de Dirichlet considérée est :

$$(\mathbb{D}_t^N, \mathcal{E}_t^N) = \otimes_{i=1}^{+\infty}(\mathbb{D}_t^i, \mathcal{E}_t^i).$$

On a, en suivant toujours Bouleau-Hirsch ([3]) :

Proposition 3.8 *1. $(\mathbb{D}_t^N, \mathcal{E}_t^N)$ est une structure de Dirichlet sur $L^2(\Omega^N, \mathcal{F}^N, P^N)$ locale et telle que $\mathcal{E}_t^N(1) = 0$.*

2. Soit $F \in L^2(\Omega^N, \mathcal{F}^N, P^N)$, F appartient à $\mathbb{D}_t^N$ si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}$, pour presque tout $w^i \in \Omega^i$, $F(\cdot, w^i) \in \mathbb{D}_t^i$ et :

$$\mathcal{E}_t^N(F) = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{\Omega^i} \mathcal{E}_t^i(F(\cdot, w^i))\, dP^i(w^i) < +\infty.$$

3. $(\mathbb{D}_t^N, \mathcal{E}_t^N)$ admet pour carré du champ, Γ_t^N : $\forall F \in \mathbb{D}_t^N$, $\Gamma_t^N(F) = \sum_{i=1}^{+\infty} \Gamma_t^i(F)$, où $\Gamma_t^i(F)$ désigne l'application : $(w_i, w^i) \in \Omega_i \times \Omega^i \longrightarrow \Gamma_t^i(F(\cdot, w^i))(w_i)$. □

On a de plus comme dans le théorème 3.7 un critère d'absolue continuité :

Théorème 3.9 *Soit $\kappa \in \mathbb{N}$ et $F \in (\mathbb{D}_t^N)^\kappa$. Alors $F * (\det(\Gamma_t^N(F)) \cdot P^N)$, la mesure image de $\det(\Gamma_t^N(F)) \cdot P^N$ par F, est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Preuve : Remarquons d'abord que les matrices $\Gamma_t^N(F)$ et $\Gamma_t^i(F)$ sont des matrices symétriques positives. On pose :

$$A = \{\omega \in \Omega^N,\ \det(\Gamma_t^N(F))(\omega) > 0\},$$

et pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $\omega^i \in \Omega^i$:

$$A_i(\omega^i) = \{\omega_i \in \Omega_i,\ \det(\Gamma_t^i(F(\cdot, \omega^i))(\omega_i)) > 0\}.$$

Comme $\Gamma_t^N(F)$ est symétrique et positive :

$$A = \{\omega \in \Omega^N,\ \forall u \in \mathbb{R}^\kappa - \{0\}, u^* \cdot \Gamma_t^N(F)(\omega) \cdot u > 0\},$$

et

$$A_i(\omega^i) = \{\omega_i \in \Omega_i,\ \forall u \in \mathbb{R}^\kappa - \{0\}, u^* \cdot \Gamma_t^i(F(\cdot, \omega^i))(\omega_i) \cdot u > 0\}.$$

Comme $\Gamma_t^N(F) = \sum_{i=1}^{+\infty} \Gamma_t^i(F)$, on a :

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{\omega = (\omega_i, \omega^i) \in \Omega^N,\ \omega_i \in A_i(\omega^i)\}.$$

Soit alors B un ensemble borélien de $\mathbb{R}^\kappa$, de mesure de Lebesgue nulle :

$$\int_A \mathbf{1}_B(F(\omega))dP^N(\omega) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{\Omega^i} \int_{A_i(\omega^i)} \mathbf{1}_B(F(\omega_i, \omega^i))dP_i(\omega_i)\, dP^i(\omega^i),$$

mais grâce au théorème 3.7, on sait que pour tout i :

$$\int_{A_i(\omega^i)} \mathbf{1}_B(F(\omega_i, \omega^i))det(\Gamma_t^N(F(\omega_i, \omega^i)))\, dP_i(\omega_i) = 0.$$

Comme $det(\Gamma_t^N(F(\omega_i, \omega^i)))$ est strictement positif sur l'ensemble d'intégration par définition, on a également pour tout i :

$$\int_{A_i(\omega^i)} \mathbf{1}_B(F(\omega_i, \omega^i))dP_i(\omega_i) = 0,$$

d'où la somme en i est nulle, et :

$$\int_A \mathbf{1}_B(F(\omega))dP^N(\omega) = 0.$$

Toujours parce que sur A, $det(\Gamma_t^N(F(\omega))) > 0$, il vient

$$\int_A \mathbf{1}_B(F(\omega))det(\Gamma_t^N(F(\omega)))\, dP^N(\omega) = 0,$$

ce qui achève la preuve. □

3.3 Espace de Dirichlet produit

On a obtenu en 3.1 et 3.2 deux structures de Dirichlet pour tout $t > 0$ respectivement sur les espaces de Wiener et de Poisson :

$$(\Omega^W, \mathcal{F}^W, \mathbb{P}^W, \mathbb{D}_t^W, \mathcal{E}^W) \text{ et } (\Omega^N, \mathcal{F}^N, \mathbb{P}^N, \mathbb{D}_t^N, \mathcal{E}^N).$$

Suivant encore [3], chapitre V, section 2, on définit la structure produit :

$$\begin{aligned} & (\Omega = \Omega^W \times \Omega^N, \mathcal{F} = \mathcal{F}^W \otimes \mathcal{F}^N, \mathbb{P} = \mathbb{P}^W \otimes \mathbb{P}^N, \mathbb{D}_t, \mathcal{E}_t), \\ \mathbb{D}_t &= \{f \in L^2(\Omega, \mathbb{P}) / \mathbb{P}^N \text{ presque sûrement } f(.,n) \in \mathbb{D}_t^W, \\ & \quad \mathbb{P}^W \text{ presque sûrement } f(\omega,.) \in \mathbb{D}_t^N \text{ et } E(\Gamma_t^W(f) + \Gamma_t^N(f)) < \infty\} \qquad (2) \end{aligned}$$

et l'opérateur $\mathcal{E}_t(f) = E(\Gamma_t^W(f) + \Gamma_t^N(f))$.

