MIREILLE CAPITAINE

# Sur une inégalité de Sobolev logarithmique pour une diffusion unidimensionnelle

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 32 (1998), p. 6-13

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1998__32__6_0>

# Sur une inégalité de Sobolev logarithmique pour une diffusion unidimensionnelle

Mireille CAPITAINE

**Résumé**

Par une méthode élémentaire de calcul stochastique, nous établissons, dans cet article, une inégalité de Sobolev logarithmique pour une fonction cylindrique d'une diffusion unidimensionnelle, solution d'une équation différentielle stochastique. L'idée est de considérer cette diffusion comme une fonctionnelle du mouvement Brownien intervenant dans l'équation différentielle et de lui appliquer l'inégalité de Sobolev logarithmique connue pour le mouvement Brownien sur $\mathbb{R}$. Pour cela, nous déterminons dans un premier temps, une expression "adéquate" de la dérivée au sens de Malliavin des marginales de la diffusion.

## 1 Introduction et notations

E. P.Hsu [8] d'une part, et S. Aida et D. Elworthy [1] d'autre part, ont démontré des inégalités de Sobolev logarithmiques pour le mouvement Brownien sur une variété Riemannienne; le premier a utilisé un procédé d'itération et, pour ce faire, le procédé de couplage de Kendall; les seconds ont plongé isométriquement la variété dans un espace euclidien $\mathbb{R}^d$ et ont appliqué l'inégalité de Sobolev logarithmique pour le mouvement Brownien sur $\mathbb{R}^d$. F.Y Wang [9] a étendu le résultat de E. P. Hsu à certaines diffusions sur les variétés. Dans cet article, nous obtenons une inégalité de Sobolev logarithmique pour une diffusion sur $\mathbb{R}$, par une méthode élémentaire de calcul stochastique, ne faisant pas appel à la géométrie différentielle.

Soit $\mathcal{C}_0([0,1];\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ s'annulant en zéro, et soit $\mathcal{B}$ la tribu Borélienne de $(\mathcal{C}_0([0,1];\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme de la convergence uniforme sur $[0,1]$; nous notons $P$ la mesure de Wiener définie sur $\mathcal{B}$ et $\omega = \{\omega_t, t \in [0,1]\}$ le mouvement Brownien canonique sur l'espace de Wiener $(\mathcal{C}_0([0,1];\mathbb{R}), \mathcal{B}, P)$. Soit $X = \{X_t, t \in [0,1]\}$, le processus de diffusion solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \sigma(X_t)\, d\omega_t + b(X_t)\, dt,\ X_0 = x,\ X_t \in \mathbb{R},$$

où $x$ appartient à $\mathbb{R}$, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont lipschitziennes, respectivement de classe $\mathcal{C}^2$ et $\mathcal{C}^1$, $\sigma$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. Nous regardons chaque $X_t$ comme une fonction de $\omega$ et appliquons l'inégalité de Sobolev logarithmique pour le mouvement Brownien sur $\mathbb{R}$ ( notre approche rejoint celle de S. Aida et D. Elworthy [1] sur ce point). Cette méthode fait apparaître la dérivée au sens de Malliavin de $X_t$; aussi, dans un premier temps, nous déterminons une expression de cette dérivée, se prêtant à la majoration désirée.

# 2 Inégalité de Sobolev logarithmique pour la loi de $X_t$

Dans ce paragraphe, nous établissons l'inégalité de Sobolev logarithmique pour la loi d'une coordonnée de la diffusion X. Cette inégalité résulte déjà des méthodes de semigroupes (opérateur $\Gamma_2$) développées par D. Bakry et M. Emery (cf. [3]). Notre approche probabiliste s'appuie déjà sur l'inégalité de Sobolev logarithmique du mouvement Brownien.

