Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Karl Chrétien
David Kurtz
Bernard Maisonneuve

Processus gouvernés par des noyaux

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 33 (1999), p. 405-409
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1999__33__405_0>

Processus Gouvernés par des Noyaux

Karl CHRETIEN   David KURTZ   Bernard MAISONNEUVE

Résumé. Ce travail, intimement lié au théorème de Ionescu Tulcea, est consacré aux processus gouvernés par des noyaux, d'abord en temps discret et relativement à une filtration, puis pour un ensemble d'indices quelconque. Il est extrait d'un Travail d'Etude et de Recherche effectué en maîtrise par les deux premiers auteurs.

1 Processus gouvernés par des noyaux (temps discret)

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable arbitraire et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit ν_n un noyau de E^n dans E. On note $\mathcal{M}_+(E)$ l'ensemble des fonctions mesurables positives sur E. Nous introduisons la définition suivante

1.1 Définition

Un processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, est gouverné par les noyaux ν_n, relativement à une filtration $(\mathcal{F}_n)$, s'il est adapté à $(\mathcal{F}_n)$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$P_{X_{n+1}}^{\mathcal{F}_n} = \nu_{n+1}^{\overline{X}_n}, \text{ où } \overline{X}_n = (X_0, \cdots, X_n) \ , \tag{1}$$

ce qui signifie : $E(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) \underset{p.s.}{=} \nu_{n+1}^{\overline{X}_n} f \ (f \in \mathcal{M}_+(E))$.

Par exemple, si $E = \mathbb{R}$ et si $(\mathcal{F}_n)$ est la filtration naturelle associée à une suite (U_n) de v.a.r. indépendantes de loi uniforme sur $]0, 1[$, un processus gouverné par les ν_n relativement à $(\mathcal{F}_n)$, de loi initiale donnée μ_0 peut être construit de la manière suivante. On considère les inverses continues à gauche G_0, $G_{n+1}^{x_0, \cdots, x_n}$ des fonctions de répartition de μ_0, $\nu_{n+1}^{x_0, \cdots, x_n}$ respectivement et l'on définit par récurrence la suite (X_n) telle que

$$X_0 = G_0(U_0), X_n = G_n^{\overline{X}_{n-1}}(U_n), (n \geq 1) \ .$$

Ceci fournit un procédé de simulation des processus réels gouvernés par des noyaux.

Dans la situation générale la mention de la filtration est naturellement omise lorsqu'il s'agit de $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \cdots, X_n)$. Dans ce cas (1) équivaut à : $P_{\overline{X}_{n+1}} = P_{\overline{X}_n} \otimes \nu_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Ainsi tout processus (X_n) à valeurs dans un espace lusinien (borélien de compact métrisable), en particulier polonais (cf. [1], [2]) peut être considéré comme étant gouverné par des noyaux. Inversement, si les ν_n sont donnés (E est maintenant arbitraire), il existe une probabilité unique sur $(W, \mathcal{G}) = (E, \mathcal{E})^{\mathbb{N}\otimes}$ pour laquelle le processus (ξ_n) des coordonnées est gouverné par les ν_n, $n \geq 1$ avec pour mesure initiale μ_0 donnée. Cette probabilité fournie par le théorème de Ionescu Tulcea (voir par exemple [5]) est notée $\mu_0 \otimes \nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \cdots$

Dans la suite (X_n) est un processus gouverné par des noyaux ν_n relativement à une filtration $(\mathcal{F}_n)$.

1.2 Prédiction

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E^{n+1}$ on note Q_n^x la mesure $\delta_{x_0} \otimes \cdots \otimes \delta_{x_n} \otimes \nu_{n+1} \otimes \nu_{n+2} \otimes \cdots$ sur $(W, \mathcal{G})$.

