Bernard De Meyer

Une simplification de l'argument de Tsirelson sur le caractère non-brownien des processus de Walsh

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 33 (1999), p. 217-220
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1999__33__217_0>

UNE SIMPLIFICATION DE L'ARGUMENT DE TSIRELSON SUR LE CARACTERE NON-BROWNIEN DES PROCESSUS DE WALSH

BERNARD DE MEYER

Il est bien connu que le mouvement Brownien a la propriété de représentation prévisible sur sa filtration naturelle. Dans [3], M. Yor posait la question réciproque: les filtrations ayant la propriété de représentation prévisible pour un mouvement Brownien linéaire sont-elles les filtrations naturelles d'un autre mouvement Brownien?

Cette question a été la motivation principale des études récentes du processus de Walsh. Ce processus X est une martingale à valeurs dans le plan complexe $\mathbb{C}$, dont le cube X^3 est un processus réel positif et dont le module $|X|$ est un mouvement Brownien réfléchi.

La filtration naturelle d'un tel processus X a en effet la propriété de représentation prévisible pour un mouvement Brownien réel et l'on a longtemps conjecturé qu'un processus de Walsh ne pouvait être mesurable sur une filtration Brownienne. Cette conjecture fut démontrée par Tsirelson [2] en 1997, en introduisant la notion de "confort" des filtrations Browniennes. Cette démonstration était relativement lourde sur le plan technique et cette complexité dissimulait la nature profonde de l'argument.

En fait, comme veut le souligner cette note, le "caractère non Brownien" du processus de Walsh est une conséquence d'une propriété très "dyadique" de la filtration Brownienne, propriété initialement conjecturée par M.T. Barlow et à présent démontrée dans [1]: si G est un temps honnête (i.e. la fin d'un ensemble optionnel) sur une filtration Brownienne $\{\mathcal{F}_t\}$, et si $\mathcal{F}_G$ (respectivement $\mathcal{F}_G^+$) représente la tribu engendrée par les variables R_G, lorsque R parcourt la classe des processus optionnels (respectivement progressifs), alors $\mathcal{F}_G^+$ diffère de $\mathcal{F}_G$ au plus par un bit d'information. En d'autres termes, il existe un événement A tel que $\mathcal{F}_G^+ = \sigma(\mathcal{F}_G, A)$.

Supposer qu'un processus de Walsh X soit adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ conduit alors à une contradiction: en prenant pour temps honnête G le dernier zéro avant 1 de X, il est clair que la variable $e_1 := X_1/|X_1|$ est dans $\mathcal{F}_G^+$ et peut dès lors s'écrire

$$e_1 = f\mathbb{1}_A + g\mathbb{1}_{A^c}, \tag{1}$$

où f et g sont deux variables $\mathcal{F}_G$-mesurables. Mais ceci est impossible, car un argument de symétrie indique que la variable e_1 est indépendante de $\mathcal{F}_G$ et prend les trois valeurs $\exp(ik2\pi/3)$, $k = 0, 1, 2$ avec une probabilité de $1/3$ chacune.

La propriété "dyadique" de la filtration Brownienne est en fait démontrée dans [1] comme une conséquence de l'argument de Tsirelson généralisé au problème des martingales araignées (voir le théorème ci-après) et ne peut donc servir de point de départ de notre démonstration. Cependant, nous montrerons que le caractère "confortable" de la filtration Brownienne permet d'établir une relation très semblable à (1):

$$e_1 = f \mathbb{1}_A + e_1 \mathbb{1}_{A^c},$$

où l'événement A se réalise avec une probabilité très proche de $1/2$ et f est $\mathcal{H}_G$-mesurable ($\{\mathcal{H}_t\}$ dénote ici une filtration par rapport à laquelle X est également un processus de Walsh).

Nous obtenons à nouveau une contradiction, car sur l'événement $\{P[A|\mathcal{H}_G] \geq P[A]\}$ qui a une probabilité non nulle, e_1 prend, conditionnellement à $\mathcal{H}_G$, la valeur f avec une probabilité plus grande que $P[A] \approx 1/2$, alors que

$$P[e_1 = \exp(ik2\pi/3)|\mathcal{H}_G] = 1/3, \text{ pour } k = 0, 1, 2.$$

Nous adapterons directement l'argument ébauché ici au cadre plus général des martingales araignées telles qu'introduites dans [1]:

Une toile T de dimension l dans un espace vectoriel réel est par définition $T := \{\lambda.e^j | \lambda \geq 0; j = 1, \dots, l\}$, où $\{e^j\}_{j=1,\dots,l}$ est une famille de vecteurs de rang $l-1$ satisfaisant $\sum_{j=1}^{l} e^j = 0$. Nous noterons Δ l'ensemble convexe engendré par $\{e^j; j = 1, \dots, l\}$, et h, l'application $T \to \{0, e^1, \cdots, e^l\}$ qui à $\lambda.e^j \in T$, $\lambda \neq 0$, associe $h(\lambda.e^j) := e^j$, et à 0 associe $h(0) := 0$.