Les deux structures étudiées précédemment ayant les "bonnes" propriétés (de Markov, locales, avec opérateur carré du champ...), la structure produit admet les mêmes propriétés avec l'opérateur carré du champ défini par :

$$\Gamma_t(f)(\omega, n) = \Gamma_t^W(f)(\omega) + \Gamma_t^N(f)(n).$$

Théorème 3.10 *Soit $F \in \mathbb{D}_t^\kappa$. Alors $F * (\det(\Gamma_t(F)) \cdot P)$, la mesure image de $det(\Gamma_t(F)) \cdot P$ par F, est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Preuve: On reproduit la preuve du théorème 3.9 sur l'espace de Dirichlet produit $(\mathbb{D}_t, \mathcal{E})$ en remplaçant le produit infini par le produit des deux espaces $(\mathbb{D}_t^W, \mathcal{E}^W)$ et $(\mathbb{D}_t^N, \mathcal{E}^N)$. □

4 Structure de Dirichlet conditionnelle et grossissement de filtration

La construction qui suit est vraie en toute généralité dès que l'on a une structure produit (en temps). Elle s'applique en particulier très naturellement à l'espace de Wiener, en effet l'espace de Wiener $C_0([0,T],\mathbb{R})$ peut être vu comme le produit de $C_0([0,t],\mathbb{R})$ et de $C_0([0,T-t],\mathbb{R})$ de façon usuelle grâce à l'indépendance des accroissements du mouvement brownien et il est aisé de voir que la structure de Dirichlet sur $C_0([0,T],\mathbb{R})$ est le produit des structures sur $C_0([0,t],\mathbb{R})$ et $C_0([0,T-t],\mathbb{R})$.
Cette démonstration s'applique aussi au cas où l'on aura un mouvement brownien et une mesure de Poisson indépendants car la structure de Dirichlet sera le produit de deux structures pouvant être elles-mêmes considérées comme produit de deux structures : une sur l'intervalle de temps $[0,t]$ et l'autre sur $[t,T]$.

4.1 Application aux lois conditionnelles

On fixe $0 < t < T$. On peut alors considérer deux mesures de Poisson et leur structures de Dirichlet associées :

1. La première notée N^1, mesure de Poisson sur $[0,t]\times O$ d'intensité $\nu(x)dxds$ et définie sur l'espace de probabilité $(\Omega^1,\mathcal{F}_t^1,P^1)$. On notera T_i^1 et Z_i^1 les instants et les amplitudes des sauts et M^1 le processus de Poisson associé. On définit sur $L^2(\Omega^1,\mathcal{F}_t^1,P^1)$ la structure de Dirichlet $(\mathbb{D}_t^N,\mathcal{E}_t^N)$ admettant pour carré du champ Γ_t^N.

2. La deuxième notée N^2, mesure de Poisson sur $[0,T-t]\times O$ d'intensité $\nu(x)dxds$ et définie sur l'espace de probabilité $(\Omega^2,\mathcal{F}_{T-t}^2,P^2)$. De même T_i^2 et Z_i^2 désignent les instants et les amplitudes des sauts et M^2 le processus de Poisson associé. On définit sur $L^2(\Omega^2,\mathcal{F}_{T-t}^2,P^2)$ la structure de Dirichlet $(\mathbb{D}_{T-t}^N,\mathcal{E}_{T-t}^N)$ admettant pour carré du champ Γ_{T-t}^N.

On remarque que $(\Omega^N,\mathcal{F}_T^N,P^N) = (\Omega^1,\mathcal{F}_t^1,P^1)\otimes(\Omega^2,\mathcal{F}_{T-t}^2,P^2)$ et on considère la mesure aléatoire N à valeurs dans $[0,T]\times O$ définie par :

$$\forall w=(w_1,w_2)\in\Omega^1\times\Omega_2,\ N(w)=\sum_{i=1}^{M^1(w_1)}\delta_{(T_i^1(w_1),Z_i^1(w_1))}+\sum_{i=1}^{M^2(w_2)}\delta_{(t+T_i^2(w_2),Z_i^2(w_2))}.$$

Il est clair que N est une mesure de Poisson sur $[0,T]\times O$ d'intensité $\nu(x)dsdx$, on notera T_i et Z_i les instants et amplitudes des sauts.
On peut alors comme précédemment considérer la structure de Dirichlet associée $(\mathbb{D}_T^N,\mathcal{E}_T^N)$ dont le carré du champ est Γ_T^N.
Mais sur $L^2(\Omega^N,\mathcal{F}_T^N,P^N)$, on peut aussi considérer la structure produit $(\mathbb{D}_t^N,\mathcal{E}_t^N)\otimes(\mathbb{D}_{T-t}^N,\mathcal{E}_{T-t}^N)$ et on a le résultat naturel suivant :

Proposition 4.1

$$(\mathbb{D}_T^N,\mathcal{E}_T^N)=(\mathbb{D}_t^N,\mathcal{E}_t^N)\otimes(\mathbb{D}_{T-t}^N,\mathcal{E}_{T-t}^N).$$

Preuve : Supposons d'abord que $\lambda(O) < +\infty$:
Soit $F \in \mathbb{D}_t$ et $G \in \mathbb{D}_{T-t}$ tels que :

$$F = \mathbf{1}_{\{M_t^1=i\}} \cdot f(T_1^1, \cdots, T_i^1, Z_1^1, \cdots, Z_i^1) \text{ et } G = \mathbf{1}_{\{M_{T-t}^2=j\}} \cdot g(T_1^2, \cdots, T_j^2, Z_1^2, \cdots, Z_j^2),$$

où f et g vérifient les hypothèses de la proposition 3.5 ; on a alors :

$$F \cdot G = \mathbf{1}_{\{M_T=i+j\}} h(T_1, \cdots, T_{i+j}, Z_1, \cdots, Z_{i+j}),$$

où $h : [0,T]^{i+j} \times O^{i+j} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :
$\forall (t_1, \cdots, t_{i+j}) \in [0,T]^{i+j}$, $\forall (x_1, \cdots, x_{i+j}) \in O^{i+j} = O^i \times O^j$,

$$h(t_1, \cdots, t_{i+j}, x_1, \cdots, x_{i+j}) = \begin{cases} f(t_1, \cdots, t_i, x_1, \cdots, x_i) \cdot g(t_{i+1}, \cdots, t_{i+j}, x_{i+1}, \cdots, x_{i+j}) \\ \text{si } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Il est alors aisé de vérifier que $F.G$ appartient à $\mathbb{D}_T^N$ et que de plus :

$$\Gamma_T^N(F \cdot G) = \Gamma_t^N(F) \cdot G^2 + F^2 \cdot \Gamma_{T-t}^N(G).$$

Par densité, on conclut alors que : $(\mathbb{D}_t^N, \mathcal{E}_t^N) \otimes (\mathbb{D}_{T-t}^N, \mathcal{E}_{T-t}^N) \subset (\mathbb{D}_T^N, \mathcal{E}_T^N)$.

Montrons alors l'inclusion inverse :
Soit $F \in \mathbb{D}_T^N$ tel qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que : $F = f(T_1, \cdots, T_i, Z_1, \cdots, Z_i)\mathbf{1}_{\{M_t=i\}}$, où f vérifie les bonnes hypothèses. On a alors :

$$F = \sum_{j=0}^{i} \mathbf{1}_{\{M_t^1=j\}} \cdot \mathbf{1}_{\{M_{T-t}^2=i-j\}} \cdot f(T_1^1, \cdots, T_j^1, t+T_1^2, \cdots, t+T_{i-j}^2, Z_1^1, \cdots, Z_i^1, Z_1^2, \cdots, Z_{i-j}^2).$$

A partir de là, il est aisé de vérifier l'inclusion inverse.