**Proposition 1** *Soit $t$ dans $[0,1]$. Notons $L$, le générateur infinitésimal de $X$, défini par $Lg(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)g''(x) + b(x)g'(x)$, pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$. Soit $c \geq 0$. Si $\frac{L\sigma - b'\sigma}{\sigma} \geq -c$, alors, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ dont la dérivée est bornée,*

$$E\left[f^2(X_t)\log f^2(X_t)\right] - E\left[f^2(X_t)\right]\log E\left[f^2(X_t)\right] \leq \frac{e^{2ct}-1}{c} E\left[\sigma^2(X_t)\left\{f'(X_t)\right\}^2\right].$$

**Démonstration** Appliquons l'inégalité de Sobolev logarithmique pour le mouvement Brownien sur $\mathbb{R}$, en considérant $X_t$ comme une fonction de $\omega$. Il vient

$$E\left[f^2(X_t)\log f^2(X_t)\right] - E\left[f^2(X_t)\right]\log E\left[f^2(X_t)\right] \leq 2E\left[\int_0^1 \left(f'(X_t)\, D_r X_t\right)^2 dr\right]$$

où $D_{.}X_t$ désigne la dérivée au sens de Malliavin de $X_t$. $D_r X_t$ vérifie une équation différentielle stochastique (cf [7]), et il est immédiat en dimension 1 d'obtenir la forme explicite:

$$\begin{aligned} D_r X_t &= \sigma(X_r)\exp\left[\int_r^t \sigma'(X_s)\, dB_s + \int_r^t \left(b'(X_s) - \frac{1}{2}\sigma'^2(X_s)\right) ds\right] \\ &\quad si\ \ r \leq t \\ &= 0\ \ si\ \ r > t. \end{aligned}$$

Nous allons déterminer une autre expression de $D_{.}X_t$ faisant intervenir le générateur $L$.

**Lemme 1** *Si $0 \leq r \leq t$, alors*

$$D_r X_t = \sigma(X_t)\exp\left[-\int_r^t \frac{L\sigma - b'\sigma}{\sigma}(X_s)\, ds\right].$$

**Démonstration du lemme 1** Définissons, pour tout $u$ dans $[0,1]$,

$$M_u = \exp\left[-\int_0^u \sigma'(X_s)\, dB_s - \int_0^u \left(b'(X_s) - \frac{1}{2}\sigma'^2(X_s)\right) ds\right],$$

$$A_u = \exp\left[-\int_0^u \frac{L\sigma - b'\sigma}{\sigma}(X_s)\, ds\right].$$

Par la formule d'Itô, nous obtenons, pour tous $0 \leq r \leq t$,

$$
\begin{aligned}
A_t\sigma(X_t)M_t &= A_r\sigma(X_r)M_r - \int_r^t \frac{L\sigma - b'\sigma}{\sigma}(X_s)A_s\sigma(X_s)M_s ds \\
&\quad + \int_r^t A_s\sigma'(X_s)M_s[\sigma(X_s)dB_s + b(X_s)ds] \\
&\quad - \int_r^t A_s\sigma(X_s)M_s\left[\sigma'(X_s)dB_s + \left(b'(X_s) - \frac{1}{2}\sigma'^2(X_s)\right)ds\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_r^t A_s\sigma(X_s)M_s\sigma'^2(X_s)ds + \frac{1}{2}\int_r^t A_s\sigma''(X_s)M_s\sigma^2(X_s)ds \\
&\quad - \int_r^t A_s\sigma'(X_s)M_s\sigma(X_s)\sigma'(X_s)ds \\
&= A_r\sigma(X_r)M_r.
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit que, pour tous $0 \leq r \leq t$,

$$
\begin{aligned}
&\sigma(X_r)\exp\left[\int_r^t \sigma'(X_s)dB_s + \int_r^t\left(b'(X_s) - \frac{1}{2}\sigma'^2(X_s)\right)ds\right] \\
&\qquad = \sigma(X_t)\exp\left[-\int_r^t \frac{L\sigma - b'\sigma}{\sigma}(X_s)ds\right],
\end{aligned}
$$

ce qui termine la démonstration du lemme 1.