Une martingale à valeurs dans une toile T est dite martingale araignée.

Le résultat que nous démontrerons ici est alors:

Théorème : *Soit $\{\mathcal{F}_t\}$ la filtration naturelle d'un mouvement Brownien W. Sur une toile T de dimension $l \geq 3$, la martingale identiquement nulle est la seule martingale araignée sur T issue de 0 et adaptée à $\{\mathcal{F}_t\}$.*

Démonstration : Soit Y une martingale araignée sur T, issue de 0 et adaptée à $\{\mathcal{F}_t\}$. Nous allons montrer que, pour tout temps déterministe S, p.s. $Y_S = 0$.

Si ce n'était pas le cas, nous pourrions construire par la technique de "concaténation" suivante une martingale araignée Z bornée, issue de 0, adaptée à $\{\mathcal{F}_t\}$ et telle que p.s., $Z_1 \neq 0$. Par arrêt, nous pouvons considérer Y_S borné. En outre cette variable peut s'exprimer comme une fonction H de la trajectoire $\{W_s, s \leq S\}$. Définissons alors

$$Y^n := H(\{\sqrt{2^{n+1}.S}(W_{1-1/2^n+s/(S.2^{n+1})} - W_{1-1/2^n}), s \leq S\}),$$

et notons

$$Z_1 := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\forall k \in \{0,\dots,n-1\}: Y^k = 0\}} Y^n.$$

La martingale $Z_t := E[Z_1|\mathcal{F}_t]$ a alors les propriétés requises.

Pour $\epsilon > 0$ fixé, notons X_t la martingale $Z_{t \wedge \tau_\epsilon}/\epsilon$, où $\tau_\epsilon := \inf\{t \leq 1 : Z_t/\epsilon \notin \Delta\}$. Dénotons e le processus $h(X)$. Remarquons que sur l'événement $\{\tau_\epsilon < 1\}$, la relation $X_1 = h(X_1)$ est vérifiée. L'événement $\{X_1 = e_1\}$ a alors une probabilité aussi proche de 1 que l'on veut, pour peu que ϵ soit suffisamment petit, puisque $\{Z_1/\epsilon \not\in \Delta\} \subset \{\tau_\epsilon < 1\}$ et $1 = P(Z_1 \neq 0) = P(\cup_{\epsilon>0}\{Z_1/\epsilon \not\in \Delta\})$.

Puisque X est mesurable par rapport à la filtration Brownienne, il existe une application F qui, à chaque trajectoire $W_.$ du Brownien, associe la trajectoire $X_. := F(W_.)$ de la martingale X.

Tout comme Tsirelson, introduisons à présent un mouvement Brownien W' indépendant du premier et de même dimension. Soit alors $\{\mathcal{H}_t\}$ la filtration engendrée par (W, W').

Pour $r \in [0, 1[$, dénotons par W^r le mouvement Brownien $W^r := \sqrt{r}W + \sqrt{1-r}W'$ et soit X^r le processus $F(W^r)$. Clairement les deux processus X et X^r sont des martingales araignées de même loi sur la filtration $\{\mathcal{H}_t\}$. Définissons également le processus $e^r := h(X^r)$.

Soit ensuite $g_t := \sup\{s \leq t : X_s = 0\}$ et posons $G := g_1$ et $G^r := \sup\{t \leq 1 : X_t^r = 0\}$.

Nous établirons par la suite le lemme suivant qui indique que les martingales X et X^r sont à la fois très proches et suffisamment différentes:

Lemme :
1) $\lim_{r\to 1} P[\{e_1 = e_1^r\}] = 1$.
2) Pour tout $r < 1$*:* $P[\{G = G^r\}] = 0$ *et* $P[\{G^r < G\}] = 1/2$.

Nous noterons $\mathcal{H}_G$ la σ-algèbre engendrée par les variables aléatoires R_G, où R est un processus prévisible sur la filtration $\{\mathcal{H}_t\}$.

La formule de balayage (voir théorème 1 dans [4]) indique alors que si R est un processus prévisible borné à valeurs réelles, le processus $R_{g_t}X_t$ est une martingale. En particulier, $E[R_G X_1] = R_{g_0}X_0 = 0$. Vu la définition de $\mathcal{H}_G$, cela signifie que $E[X_1|\mathcal{H}_G] = 0$.