On suppose maintenant que $\lambda(O) = +\infty$ et on va étendre les résultats obtenus, sachant qu'il existe un suite $(O_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'ouverts deux à deux disjoints tels que (cf 2) :

$$O = \bigcup_{i=1}^{+\infty} O_i, \ \forall i \in \mathbb{N}, \ \lambda(O_i) < +\infty.$$

On a alors :

$$(\mathbb{D}_t^N, \mathcal{E}_t^N) = \otimes_{i=1}^{+\infty} (\mathbb{D}_t^i, \mathcal{E}_t^i), \text{ et } (\mathbb{D}_{T-t}^N, \mathcal{E}_{T-t}^N) = \otimes_{i=1}^{+\infty} (\mathbb{D}_{T-t}^i, \mathcal{E}_{T-t}^i)$$

ce qui donne naturellement :

$$\begin{aligned} (\mathbb{D}_T^N, \mathcal{E}_T^N) &= (\otimes_{i=1}^{+\infty} (\mathbb{D}_t^i, \mathcal{E}_t^i)) \otimes (\otimes_{i=1}^{+\infty} (\mathbb{D}_{T-t}^i, \mathcal{E}_{T-t}^i)) \\ &= \otimes_{i=1}^{+\infty} ((\mathbb{D}_t^i, \mathcal{E}_t^i) \otimes (\mathbb{D}_{T-t}^i, \mathcal{E}_{T-t}^i)) = (\mathbb{D}_t^N, \mathcal{E}_t^N) \otimes (\mathbb{D}_{T-t}^N, \mathcal{E}_{T-t}^N). \end{aligned}$$

□

Remarque 4.2 : *Comme il est naturel pour une structure produit, si $F \in \mathbb{D}_T^N$ on note $\Gamma_t^N(F)$ (resp. $\Gamma_{T-t}^N(F)$) l'application :*

$$(w_1, w_2) \in \Omega^1 \times \Omega^2 \longrightarrow \Gamma_t^N(F(\cdot, w_2))(w_1) \; (resp. \; \Gamma_{T-t}^N(F(w_1, \cdot))(w_2)).$$

On a alors l'égalité : $\forall F \in \mathbb{D}_T^N,\ \Gamma_T^N(F) = \Gamma_t^N(F) + \Gamma_{T-t}^N(F)$

Pour l'espace afférent au mouvement brownien, on a de même :

$$(\mathbb{D}_T^W, \mathcal{E}_T^W) = (\mathbb{D}_t^W, \mathcal{E}_t^W) \otimes (\mathbb{D}_{T-t}^W, \mathcal{E}_{T-t}^W) \text{ et } \forall F \in \mathbb{D}_T^W,\ \Gamma_T^W(F) = \Gamma_t^W(F) + \Gamma_{T-t}^W(F)\ P^W\text{-p.s.}$$

Enfin, on définit $\mathbb{D}_T$ comme produit de $\mathbb{D}_T^W$ et $\mathbb{D}_T^N$ de façon naturelle, c'est à dire :

$$(\mathbb{D}_T, \mathcal{E}_T) = (\mathbb{D}_T^W, \mathcal{E}_T^W) \otimes (\mathbb{D}_T^N, \mathcal{E}_T^N),$$

et le mouvement brownien étant comme le processus de Poisson à accroissements indépendants :

$$(\mathbb{D}_T, \mathcal{E}_T) = (\mathbb{D}_t, \mathcal{E}_t) \otimes (\mathbb{D}_{T-t}, \mathcal{E}_{T-t}),\ \forall F \in \mathbb{D}_T,\ \Gamma_T(F) = \Gamma_t(F) + \Gamma_{T-t}(F)\ P\text{-p.s.}$$

Théorème 4.3 *Soit $\kappa \in \mathbb{N}^*$, et $L \in \mathbb{D}_T^\kappa$. Alors sous la mesure $det(\Gamma_{T-t}(L)) \cdot P$, la loi conditionnelle de L sachant $\mathcal{F}_t$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Preuve : Soit A un ensemble borélien de $\mathbb{R}$, de mesure de Lebesgue nulle. On a :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{1}_A(L) \cdot det(\Gamma_{T-t}(L)) | \mathcal{F}_t) &= \int_{\Omega^2} \mathbf{1}_A(L(w_1, w_2)) \cdot det(\Gamma_{T-t}(L(w_1, \cdot)(w_2))) dP^2(w_2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car pour P^1-presque tout w_1, $L(w_1, \cdot)$ appartient à $\mathbb{D}_{T-t}^\kappa$ et on a que l'image par $L(w_1, \cdot)$ de la mesure $(\Gamma_{T-t}(L(w_1, \cdot)).P^2$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue en utilisant le théorème 3.10. □

On en déduit le corollaire :

Corollaire 4.4 *Soit $L \in \mathbb{D}_T$ tel que $\Gamma_{T-t}(L) > 0$ P-p.s. alors la loi conditionnelle de L sachant $\mathcal{F}_t$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.* □

Exemples : Supposons L totalement discontinu :

$$L = \sum_{T_n \le T} \phi(Z_n, T_n) = \int_0^T \int_O \phi(y, s) N(dy, ds) = N(\phi)$$

avec $\phi \in H(O)$. Alors la condition du corollaire est :

$$\int_t^T \int_O \|\nabla \phi(x, s)\|^2 N(dx, ds) = \sum_{t < T_n \le T} \|\nabla \phi(Z_n, T_n)\|^2 > 0.$$

Elle est vérifiée s'il existe des sauts dans l'intervalle de temps $[t, T]$ (ce qui est presque sûrement vrai sous l'hypothèse choisie que $\nu(O) = \infty$) et dès que $\nabla\phi(x, s)$ est non identiquement nul sur $O \times [0, T]$, c'est à dire que ϕ varie en x.

On n'est plus obligé de supposer que la mesure $\nu(O) = +\infty$ lorsque, par exemple $L = \int_0^T \sigma_s dW_s + N_T(\phi)$, il suffit alors d'avoir
$\Gamma_{T-t}(L) = \int_t^T |\sigma_s + \int_t^T D_s\sigma_u dW_u|^2 ds + N_{T-t}(\|\nabla\phi\|^2) > 0$ pour pouvoir opérer le grossissement de filtration.

4.2 Grossissement de filtration

Construisons maintenant sur la filtration grossie $\mathcal{Y}$ un $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$-mouvement brownien et un $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$-processus ponctuel.