La proposition 1 se déduit aisément du lemme 1. En effet, nous avons

$$
\begin{aligned}
E\left[f^2(X_t)\log f^2(X_t)\right] &- E\left[f^2(X_t)\right]\log E\left[f^2(X_t)\right] \\
&\leq 2E\left[\int_0^1 (f'(X_t)D_rX_t)^2 dr\right] \\
&= 2E\left[(f'(X_t))^2\sigma^2(X_t)\int_0^t \exp\left[-2\int_r^t \frac{L\sigma - b'\sigma}{\sigma}(X_s)ds\right]dr\right] \\
&\leq \frac{e^{2ct}-1}{c}E\left[(f'(X_t))^2\sigma^2(X_t)\right],
\end{aligned}
$$

ce qui correspond au résultat annoncé.
**Remarque** Il est en fait inutile de supposer $\sigma$ non nul pour obtenir la proposition 1. En effet, par le lemme de Gronwall, nous obtenons de la même façon, sous la condition $(L\sigma - b'\sigma)\sigma \geq -c\sigma^2$, la majoration:

$$
\int_0^1 (D_rX_t)^2 dr \leq \frac{e^{2ct}-1}{2c}\sigma^2(X_t).
$$

Il nous a semblé néanmoins intéressant de donner la forme explicite de $D_rX_t$.

# 3 Extension à toute loi marginale de $X$

La théorie des semigroupes ne semble pas permettre la généralisation de l'inégalité de Sobolev logarithmique à toute fonction cylindrique du processus de diffusion.

Dans ce paragraphe, nous obtenons cette extension, en gardant pour points de départ l'inégalité de Sobolev logarithmique pour le mouvement Brownien et le lemme 1.

**Proposition 2** *Soient* $0 \leq t_1 < \cdots < t_n \leq 1$, $c \geq 0$ *et* $K(c) = 4(c^2+1)e^{2c}$. *Si* $\left|\frac{L\sigma - b'\sigma}{\sigma}\right| \leq c$, *alors, pour toute fonction* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de classe* $C^1$ *dont les dérivées partielles sont bornées,*

$$E\left[f^2(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\log f^2(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\right] - E\left[f^2(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\right]\log E\left[f^2(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\right]$$

$$\leq K(c)\sum_{i,j=1}^{n}\min(t_i,t_j)E\left[\sigma(X_{t_i})\,\sigma\left(X_{t_j}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\right]$$

**Démonstration** Elle suit le même principe que celle de la proposition 1. Appliquons de même l'inégalité de Sobolev logarithmique connue pour le mouvement Brownien sur $\mathbb{R}$, en considérant chaque $X_{t_i}$ comme une fonction de $\omega$. Nous obtenons ainsi

$$E\left[f^2(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\log f^2(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\right] - E\left[f^2(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\right]\log E\left[f^2(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\right]$$

$$\leq 2E\left[\int_0^1\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\,D_rX_{t_i}\right)^2 dr\right].$$

Utilisant l'expression de $D_rX_{t_i}$ fournie par le lemme 1, il s'agit donc de majorer:

$$E\left[\int_0^1\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\,\sigma(X_{t_i})\exp\left[-\int_r^{t_i}\frac{L\sigma-b'\sigma}{\sigma}(X_s)\,ds\right]1_{[0,t_i]}(r)\right)^2 dr\right]$$

qui s'écrit encore (en posant $t_0 = 0$)

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\{\sum_{j=i}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\,\sigma\left(X_{t_j}\right)\exp\left[-\int_r^{t_j}\frac{L\sigma-b'\sigma}{\sigma}(X_s)\,ds\right]\right\}^2 dr\right].$$

Pour ce faire, nous nous inspirons de la démonstration du lemme 4.3 de [8]. Soit $i$ dans $\{1,\ldots,n\}$ et $r$ dans $[t_{i-1},t_i]$. Remarquons que nous pouvons écrire (avec la convention $\sum_{j=i+1}^{n} = 0$ si $i = n$)

$$\sum_{j=i}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\,\sigma\left(X_{t_j}\right)\exp\left[-\int_r^{t_j}\frac{L\sigma-b'\sigma}{\sigma}(X_s)\,ds\right]$$

$$= \left\{\sum_{j=i}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\,\sigma\left(X_{t_j}\right)\right\}\exp\left[-\int_r^{t_i}\frac{L\sigma-b'\sigma}{\sigma}(X_s)\,ds\right]$$

$$+\sum_{j=i+1}^{n}\left\{\exp\left[-\int_r^{t_j}\frac{L\sigma-b'\sigma}{\sigma}(X_s)\,ds\right] - \exp\left[-\int_r^{t_{j-1}}\frac{L\sigma-b'\sigma}{\sigma}(X_s)\,ds\right]\right\}$$

$$\times\left\{\sum_{k=j}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\,\sigma(X_{t_k})\right\}.$$