Soit à présent A l'événement: $\{G^r < G\} \cap \{e_1 = e_1^r\} \cap \{X_1 = e_1\}$. Il suit des définitions de G^r et A que, sur A, $X_1 = e_1 = e_1^r = e_G^r$ et partant: $X_1 = e_G^r \mathbb{1}_A + X_1 \mathbb{1}_{A^c}$. Puisque e^r est un processus prévisible, e_G^r est mesurable par rapport à $\mathcal{H}_G$ et il suit alors que $0 = E[X_1|\mathcal{H}_G] = e_G^r P[A|\mathcal{H}_G] + (1 - P[A|\mathcal{H}_G])U$, où $U := E[X_1|\mathcal{H}_G, A^c]$.

Puisque X_1 est à valeurs dans Δ, par convexité, il en est de même de la variable U et l'on peut donc écrire U de manière unique comme $U = \sum_{j=1}^l \lambda_j e^j$, où $\lambda_j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^l \lambda_j = 1$. Sur l'événement $\{e_G^r = e^k\}$, la relation précédente peut donc s'écrire: $0 = \sum_{j=1}^l \xi_j e^j$, avec $\xi_j := (1 - P[A|\mathcal{H}_G])\lambda_j$ si $j \neq k$ et $\xi_k := P[A|\mathcal{H}_G] + (1 - P[A|\mathcal{H}_G])\lambda_k$.

Puisque $\{e^j; j = 1, \ldots, l\}$ est une famille de rang $l - 1$ dont la somme est nulle, nous concluons que les égalités $\xi_j = \xi_k$ ont lieu pour tout $j \neq k$. Il suit alors:

$$\begin{aligned} 1 &= \textstyle\sum_{j=1}^l \lambda_j \\ &= (l-1)P[A|\mathcal{H}_G]/(1 - P[A|\mathcal{H}_G]) + l\lambda_k \\ &\geq (l-1)P[A|\mathcal{H}_G]/(1 - P[A|\mathcal{H}_G]). \end{aligned}$$

En particulier, sur $\{e_G^r = e^k\}$: $P[A|\mathcal{H}_G] \leq 1/l$.

En outre, sur $\{e_G^r = 0\}$, $X_G^r = 0$, et donc $G^r \geq G$. Ceci indique que l'événement A est incompatible avec $\{e_G^r = 0\}$ ou, en d'autres termes, $P[A|\mathcal{H}_G] = 0$ sur $\{e_G^r = 0\}$. Dès lors, la relation $P[A|\mathcal{H}_G] \leq 1/l$ est toujours vérifiée et partant $P[A] \leq 1/l$. Ceci est impossible pour $l \geq 3$ car, en vertu du lemme, lorsque $r \to 1$ et $\epsilon \to 0$, $P[A]$ tend vers $1/2$. ∎

Démonstration du lemme: Remarquons que les processus W et W^r ont même loi et que W^r converge en probabilité vers W lorsque r tend vers 1. Puisque e_1 peut s'écrire comme une fonction K de la trajectoire Brownienne $\{W_s, s \leq 1\}$ et que $e_1^r = K(\{W_s^r, s \leq 1\})$, l'assertion 1) est une conséquence immédiate du lemme de Slutsky (voir [1], théorème 1).

Il est aisé d'établir que les processus (W, W^r) et (W^r, W) ont même loi. Il en découle que (G, G^r) a même loi que (G^r, G) et partant la relation $P[G^r < G] = 1/2$ est une conséquence immédiate de la relation $P[G = G^r] = 0$, qui se démontre exactement comme le lemme 4 de [1]. ∎

References

[1] Barlow, M.T., M. Emery, F. B. Knight, S. Song and M. Yor (1998), Autour d'un théorème de Tsirelson sur des filtrations browniennes et non-browniennes, *Sém. Prob. XXXII, Lecture Notes in Mathematics 1686*, 264-305, Springer Verlag, Berlin.

[2] Tsirelson, B. (1997), Triple points: from non-Brownian Filtrations to harmonic measures, *Geometric and Functional Analysis 7*, 1096-1142, Birkhäuser Verlag, Basel.

[3] Yor, M. (1979), Sur l'étude des martingales continues extrémales. *Stochastics 2*, 191-196.

[4] Yor, M. (1979), Sur le balayage des semimartingales continues. *Sém. Prob. XIII, Lecture Notes in Mathematics 721*, 453-471, Springer Verlag, Berlin.