On note $\boldsymbol{H_C}$ l'hypothèse

$$L \in \mathbb{D}_T^{\kappa} \text{ telle que } det(\Gamma_{T-t}(L)) > 0, \ \mathbb{P} \text{ presque sûrement pour tout } t \in [0, T[. \quad (3)$$

Proposition 4.5 *Sous l'hypothèse* $\boldsymbol{H_C}$

i/ *sur* $\Omega \times [0, T[\times \mathbb{R}^{\kappa}$, *il existe une version mesurable de la densité conditionnelle* $(\omega, t, x) \mapsto p(\omega, t, x)$ *qui est une* $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$*-martingale et se représente par*

$$p(\omega, t, x) = p_L(x) + \int_0^t \alpha(s, x) dW_s + \int_0^t \int_O \beta(y, s, x) \tilde{N}(dy, ds),$$

où pour tout x $s \mapsto \alpha(s, x)$ *et* $s \mapsto \beta(., s, x)$ *sont des processus* $\mathcal{F}$*-prévisibles.*

ii/ *si* M *est une* $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$*-martingale locale continue égale à*

$$M_0 + \int_0^t u_s dW_s + \int_0^t \int_O v(y, s) \tilde{N}(dy, ds),$$

alors le crochet $d\langle M, p\rangle_t$ *est égal à* $\langle \alpha, u\rangle_t dt + \int_O \beta(y, t, x) v(y, t) \nu(y) dy dt$ *et le processus*

$$\tilde{M}_t = M_t - \int_0^t \frac{(\langle \alpha(., ., x), u\rangle_s + \int_O \beta(y, s, x) v(y, s) \nu(y) dy)|_{x=L}}{p(s, L)} ds, 0 \leq t < T$$

est une $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$*-martingale locale.*

Preuve : **i/** On utilise l'article de Jacod [14] dont les résultats ne dépendent que de l'hypothèse suivante : la famille $(Q_t(\omega, .), t > 0)$, loi de L sachant $\mathcal{F}_t$ est dominée par une mesure $q_t(dx)$, ici la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{\kappa}$; on obtient donc (lemme 1.8 [14]) l'existence de l'application

$$(\omega, t, x) \mapsto p(\omega, t, x)$$

mesurable, càdlàg en t telle que $\forall t$ $p(\omega, t, x)dx$ est une version de la loi de L sachant $\mathcal{F}_t$ et pour tout x, $p(., ., x)$ est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-martingale. Soit le $\mathcal{F}$-temps d'arrêt $T_a^x = \inf\{t > 0 : p(., t, x) \leq a\}$; sur $[0, T_0^x[$ on a $p(., t, x) > 0$. Le corollaire 1.11 de [14] montre que $T_0^L = +\infty$ p.s. et par conséquent pour tout t, $p(., t, L) > 0$.
Par le théorème de représentation prévisible (les processus W et $\tilde{N}$ ont tous les deux la propriété de représentation prévisible) relatif au processus à accroissements indépendants $(W, \tilde{N})$, on obtient l'existence d'un couple (α, β) qui pour tout $(x \in \mathbb{R}, y \in O)$ est un processus prévisible vectoriel tel que :

$$p(., t, x) = p(0, x) + \int_0^t \alpha(s, x) dW_s + \int_0^t \int_O \beta(y, s, x) \tilde{N}(dy, ds),$$

ii/ Le Théorème 5.1 de [14] permet de conclure : pour tout M, $\mathcal{F}$-martingale locale de la forme $M_t = M_0 + \int_0^t u_s dW_s + \int_0^t \int_O v(y, s) \tilde{N}(dy, ds)$, alors

$$\tilde{M}_t = M_t - \int_0^t \frac{(\langle \alpha(., ., x), u\rangle_s + \int_O \beta(y, s, x) v(y, s) \nu(y) dy)|_{x=L}}{p(s, L)} ds, 0 \leq t < T$$

est une $\mathcal{Y}$-martingale locale. □

On obtient en corollaire d'une part que le processus vectoriel

$$B_t = W_t - \int_0^t \frac{\alpha(u,L)}{p(u,L)} du, \ 0 \leq t < T$$

est un mouvement brownien sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$, d'autre part, puisque

$$\overline{N}_t = \tilde{N}_t - \int_0^t \frac{\int_O \beta(y,u,L)\nu(y)dy}{p(u,L)} du, 0 \leq t < T$$

est une $\mathcal{Y}$-martingale locale, cela signifie que sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$, l'intensité prévisible du processus ponctuel N est $\nu(y)(1 + \frac{\beta(y,u,L)}{p(u^-,L)})$.

Remarque 4.6 *L'hypothèse $\boldsymbol{H_C}$ est suffisante pour assurer que la $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-martingale est une $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$-semi-martingale ; elle n'est pas nécessaire. En effet, si par exemple $L = \inf\{0 < t \leq T / \log S_t^1 = a\}$ avec a un réel fixé et S_t^1 le prix au temps t d'un actif dans un marché à coefficients constants (cf section 5), la loi de L est équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_*^+$, de densité la dérivée en t de $t \mapsto \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy$ et la loi de L conditionnellement en $\mathcal{F}_t$, elle, admet une densité strictement positive seulement sur $[t, +\infty[$ puisqu'avant les choses sont connues : la loi conditionnelle est absolument continue par rapport à la loi de L (sans être équivalente) ; de plus, les calculs montrent que $\boldsymbol{H_\xi}$ n'est pas vérifiée. Néanmoins, dans [17] ou [24] est donné explicitement un $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$-mouvement brownien.*

Ou encore, si $L = N_T$ est le nombre de sauts dans $[0;T]$ alors L ne vérifie pas l'hypothèse $\boldsymbol{H_C}$ mais la loi conditionnelle de L sachant $\mathcal{F}_t$ est quand même absolument continue par rapport à la loi de de L. Dans ce cas, on peut donc utiliser le lemme 1.8 de [14] pour effectuer le grossissement de filtration.

5 Application au marché financier

Le modèle est celui d'un marché financier de $d = m + 1$ actions, dont la dynamique est guidée par le mouvement brownien W de dimension m et le processus ponctuel N. Les prix $(S_t^i, i = 0, \cdots, d)$ suivent la dynamique :

$$\begin{aligned} dS_t^0 &= S_t^0 r_t dt, \\ dS_t^i &= S_t^i \left[b_t^i dt + \sigma_t^i dW_t + \int_O \phi^i(x,t) N(dx,dt) \right], S_0^i = x^i, i = 1, \cdots, d. \end{aligned} \tag{4}$$

On note $(\mathcal{F}_t)_{(0 \leq t \leq T)}$ la filtration engendrée par (W, N).

Soit u_t une sélection prévisible d'un vecteur unitaire de $Im(\sigma_t)^\perp$, l'espace de dimension 1 orthogonal de $Im(\sigma_t)$ et A_t l' ensemble $\{y \in O / \frac{\langle u_t, b_t - r_t \mathbf{1} \rangle}{\langle \phi(y,t), u_t \rangle} < 0\}$.