Il vient

$$\left|\sum_{j=i}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}\right)\sigma\left(X_{t_j}\right)\exp\left[-\int_r^{t_j}\frac{L\sigma-b'\sigma}{\sigma}\left(X_s\right)ds\right]\right|$$

$$\leq \exp(c)\left|\sum_{j=i}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}\right)\sigma\left(X_{t_j}\right)\right|$$

$$+\sum_{j=i+1}^{n}\left|\exp\left[-\int_r^{t_j}\frac{L\sigma-b'\sigma}{\sigma}\left(X_s\right)ds\right]-\exp\left[-\int_r^{t_{j-1}}\frac{L\sigma-b'\sigma}{\sigma}\left(X_s\right)ds\right]\right|$$

$$\times\left|\sum_{k=j}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}\right)\sigma\left(X_{t_k}\right)\right|.$$

De l'égalité

$$\exp\left[-\int_r^{t_j}\frac{L\sigma-b'\sigma}{\sigma}\left(X_s\right)ds\right]-\exp\left[-\int_r^{t_{j-1}}\frac{L\sigma-b'\sigma}{\sigma}\left(X_s\right)ds\right]$$

$$=-\int_{t_{j-1}}^{t_j}\exp\left[-\int_r^{s}\frac{L\sigma-b'\sigma}{\sigma}\left(X_u\right)du\right]\frac{L\sigma-b'\sigma}{\sigma}\left(X_s\right)ds,$$

nous pouvons déduire

$$\left|\exp\left[-\int_r^{t_j}\frac{L\sigma-b'\sigma}{\sigma}\left(X_s\right)ds\right]-\exp\left[-\int_r^{t_{j-1}}\frac{L\sigma-b'\sigma}{\sigma}\left(X_s\right)ds\right]\right|\leq ce^c\left(t_j-t_{j-1}\right),$$

puis

$$\left|\sum_{j=i}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}\right)\sigma\left(X_{t_j}\right)\exp\left[-\int_r^{t_j}\frac{L\sigma-b'\sigma}{\sigma}\left(X_s\right)ds\right]\right|$$

$$\leq e^c\left|\sum_{j=i}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}\right)\sigma\left(X_{t_j}\right)\right|$$

$$+ce^c\sum_{j=i+1}^{n}\left(t_j-t_{j-1}\right)\left|\sum_{k=j}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}\right)\sigma\left(X_{t_k}\right)\right|.$$

Définissons une fonction $g$ sur $[0,t_n]$ en posant $g(t_n)=0$ et, pour tout $j$ dans $\{1,\ldots,n\}$ et tout $v$ dans $[t_{j-1},t_j[$,

$$g(v)=\left|\sum_{k=j}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}\right)\sigma\left(X_{t_k}\right)\right|.$$

Remarquons alors que:

$$\sum_{j=i+1}^{n}\left(t_j-t_{j-1}\right)\left|\sum_{k=j}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}\right)\sigma\left(X_{t_k}\right)\right|=\int_{t_i}^{t_n}g(v)dv.$$

Nous avons ainsi:

$$\left|\sum_{j=i}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\,\sigma\left(X_{t_j}\right)\exp\left[-\int_r^{t_j}\frac{L\sigma-b'\sigma}{\sigma}(X_s)\,ds\right]\right|^2$$

$$\leq 2e^{2c}\left|\sum_{j=i}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\,\sigma\left(X_{t_j}\right)\right|^2+2c^2e^{2c}\left\{\int_{t_i}^{t_n}g(v)dv\right\}^2.$$

$$\leq 2e^{2c}\left|\sum_{j=i}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\,\sigma\left(X_{t_j}\right)\right|^2$$

$$+2c^2e^{2c}\sum_{j=i+1}^{n}(t_j-t_{j-1})\left|\sum_{k=j}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\,\sigma\left(X_{t_k}\right)\right|^2$$

(en utilisant $\left\{\int_{t_i}^{t_n}g(v)dv\right\}^2\leq\int_{t_i}^{t_n}\{g(v)\}^2\,dv$ ).