THÉORÈME — *La famille $Q_n^{\cdot} = (Q_n^x)_{x \in E^{n+1}}$ est un noyau de E^{n+1} dans W et l'on a*

$$P_X^{\mathcal{F}_n} = Q_n^{\overline{X}_n}, \ n \in \mathbb{N}, \ où\ X = (X_k)_{k \in \mathbb{N}} \ . \tag{2}$$

DÉMONSTRATION — Il suffit de montrer que

(a) $Q_n^{\cdot} h$ est mesurable,

(b) $E(h(X)|\mathcal{F}_n) \underset{p.s.}{=} Q_n^{\overline{X}_n} h$,

pour toute fonction $h \in \mathcal{M}_+(W)$ ne dépendant que de $\xi_0, \cdots, \xi_p$ $(p \geq n)$. Les conditions (a) et (b) sont évidentes pour $p = n$. Supposons les vérifiées pour un $p \geq n$; elles le sont encore à l'ordre $p+1$ grâce aux calculs suivants, où l'on choisit h de la forme $g(\overline{\xi}_p) f(\xi_{p+1})$ avec $f \in \mathcal{M}_+(E)$ et $g \in \mathcal{M}_+(E^{p+1})$:

$$(*) \qquad Q_n^{\cdot}(h) = Q_n^{\cdot}(g(\overline{\xi}_p)\nu_{p+1}^{\overline{\xi}_p} f) \ , \text{ par définition des } Q_n^x,$$

$$E(h(X)|\mathcal{F}_p) = g(\overline{X}_p)\nu_{p+1}^{\overline{X}_p} f \ , \text{ en vertu de (1)},$$

$$E(h(X)|\mathcal{F}_n) = Q_n^{\overline{X}_n}(g(\overline{\xi}_p)\nu_{p+1}^{\overline{\xi}_p} f) \ , \text{ par hypothèse de récurrence},$$

$$= Q_n^{\overline{X}_n}(h) \ , \text{ d'après } (*).$$

COROLLAIRE — *Soit $\theta_n = (\xi_{n+k})_{k \in \mathbb{N}}$. On a les formules suivantes de prédiction du futur (large ou strict) :*

$$P_{\theta_n(X)}^{\mathcal{F}_n} = P_n^{\overline{X}_n}, \ P_{\theta_{n+1}(X)}^{\mathcal{F}_n} = \Pi_{n+1}^{\overline{X}_n}, \ (n \in \mathbb{N}) \ ,$$

$$où\ P_n^{\cdot} = \theta_n(Q_n^{\cdot}) \ et\ \Pi_{n+1}^{\cdot} = \theta_{n+1}(Q_n^{\cdot}) \ . \tag{3}$$

Les formules (2) et (3) s'étendent à un *temps d'arrêt* T de $(\mathcal{F}_n)$. Par exemple on a

$$P_{\theta_{T+1}(X)}^{\mathcal{F}_T} = \Pi_{T+1}^{\overline{X}_T}, \text{ sur } \{T < \infty\} \ , \tag{4}$$

où $\theta_\infty = \theta_0$ (ou tout autre choix permettant de donner un sens à la v.a. $\theta_{T+1}(X)$).

REMARQUE — En posant $\xi^n = (\xi_{k\wedge n})_{k\in\mathbb{N}}$, $X^n = \xi^n(X)$, $\alpha_{n+1} = \xi^{n+1}(Q_n^{\bar{\xi}_n(\cdot)})$ (c'est un noyau sur $(W, \mathcal{G})$), on voit d'après (2) que (X^n) est une chaîne de Markov relativement aux noyaux $\alpha_n, n \geq 1$ et à la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

1.3 Caractérisation des temps d'arrêt de (X_n)

Notre objectif est d'adapter aux processus gouvernés par des noyaux les résultats de [3] sur la caractérisation des temps d'arrêt. Les choses sont naturellement plus simples en temps discret et ne nécessitent aucune hypothèse sur $(E, \mathcal{E})$. *On suppose ici que* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \cdots, X_n)$ *et* $\mathcal{F} = \sigma(X_n, n \in \mathbb{N})$. On considère aussi la filtration $(\widetilde{\mathcal{F}}_n)$ complétée ($\widetilde{\mathcal{F}}_n$ est engendrée par $\mathcal{F}_n$ et la famille des ensembles $\mathcal{F}$-mesurables et de mesure nulle).