On note **H1** l'hypothèse :

(i) b, σ, ϕ sont prévisibles ,

(ii) $[\sigma_t \ \phi(y,t)]^*[\sigma_t \ \phi(y,t)]$ est inversible,

(iii) $\langle u_t, b_t - r_t \mathbf{1} \rangle \neq 0$ et $\nu(A_t) \neq 0$, $d\mathbb{P} \otimes dt$ presque sûrement.

L'investisseur initié a des informations sur le futur, représentées par une variable aléatoire $L \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{R}^\kappa)$, on note $\mathcal{Y}$ la filtration "naturelle" de l'initié régularisée à droite : $\mathcal{Y}_t = \cap_{s>t}(\mathcal{F}_s \vee \sigma(L)), t \in [0, T[$.

Sous l'hypothèse $\boldsymbol{H_C}$ on peut appliquer la proposition 4.5 et on récrit la dynamique des prix relativement à la filtration $(\mathcal{Y}_t)_{t\in[0;A]}$ pour $A < T$. Ayant noté :

$$l_s = (\frac{\alpha^i(s,L)}{p(s^-,L)}, i = 1, m) \; ; \; \delta(y,s) = \frac{\beta(y,s,L)}{p(s^-,L)}, \; y \in O, \; s \in [0,T[, \tag{5}$$

on obtient pour $0 \leq t \leq A < T$ et $i = 1, \cdots, d$ une expression des prix comme $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$-semi-martingales :

$$dS_t^i = S_t^i \left((b_t^i + \sigma_t^i l_t)dt + \sigma_t^i dB_t + \int_O \phi^i(y,t) N(dy,dt) \right).$$

5.1 Représentation des $(\mathcal{Y}, Q)$-martingales

On montre l'existence d'une probabilité Q équivalente à $\mathbb{P}$ pour laquelle une propriété de représentation des $(\mathcal{Y}, Q)$-martingales est vérifiée. C'est un cas non classique puisque $\mathcal{Y}$ est plus grande que la filtration naturelle de (W, N).

Proposition 5.1 *Soit $A < T$. On suppose que l_t vérifie l'hypothèse $\boldsymbol{H_W}$:*

$$\exists C, \exists k > 0, \forall s \in [0,A], E[\exp k\|l_s\|^2] < C \tag{6}$$

et $\delta(y,t)$ vérifie l'hypothèse $\boldsymbol{H_N}$:

$$\begin{aligned} & E[\exp \int_0^A \int_O (1+\delta(y,s))\log(1+\delta(y,s)) - \delta(y,s))\nu(y)dyds] < +\infty \\ ou \quad & E[\exp \int_0^A \int_O (\log(1+\delta(y,s)) - \frac{\delta(y,s)}{1+\delta(y,s)})N(dy,ds)] < +\infty. \end{aligned} \tag{7}$$

Soit (M^1, M^2) solution de l'équation

$$dM_t^1 = -M_1 l_t dB_t, \; M_0^1 = 1 \; ; \; dM_t^2 = M_{t-}^2 \int_O \delta(y,t)\tilde{N}(dy,dt), M_0^2 = 1 \; ; \; t \in [0,A].$$

On pose $M = M^1 M^2$.
Alors, M est une $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$-martingale uniformément intégrable égale à

$$M_t = \exp[-\int_0^t l_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|l_s\|^2 ds + \sum_n \log(1+\delta(Z_n,T_n)) - \delta(Z_n,T_n)].$$

On pose $Q = M\mathbb{P}$. Le processus $W_t = B_t + \int_0^t l_s ds$ est un $(\mathcal{Y}, Q)$-mouvement brownien. Le processus N est de $(\mathcal{Y}, Q)$-intensité $\nu(y)$.

Preuve : La preuve est classique, voir par exemple [18]. □

Du fait qu'alors le $(\mathcal{Y}, Q)$-processus (W, N) est à accroissements indépendants, on a le corollaire immédiat :

Corollaire 5.2 *Sous la probabilité Q, les tribus $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_t$ sont indépendantes pour tout $t \leq A$.*

Le théorème 4.34 page 176 de [15] permet enfin, du fait de cette indépendance, d'obtenir le théorème de représentation de martingale :

Proposition 5.3 *Sous les hypothèses $\boldsymbol{H_C}$, $\boldsymbol{H_W}$ et $\boldsymbol{H_N}$, alors, pour tout $A < T$, et pour toute martingale locale Z relative à $(\mathcal{Y}_t, t \leq A; Q)$, il existe un unique couple prévisible (χ, ζ) tel que*

$$Z_t = E_Q(Z/\mathcal{Y}_0) + \int_0^t \chi_s dW_s + \int_0^t \int_O \zeta(y,s)(N(dy,ds) - \nu(y)dyds), t \leq A.$$

5.2 Probabilités neutres au risque

On montre dans ce paragraphe que, si l'on se restreint à l'intervalle $[0, A], A < T$, il existe une famille de probabilités neutres au risque ; en effet, les processus (l, δ) n'existent que sur $[0, A], A < T$, car en T, la loi de L sachant $\mathcal{F}_T$ est une mesure de Dirac et $\lim_{t \to T} p(t, L)$ n'existe pas. On peut définir une stratégie optimale pour l'agent informé entre 0 et $A < T$; entre 0 et T il y a en général une stratégie d'arbitrage. Plus précisément l'existence de probabilités neutres au risque implique l'absence d'opportunité d'arbitrage strictement avant T.

On écrit l'équation des prix actualisés sous Q en remplaçant le processus W par $\tilde{W}_. = W_. - \int_0^. \xi_s ds$ et en changeant l'intensité de N en $\eta(y,t)\nu(y)$:

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t^i &= \tilde{S}_t^i(b_t^i - r_t + \sigma_t^i \xi_t)dt + \int_O \tilde{S}_t^i \phi^i(y,t)\eta(y,t)\nu(y)dydt \\ &+ \tilde{S}_t^i \sigma_t^i d\tilde{W}_t + \int_O \tilde{S}_t^i \phi^i(y,t)(N(dy,dt) - \eta(y,t)\nu(y)dydt). \end{aligned} \tag{8}$$

Pour que ces prix soient des martingales il suffit de trouver ξ et η qui permettent d'annuler $d\mathbb{P} \otimes dt$ presque sûrement les termes :

$$b_t^i - r_t + \sigma_t^i \xi_t + \int_O \phi^i(y,t)\eta(y,t)\nu(y)dy, i = 1, \cdots, d,.$$

soit :

$$\sigma_t \xi_t + \int_O \phi(y,t)\eta(y,t)\nu(y)dy = -(b_t - r_t \mathbf{1}). \tag{9}$$

$d\mathbb{P} \otimes dt$ presque sûrement. Si de plus $\eta(y,t) > 0$ $d\mathbb{P} \otimes dy \otimes dt$ presque sûrement, on pourra alors utiliser η pour un changement de probabilité.