Nous obtenons finalement la majoration:

$$\left|\sum_{j=i}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\,\sigma\left(X_{t_j}\right)\exp\left[-\int_r^{t_j}\frac{L\sigma-b'\sigma}{\sigma}(X_s)\,ds\right]\right|^2$$

$$\leq 2e^{2c}\left|\sum_{j=i}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\,\sigma\left(X_{t_j}\right)\right|^2$$

$$+2c^2e^{2c}\sum_{j=1}^{n}(t_j-t_{j-1})\left|\sum_{k=j}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\,\sigma\left(X_{t_k}\right)\right|^2.$$

Nous en déduisons:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\{\sum_{j=i}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\,\sigma\left(X_{t_j}\right)\exp\left[-\int_r^{t_j}\frac{L\sigma-b'\sigma}{\sigma}(X_s)\,ds\right]\right\}^2dr$$

$$\leq 2e^{2c}\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\left|\sum_{j=i}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\,\sigma\left(X_{t_j}\right)\right|^2$$

$$+2c^2e^{2c}\sum_{j=1}^{n}(t_j-t_{j-1})\left|\sum_{k=j}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\,\sigma\left(X_{t_k}\right)\right|^2$$

$$\leq 2(c^2+1)e^{2c}\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\left|\sum_{j=i}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\,\sigma\left(X_{t_j}\right)\right|^2.$$

Remarquant que

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\left|\sum_{j=i}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\,\sigma\left(X_{t_j}\right)\right|^2$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\min(t_i,t_j)\sigma(X_{t_i})\,\sigma\left(X_{t_j}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}),$$

nous obtenons la majoration attendue. La proposition est établie. Nous n'avons pas cherché à optimiser la constante dans l'inégalité de la proposition 2.

# 4 Remarques et conclusion

Lorsque l'on considère une diffusion solution d'une équation différentielle stochastique sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, une étude similaire permet de conclure lorsque les champs commutent et sous la condition d'ellipticité. En dimension $d \geq 2$, notre méthode n'est plus appropriée et il est naturel de considérer la diffusion comme vivant sur la variété Riemannienne $\left(\mathbb{R}^d, (\sigma\sigma^*)^{-1}\right)$.

Signalons pour finir que la technique développée dans ce travail permet d'étendre de la même façon l'inégalité isopérimétrique de [4] à la loi d'une diffusion satisfaisant les hypothèses de la proposition 2. Ainsi qu'il est établi en [4], cette inégalité isopérimétrique renforce l'inégalité de Sobolev logarithmique correspondante.

# Références


[1] S. Aida and D. Elworthy, "Logarithmic Sobolev Inequalities on Path and Loop Spaces" (Preprint).

[2] D. Bakry, "L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semi-groupes". Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour. Lecture Notes in Math. 1581, 1-114 (1994), Springer, Berlin Heidelberg New York.

[3] D. Bakry, " On Sobolev and logarithmic Sobolev inequalities for Markov semi-groups", in the Proceedings of the Taniguchi Symposium, Warwick 1994 (à paraître).

[4] D. Bakry, M. Ledoux, "Lévy-Gromov's isoperimetric inequality for an infinite dimensional diffusion generator", *Invent. math. 123, 259-281 (1996).*

[5] Y. Hu, "Itô-Wiener Chaos expansion with exact residual and correlation, variance inequalities"(Preprint).

[6] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, North-Holland, 1981.

[7] D. Nualart, The Malliavin Calculus and Related Topics, Springer 1995.

[8] E. P.Hsu, "Logarithmic Sobolev Inequalities on path spaces over Riemannian manifolds" (Preprint).

[9] F. Y. Wang, "Logarithmic Sobolev Inequalities for diffusion processes with application to path space" (Preprint).

Laboratoire de Statistique et Probabilités
Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex, France
capitain@cict.fr