THÉORÈME— *Soit T un temps aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$. Pour que T soit un temps d'arrêt de $(\widetilde{\mathcal{F}}_n)$, il faut et il suffit qu'il vérifie*

$$P^{\mathcal{F}_T}_{\theta_{T+1}(X)} = \Pi^{\overline{X}_T}_{T+1}, \text{ sur } \{T < \infty\} .$$

Rappelons que $\mathcal{F}_T$ est engendrée par les Z_T, où $(Z_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ est un processus réel adapté.

DÉMONSTRATION — La condition est évidemment nécessaire. Inversement, si T vérifie (4) et si $f = u(\overline{\xi}_n)v(\theta_{n+1})$ pour un entier n avec $u \in \mathcal{M}_+(E^{n+1})$ et $v \in \mathcal{M}_+(W)$, on a

$$\begin{aligned} E[f(X), T = n] &= E[u(\overline{X}_n)\Pi^{\overline{X}_n}_{n+1}v, T = n], \text{ d'après (4),} \\ &= E[Q^{\overline{X}_n}_n f\, Z_n], \text{ où } Z_n = P(T = n|\mathcal{F}_n) , \\ &= E[f(X)Z_n], \text{ d'après (2),} \end{aligned}$$

égalité qui s'étend à $f \in \mathcal{M}_+(W)$, donc $\mathbb{1}_{\{T=n\}} \underset{p.s.}{=} Z_n$. Ainsi, T est un temps d'arrêt de $(\widetilde{\mathcal{F}}_n)$.

REMARQUE — Pour une filtration générale $(\mathcal{F}_n)$ on montre de manière analogue qu'un temps aléatoire T est un temps d'arrêt de $(\widetilde{\mathcal{F}}_n)$ si et seulement si pour toute v.a.n. ≥ 0 H et $H_n = E(H|\mathcal{F}_n)$ on a $E(H|\mathcal{F}_T) \underset{p.s.}{=} H_T$ sur $\{T < \infty\}$.

1.4 Exemples

On suppose toujours que $(\mathcal{F}_n)$ est la filtration naturelle de (X_n) et que $\mathcal{F} = \bigvee_n \mathcal{F}_n$. Soit T un temps aléatoire.

1) Si (X_n) est une chaîne de Markov relativement à un noyau ν sur $(E, \mathcal{E})$, elle est aussi gouvernée par les noyaux ν_n tels que $\nu_n^{x_0,\cdots,x_{n-1}} = \nu^{x_{n-1}}$. Dans ce cas $\Pi^{x_0,\cdots,x_n}_{n+1}$ ne dépend que de x_n et est notée Π^{x_n}. Par suite T est un temps d'arrêt de $(\widetilde{\mathcal{F}}_n)$ si et seulement si

$$P^{\mathcal{F}_T}_{\theta_{T+1}(X)} = \Pi^{X_T} \text{ sur } \{T < \infty\} .$$

2) En particulier supposons que les X_n soient indépendantes, de même loi μ et que $P(T < \infty) > 0$. Alors T est un temps d'arrêt de $(\widetilde{\mathcal{F}}_n)$ si et seulement si, sous $Q = P(\,.\,|T < \infty)$, $\theta_{T+1}(X)$ est indépendante de $\mathcal{F}_T$ et a pour loi $\pi = \mu^{\mathbb{N}\otimes}$. Il faut prendre garde que la condition d'indépendance seule ne suffit pas. Par exemple si $0 < \mu(C) < 1$, alors $T = \inf\{n \geq 0 : X_{n+1} \in C\}$ est *p.s.* fini, $\mathcal{F}_T$ et $\theta_{T+1}(X)$ sont P-indépendantes, mais T n'est pas un temps d'arrêt de $(\widetilde{\mathcal{F}}_n)$: la loi de $\theta_{T+1}(X)$ est $\mu(\,.\,|C) \otimes \mu \otimes \mu \otimes \cdots$ au lieu de π.