Proposition 5.4 *On suppose les hypothèses* **H1** *et* $\boldsymbol{H_C}$. *Alors les solutions prévisibles de l'équation (9) sont de la forme*

$$\begin{aligned} \xi_t &= (\sigma_t^* \sigma_t)^{-1} \sigma_t^* \left[\langle u_t, b_t - r_t \mathbf{1} \rangle \int_O \frac{\phi(y,t)}{\langle \phi(y,t), u_t \rangle} \psi(y,t)\nu(y)dy - (b_t - r_t \mathbf{1}) \right] \\ \eta(y,t) &= -\frac{\langle u_t, b_t - r_t \mathbf{1} \rangle}{\langle \phi(y,t), u_t \rangle} \psi(y,t), \end{aligned} \tag{10}$$

où ψ est un processus prévisible sur $\mathbb{R}^d \times O$, tel que $\int_O \psi(s,y)\nu(y)dy = 1$.

Preuve: En premier lieu, l'hypothèse $\boldsymbol{H1}$ (ii) assure que ces processus sont bien définis, car σ_t est de rang plein et $\langle \phi(y,t), u_t \rangle \neq 0$ $d\mathbb{P} \otimes dt$ presque sûrement par définition de ϕ.

On montre ensuite que ce couple $(\xi_t, \eta(.,t))$ donné dans la proposition est solution de l'équation (9) : on fait la somme de

$$\sigma_t \xi_t = \sigma_t (\sigma_t^* \sigma_t)^{-1} \sigma_t^* \left[\langle u_t, b_t - r_t \mathbf{1} \rangle \int_O \frac{\phi(y,t)}{\langle \phi(y,t), u_t \rangle} \psi(y,t)\nu(y)dy - (b_t - r_t \mathbf{1}) \right]$$

et de

$$\int_O \phi(y,t)\eta(y,t)\nu(y))dy = -\langle u_t, b_t - r_t \mathbf{1} \rangle \int_O \frac{\phi(y,t)\psi(y,t)}{\langle u_t, \phi(y,t) \rangle} \nu(y)dy.$$

Puis, en utilisant que ψ vérifie $\int_O \psi(t,y)\nu(y)dy = 1$ et en remarquant que la matrice $I_d = \sigma_t(\sigma_t^*\sigma_t)^{-1}\sigma_t^* + u_t u_t^*$, on vérifie que le couple (ξ,η) proposé est une solution de l'équation (9).

Réciproquement, si $(\xi_t, \eta(.,t))$ est une solution prévisible de l'équation (9), on remarque que le vecteur

$$\int_O \phi(y,s)\eta(y,s)\nu(y)dy + (b_s - r_s\mathbf{1})$$

appartient presque sûrement à l'image de la matrice σ_s, donc est orthogonal à u_s, d'où il vient :

$$\int_O \langle u_s, \phi(y,s)\rangle \eta(y,s)\nu(y)dy = -\langle u_s, (b_s - r_s\mathbf{1})\rangle.$$

Il existe alors un processus prévisible ψ sur $\mathbb{R}^d \times O$, tel que $\int_O \psi(s,y)\nu(y)dy = 1$ et presque sûrement :

$$\langle u_s, \phi(y,s)\rangle \eta(y,s) = -\langle u_s, (b_s - r_s\mathbf{1})\rangle \psi(y,s).$$

Le processus η est alors de la forme annoncée en (10) qui est bien définie, on l'a vu plus haut, grâce à l'uniforme ellipticité de la matrice introduite dans l'hypothèse **H1**. Reportant ensuite cette expression de η dans (9), il vient :

$$\sigma_s\xi_s = -\int_O \frac{\phi(y,t)}{\langle \phi(y,t), u_t\rangle}\psi(y,t)\nu(y)dy - (b_s - r_s\mathbf{1}).$$

On multiplie à gauche cette expression par la matrice $(\sigma_t^*\sigma_t)^{-1}\sigma_t^*$ (dont l'existence là aussi est assurée par l'hypothèse **H1**), et il vient l'expression annoncée en (10). Ainsi toute solution prévisible de l'équation (9) est de la forme annoncée dans la proposition. □

On montre alors à l'aide de cette proposition l'existence d'une famille de probabilités neutres au risque, paramétrée par cette fonction ψ.

Proposition 5.5 *Soit $A < T$.*

1. Il existe une famille de processus prévisibles ψ sur $\mathbb{R}^d \times O$ tel que :
$\int_O \psi(s,y)\nu(y)dy = 1$ *et* $\frac{\langle u_t, b_t - r_t\mathbf{1}\rangle}{\langle \phi(y,t), u_t\rangle}\psi(y,t) < 0$, $d\mathbb{P}\otimes dy \otimes dt$ *presque sûrement.*

2. Soient ξ et η définis par (10) à partir de ce processus ψ. On suppose que :
ξ_t vérifie l'hypothèse $\boldsymbol{H_\xi}$:

$$E_Q[\exp\frac{1}{2}\int_0^A \|\xi_s\|^2 ds] < +\infty \ ou\ \exists C, \exists k > 0, \forall s \in [0,A], E_Q[\exp k\|\xi_s\|^2] < C \quad (11)$$

et $\eta(y,t)$ vérifie l'hypothèse $\boldsymbol{H_\eta}$:

$$\begin{aligned} &E_Q[\exp\int_0^A\int_O(\eta(y,s)\log\eta(y,s) - \eta(y,s) + 1)\nu(y)dyds] < +\infty \\ ou\quad &E_Q[\exp\int_0^A\int_O(\log\eta(y,s) - \frac{\eta(y,s)-1}{\eta(y,s)})N(dy,ds)] < +\infty. \end{aligned} \quad (12)$$

Soit (M^1, M^2) solution de l'équation, pour $t \in [0,A]$,

$$dM_t^1 = M_t^1\xi_t dW_t,\ M_0^1 = 1\ ;\ dM_t^2 = M_{t-}^2\int_O(\eta(y,t)-1)(N(dy,dt)-\nu(y)dydt), M_0^2 = 1.$$

On pose $M^\psi = M^1 M^2$.
Alors, M^ψ *est une* $(\mathcal{Y}, Q)$*-martingale uniformément intégrable égale à*

$$M_t^\psi = \exp[\int_0^t \xi_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\xi_s\|^2 ds + \sum_n \log \eta(Z_n, T_n) + 1 - \eta(Z_n, T_n)].$$

On pose $R^\psi = M^\psi.Q$. *Le processus* $\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \xi_s ds$ *est un* $(\mathcal{Y}, R^\psi)$*-mouvement brownien et le processus* N *est de* $(\mathcal{Y}, R^\psi)$*-intensité* $\eta(y,u)\nu(y)$.

3. Les prix actualisés sont des $(\mathcal{Y}, R^\psi)$*-martingales locales, c'est à dire que* R^ψ *est une probabilité neutre au risque.*

Preuve :

1. Le processus $\eta(y,t)$ obtenu dans la proposition précédente n'est pas nécessairement positif ; or, pour faire un changement de probabilité, on en a besoin afin que $\eta\nu$ soit effectivement une intensité. ***H1*** (iii) dit que $\eta(.,t) \neq 0$ $d\mathbb{P} \otimes dt$ presque sûrement. Rappelons que $A_t = \{y \in O / \frac{\langle u_t, b_t - r_t \mathbf{1}\rangle}{\langle \phi(y,t), u_t\rangle} < 0\})$ et $\nu(A_t) > 0$ (hypothèse **H1** (iii)) ; soit ψ_1 un processus prévisible et borné sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times O$ tel que $\psi_1(t,.) \in L^1(\nu)$ $d\mathbb{P} \otimes dt$ presque sûrement et $\int_{A_t} |\psi_1(t,y)|\nu(y)dy \neq 0$ $d\mathbb{P} \otimes dt$ presque sûrement.

On choisit une constante C_t telle que

$$C_t \int_{A_t} |\psi_1(t,y)|\nu(y)dy > \int_{A_t^c} |\psi_1(t,y)|\nu(y)dy$$

(A_t^c est le complémentaire de A_t dans O), et on pose $\psi(t,y) = g_t^{-1}(C_t|\psi_1(t,y)|\mathbf{1}_{A_t} - |\psi_1(t,y)|\mathbf{1}_{A_t^c})$, où g_t est le facteur de normalisation ($g_t > 0$ par choix de C_t), et ψ vérifie les conditions demandées.

2. Le fait que ξ et η soient solutions de l'équation (9) et les hypothèses $\boldsymbol{H_\xi}$ et $\boldsymbol{H_\eta}$ permettent de conclure : ce qui concerne le mouvement brownien est tout à fait classique ; ce qui concerne le processus ponctuel de Poisson découle des théorèmes III.1 page 185 ou III.7 page 190 de [18] et du fait que $\eta > 0$, ce qui assure que le saut de la martingale dont M_2 est l'exponentielle de Doléans-Dade est strictement supérieur à -1.

3. C'est une conséquence de la proposition 5.4. □

Remarque 5.6 *1. En l'absence d'initiation, sous les hypothèses* **H1**, $\boldsymbol{H_\xi}$ *et* $\boldsymbol{H_\eta}$, *on obtient une probabilité neutre au risque équivalente à* $\mathbb{P}$ *de la forme* $M^\psi.\mathbb{P}$.
2. Dans [16], la condition $\eta > 0$ *demandait l'hypothèse* $\frac{\langle u_t, b_t - r_t \mathbf{1}\rangle}{\langle \phi(y,t), u_t\rangle} < 0$ *que l'on retrouve ici sous la forme plus générale donnée en* **H1** *(iii).*

5.3 Caractérisation des probabilités neutres au risque

On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des probabilités neutres au risque pour l'agent initié équivalentes à la probabilité Q, c'est à dire l'ensemble des probabilités R équivalentes à la probabilité Q, telles que les prix actualisés sont des $((\mathcal{Y}_t, R), t \leq A)$-martingales.

Soit donc $R \in \mathcal{R}$, $R = Z.Q$ et $R^\psi = M^\psi.Q$ autre élément de $\mathcal{R}$ donné par la section précédente. Les prix étant à la fois des $(\mathcal{Y}, R)$-martingales et des $(\mathcal{Y}, R^\psi)$-martingales, on obtient que pour tout, i, (cf [21] page 109) :

$$[S^i, Z.(M^\psi)^{-1}] \text{ est une } R^\psi\text{-martingale.}$$

C'est à dire que l'on a pour la partie continue $\langle S^i, Z.(M^\psi)^{-1}\rangle = 0$ et la somme des sauts $\sum \Delta S^i \Delta(Z(M^\psi)^{-1})$ est une R^ψ-martingale, donc le compensateur est nul. On obtient donc :

Proposition 5.7 *Toute probabilité R dans $\mathcal{R}$ ensemble des probabilités neutres au risque pour l'agent initié équivalentes à Q, est de la forme $Z_A.Q$ où la $(\mathcal{Y}, Q)$-martingale Z vérifie :*

$$dZ_s = Z_s\chi_s dW_s + \int_O Z_{s-}(\zeta(y,s)-1)(N(dy,ds) - \nu(y)dyds, s \leq A, Z_0 \in L^1(\mathcal{Y}_0, Q),$$

avec $\chi_t = (\sigma_t^*\sigma_t)^{-1}\sigma_t^*\left[\langle u_t, b_t - r_t\mathbf{1}\rangle \int_O \frac{\phi(y,t)}{\langle\phi(y,t),u_t\rangle}\psi(y,t)\nu(y)dy - (b_t - r_t\mathbf{1})\right]$ *et*

$$\int_O \phi(y,t)\zeta(y,t)\nu(y)dy = -\langle u_t, b_t - r_t\mathbf{1}\rangle \int_O \frac{\phi(y,t)\psi(y,t)}{\langle u_t, \phi(y,t)\rangle}\nu(y)dy$$

pour tout ψ, processus prévisible sur $\mathbb{R}^d \times O$, tel que $\int_O \psi(s,y)\nu(y)dy = 1$ et $\frac{\langle u_t, b_t - r_t\mathbf{1}\rangle}{\langle\phi(y,t),u_t\rangle}\psi(y,t) < 0$, $d\mathbb{P}\otimes dy \otimes dt$ presque sûrement.

Preuve: D'après la proposition 5.3, notant $Z_t = E_Q(Z/\mathcal{Y}_t)$, et puisque $Z > 0$, il existe un unique couple prévisible (χ, ζ) tel que

$$Z = E_Q(Z/\mathcal{Y}_0) + \int_0^A Z_s\chi_s dW_s + \int_0^A \int_O Z_{s-}(\zeta(y,s)-1)(N(dy,ds) - \nu(y)dyds).$$

Puis, on utilise la proposition 5.1 :

$$dM_t^\psi = M_t^\psi \xi_t^\psi dW_t + M_{t-}^\psi \int_O (\eta^\psi(y,t) - 1)(N(dy,dt) - \nu(y)dydt) \; ; \; t \in [0, A]$$

et l'écriture des semi-martingales S^i sous Q :

$$S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_s^i(b_s^i ds + \sigma_s^i dW_s) + \int_0^t S_{s-}^i \int_O \phi^i(x,s)N(dx,ds), 0 \leq t \leq T, i = 1, \cdots, d.$$

Pour la partie continue du crochet, il vient $ds \otimes d\mathbb{P}$-presque sûrement, pour tout $i = 1, \cdots, d$:

$$S_s^i Z_s (M_s^\psi)^{-1}\sigma_s^i(\chi_s - \xi_s^\psi) = 0,$$

soit $\chi = \xi^\psi$ puisque par l'hypothèse **H1**(ii) la matrice σ est de rang plein.