2 Construction de probabilités sur un espace produit infini

Le théorème qui suit contient à la fois le théorème de Kolmogorov et le théorème d'existence d'un produit quelconque de probabilités (*sans conditions* sur les espaces facteurs, cf. [5] prop. IV-1-2).

Soit I un ensemble infini d'indices et pour tout $i \in I$ soit $(E_i, \mathcal{E}_i)$ un espace mesurable *arbitraire*. Pour $J \subset I$ non vide on note $(E_J, \mathcal{E}_J) = \prod_{j\in J}(E_j, \mathcal{E}_j)$ et X_J la projection canonique de E_I sur E_J; $X_{\{i\}}$ est noté X_i pour tout $i \in I$. Soit ϕ l'ensemble des parties *finies* de I.

2.1 Le théorème de construction

Soit $(\mu_J)_{J\in\phi}$ un système de probabilités tel que pour tout $J \in \phi$ et $i \in I \setminus J$:

- *μ_J est une probabilité sur E_J*
- *$\mu_{J\cup\{i\}}$ s'identifie à $\mu_J \otimes \nu_{J,i}$ où $\nu_{J,i}$ est un noyau de E_J dans E_i.*

Alors il existe une probabilité P unique sur $(\Omega, \mathcal{F}) = (E_I, \mathcal{E}_I)$ telle que $P_{X_J} = \mu_J$ $(J \in \phi)$.

DÉMONSTRATION — Soit Δ la famille des parties infinies dénombrables de I. Pour $D \in \Delta$, numérotée $d_0, d_1, \cdots$ on pose $\mathcal{F}_D = \sigma(X_D)$ et on note μ_D la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_D)$ telle que (X_{d_n}) ait pour loi initiale μ_{d_0} et soit gouverné par les noyaux $\nu_n = \nu_{\{d_0,\cdots,d_{n-1}\},d_n}$ [4]. On a $X_J(\mu_D) = \mu_J$ $(J \in \phi, J \subset D)$, donc μ_D ne dépend pas de la numérotation choisie et de plus $\mu_{D'} = \mu_D$ sur $\mathcal{F}_D$ pour $D' \in \Delta$, $D \subset D'$. Comme $\mathcal{F} = \bigcup_{D\in\Delta} \mathcal{F}_D$, il reste à poser $P = \mu_D$ sur $\mathcal{F}_D$ pour obtenir la probabilité cherchée.

2.2 Applications

1) Soit $(\mu_i)_{i\in I}$ une famille de probabilités sur les $(E_i, \mathcal{E}_i)$. En appliquant le théorème précédent aux $\mu_J = \bigotimes_{i\in J} \mu_i$, $J \in \phi$ on trouve la probabilité P (unique) sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que les X_i soient *indépendantes*, de lois respectives μ_i, $i \in I$.

[4] noter que les considérations de la première partie s'étendent au cas où X_n prend ses valeurs dans un espace dépendant de n.

2) Si les E_i sont lusiniens et si $(\mu_J)_{J\in\phi}$ est un système projectif de mesures de probabilités sur les E_J, l'existence des noyaux $\nu_{J,i}$ est satisfaite, donc le *théorème de Kolmogorov* apparaît comme un deuxième cas particulier.

3) Le théorème s'applique également si les tribus $\mathcal{E}_i$ sont engendrées par des partitions dénombrables, car l'existence des noyaux $\nu_{J,i}$ est alors automatique.

Références

1. N. BOURBAKI, *Eléments de Mathématiques, Topologie Générale, Chapitre IX*, Hermann, 1958.
2. C. DELLACHERIE, P.A. MEYER, *Probabilités et Potentiel, Chapitres I à IV*, Hermann, 1975.
3. F. KNIGHT, B. MAISONNEUVE, *A characterization of stopping times*, The Annals of Probability, Vol. 22 N°3, 1994, 1600-1606.
4. B. MAISONNEUVE, *Construction de probabilités sur un espace produit*, Exposé au séminaire de statistiques de Grenoble, 1984 (non publié).
5. J. NEVEU, *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*, Masson, 1964.