Pour les sauts, notons que les sauts de S^i sont $\Delta S^i = S_{t-}^i \phi^i(y,t)$. Puisque $Z_t = Z_{t-}\zeta(y,t)$ et $M_t^\psi = M_{t-}^\psi \eta^\psi(y,t)$, $Z_t(M_t^\psi)^{-1} = Z_{t-}(M_t^\psi)^{-1}\frac{\zeta(y,s)}{\eta^\psi(y,t)}$ et les sauts de $Z_t(M_t^\psi)^{-1} = \Delta(Z_t(M_t^\psi)^{-1}) = Z_{t-}(M_t^\psi)^{-1}(\frac{\zeta(y,t)}{\eta^\psi(y,t)} - 1)$. Il vient donc $dt \otimes d\mathbb{P}$-presque sûrement, pour tout $i = 1, \cdots, d$:

$$\int_O S_{t-}^i Z_{t-}(M_t^\psi)^{-1}\phi^i(y,t).(\frac{\zeta(y,t)}{\eta^\psi(y,t)} - 1)\eta^\psi(y,t)\nu(y)dy = 0,$$

soit $\int_O \phi^i(y,t).(\zeta(y,s) - \eta^\psi(y,t))\nu(y)dy = 0$ pour tout $i = 1, \cdots, d$. □

Remarquons que si l'on applique la matrice σ_t^* à ce vecteur, on retrouve l'unicité de χ puisque pour tout ψ,
$\sigma_t^* \int_O \phi(y,t).\zeta(y,t)\nu(y)dy = -\langle u_t, b_t - r_t\mathbf{1}\rangle \int_O \frac{\psi(y,t)}{\langle u_t, \phi(y,t)\rangle}\nu(y)dy.$

6 Conclusion

La construction des structures de Dirichlet présentée ici a d'autres applications, par exemple donner des conditions d'existence de la densité de la loi d'une diffusion guidée par (W, N) comme cela est fait dans [2].

Pour les applications au modèle financier en présence d'agent informé, on aurait pu procéder comme dans un précédent travail [11]. En effet les hypothèses $\boldsymbol{H_C}$, $\boldsymbol{H_W}$ et $\boldsymbol{H_N}$ impliquent l'existence d'une probabilité Q_0 équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle (W, N) est indépendant de $\sigma(L)$ (Cf. [8]). Ceci est suffisant pour écrire l'équation des prix sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$ et obtenir la représentation prévisible comme ci-dessus.

Avec seulement l'hypothèse que la loi conditionnelle de L sachant $\mathcal{F}_t$ est absolument continue par rapport à le loi de L on ne sait pas démontrer un théorème de représentation de martingale.

Remerciements : Ce travail est redevable à plusieurs collègues, spécialement Francis Hirsch, Thierry Jeulin, Jean Jacod, sans compter les auditeurs de nos différents exposés.

References

[1] I.BARDHAN, X. CHAO , "On martingale measures when asset returns have unpredictable jumps", Stoch. Proc. and their Applic. 63, 1996, 35-54.

[2] K. BICHTELER, J-B. GRAVEREAUX et J. JACOD, "Malliavin's Calculus for Processes with Jumps", Gordon and Breach Sc. Pub., New York 1987.

[3] N. BOULEAU and F. HIRSCH, "Dirichlet Forms and Analysis on Wiener Space", Walter de Gruyter, Berlin, 1991.

[4] N. BOULEAU, "Constructions of Dirichlet structures", dans *Potential Theory-ICPT 94*, Král/Lukĕs/Netuka/Veselý eds., Walter de Gruyter, 1996.

[5] P. BREMAUD, "Point Processes and Queues", Springer-Verlag, 1981.

[6] M. CHALEYAT-MAUREL et T. JEULIN, "Grossissement gaussien de la filtration brownienne", Séminaire de Calcul Stochastique 1982-83, Paris, Lecture Notes in Mathematics 1118, 59-109, Springer-Verlag, 1985.

[7] H. FEDERER, "Geometric Measure Theory", Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1969.

[8] H. FOLLMER and P. IMKELLER, "Anticipation cancelled by a Girsanov transformation : a paradox on Wiener space", Ann. Inst. Henri Poincaré, 29(4), 1993, 569-586.

[9] M. FUKUSHIMA, Y. OSHIMA, M. TAKEDA "Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes", de Gruyter studies in Math., 1994.

[10] A. GRORUD et M. PONTIER, "Comment détecter le délit d'initié ? " ,CRAS, t.324, Serie 1, p.1137-1142, 1997.

[11] A. GRORUD, M. PONTIER, "Insider trading in a Continuous Time Market Model",I.J.T.A.F., vol. 1 (3), p. 315-330, July 1998.

[12] N. IKEDA, S. WATANABE "Stochastic Differential Equations and Diffusions Processes", Second Edition, North-Holland, Amsterdam-Oxford-New-York, 1989.

[13] J. JACOD, "Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales", Lecture Notes in Mathematics 714, Springer-Verlag, 1979.

[14] J. JACOD, "Grossissement initial, Hypothèse H' et Théorème de Girsanov", Séminaire de Calcul Stochastique 1982-83, Paris, Lecture Notes in Mathematics 1118, Springer-Verlag 1985, 15-35.

[15] J. JACOD, A.N. SHIRYAEV, "Limit Theorems for Stochastic Processes", Springer-Verlag, 1987.

[16] M. JEANBLANC-PIQUE et M. PONTIER, "Optimal Portfolio for a Small Investor in a Market Model with Discontinuous Prices" Economica 22, Paris, 1994, 287-310.

[17] T. JEULIN, "Semi-martingales et grossissement de filtration", Lecture Notes in Mathematics 833, Springer-Verlag 1980.

[18] D. LEPINGLE et J. MEMIN, "Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles", Z. Wahrs. verw. Geb. 42, 1978, 175-203.

[19] P. MALLIAVIN, "Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators", Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations, Kyoto, 1976, Kinokuniya-Wiley,1978,195-263.

[20] D. NUALART, "Analysis on Wiener space and anticipating stochastic calculus", Ecole de Probabilités de Saint-Flour, 1995.

[21] P. PROTTER, "Stochastic Integration and Diffential Equations", Springer-Verlag, 1990.

[22] S. SONG, "Grossissement de filtrations et problèmes connexes", thèse de doctorat de l'université de Paris VII, 29 Octobre 1987.

[23] M. YOR, "Grossissement de filtrations et absolue continuité de noyaux", Séminaire de Calcul Stochastique 1982-83, Paris, Lecture Notes in Mathematics 1118, 6-14, Springer-Verlag 1985.

[24] M. YOR, "Some Aspects of Brownian Motion", vol. II, Birkhaüser, 1997.