TAHIR CHOULLI
CHRISTOPHE STRICKER

Séparation d'une sur- et d'une sous-martingale par une martingale

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 32 (1998), p. 67-72
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1998__32__67_0>

SÉPARATION D'UNE SUR- ET D'UNE SOUSMARTINGALE PAR UNE MARTINGALE

Tahir Choulli et Christophe Stricker

Équipe de Mathématiques, URA CNRS 741
Université de Franche-Comté Route de Gray,
25030 Besançon cedex FRANCE

0. Introduction.

Il est désormais bien connu que l'absence d'opportunités d'arbitrage dans un marché financier sans coûts de transactions est essentiellement équivalente à l'existence d'une loi de martingale pour le processus des prix actualisés des actifs de base, c'est-à-dire qu'il existe une loi Q équivalente à la loi initiale P telle que les processus des prix actualisés soient des martingales sous Q.
Lorsque le marché présente des coûts de transactions, ce qui est évidemment plus réaliste, Jouini et Kallal ont montré que le marché était viable si et seulement s'il existait une loi Q équivalente à P telle que les processus des prix actualisés d'achat et de vente puissent être séparés par une Q-martingale.
Dans ce papier nous allons préciser un peu le résultat de Jouini et Kallal en montrant que si X est une surmartingale et Y une sousmartingale vérifiant $\inf_{t\geq 0}(Y_t - X_t) > 0$, alors il existe un processus prévisible λ à variation finie à valeurs dans $[0, 1]$ tel que le processus $Z := X + \lambda(Y - X)$ soit une martingale.
Nous remercions vivement C. Dellacherie pour des discussions fructueuses sur ce sujet, en particulier dans le cas discret.

1. Notations et préliminaires.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, P)$ un espace probabilisé vérifiant les conditions habituelles. On note $\mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{V}^+$) l'ensemble des processus càdlàg adaptés à variation finie (resp. croissants), $\mathcal{P}$ la tribu prévisible et $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}_{loc}$) l'ensemble des martingales (resp. martingales locales).
Si W est une semimartingale, $\mathcal{E}(W)$ désigne l'exponentielle stochastique de W, c'est-à-dire $\mathcal{E}(W)$ est la solution de l'équation différentielle

$$dU = U_- dW, \quad \text{avec } U_0 = 1.$$

Lorsque W est à variation finie, cette exponentielle s'écrit simplement:

$$\mathcal{E}(W) = \mathrm{e}^{W'_t} \prod_{0<s\leq t} (1 + \Delta W_s)$$

où W' est la partie continue de W.

Enfin pour tout processus càdlàg H on pose : $H_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} |H_s|$. Pour plus de détails et pour les notations non expliquées nous renvoyons le lecteur intéressé à Dellacherie/Meyer (1980).
Dans toute la suite de cet article nous désignerons par X une surmartingale et par Y une sousmartingale réelles telles que $X \leq Y$.

2. Cas à variation finie prévisible.
Dans cette partie nous étudions l'existence et l'unicité d'un processus prévisible λ à variation finie et à valeurs dans [0,1] tel que $Z := X + \lambda(Y - X)$ soit une martingale. Nous commençons par un résultat presque trivial mais qui sera utile pour la suite.

Lemme 2.1. Toute martingale locale Z comprise entre X et Y est une martingale.

Démonstration. Comme X est une surmartingale et Y est une sousmartingale, nous avons les inégalités suivantes :

$$E(X_T \mid \mathcal{F}_t) \leq X_t \leq Z_t \leq Y_t \leq E(Y_T \mid \mathcal{F}_t).$$

Ainsi $\{Z_U \ : \ U \leq T$ et U temps d'arrêt $\}$ est uniformément intégrable, si bien que Z est une martingale.

Les décompositions de Doob-Meyer de X et de Y s'écrivent :

$$\begin{cases} X = M - A \\ Y = N + B \end{cases}$$

où $M, N \in \mathcal{M}_{loc}(P)$ et $A, B \in \mathcal{P} \cap \mathcal{V}^+$.
Posons :

$$\begin{cases} S = Y - X \\ C = A + B. \end{cases}$$

Lemme 2.2. Soit λ un processus prévisible à variation finie. Alors $Z = X + \lambda S \in \mathcal{M}_{loc}(P)$ si et seulement si λ est solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad S_- d\lambda = -\lambda dC + dA.$$

Démonstration. D'après la formule d'intégration par parties (voir Dellacherie/Meyer (1980) page 343) on a :

$$dZ = dM + \lambda d(N - M) + S_- d\lambda + \lambda dC - dA,$$

Ainsi Z est une martingale locale si et seulement si l'équation (E) est vérifiée.

Voici le résultat principal de ce paragraphe.

Proposition 2.3. *Supposons que* $\inf_{t \in [0,T]} S_t > 0$. *Alors pour toute v.a.* λ_0 $\mathcal{F}_0$ *mesurable et comprise entre 0 et 1, l'équation* (E) *admet une solution unique* λ *dans* $\mathcal{V} \bigcap \mathcal{P}$ *et à valeurs dans* $[0,1]$. *De plus elle est donnée par :*

$$\lambda = \mathcal{E}(-\frac{1}{{}^p(S)} \cdot C)(\lambda_0 + \frac{1}{\mathcal{E}(-\frac{1}{{}^p(S)} \cdot C)\,{}^p(S)} \cdot A).$$

Par conséquent pour toute v.a. λ_0 $\mathcal{F}_0$ mesurable et comprise entre 0 et 1 il existe une martingale Z et une seule telle que le processus $\lambda := (Z - X)S^{-1}$ appartienne à $\mathcal{V} \bigcap \mathcal{P}$ et soit à valeurs dans $[0,1]$.

Démonstration. Rappelons que la projection prévisible de $S := N - M + C$ est égale à ${}^p(S) := (N - M)_- + C = S_- + \Delta C$ si bien que

$$ {}^p(S)d\lambda + \lambda_- dC = S_- d\lambda + \Delta C d\lambda + \lambda_- dC = S_- d\lambda + \lambda dC. $$

Ainsi l'équation (E) est équivalente à

$$ (E') \qquad {}^p(S)d\lambda = -\lambda_- dC + dA. $$

Puisque ${}^p(S) = \Delta C + S_- \geq S_- \geq \inf_{t \in [0,T]} S_t > 0$, (E') est aussi équivalente à

$$ (E'') \qquad d\lambda = -\frac{\lambda_-}{{}^p(S)} dC + \frac{1}{{}^p(S)} dA. $$

Bien que cette équation soit classique, nous allons détailler sa résolution. Comme $1 - \dfrac{\Delta C}{{}^p(S)} = \dfrac{S_-}{{}^p(S)} > 0$, nous en déduisons que $\mathcal{E}(-\frac{1}{{}^p(S)} \cdot C) > 0$ et par suite son inverse est un processus à variation finie.
Nous procédons par la méthode de la variation de la constante en considérant le processus $\lambda := \mathcal{E}(-\dfrac{1}{{}^p(S)} \cdot C)V$ et en explicitant $V \in \mathcal{P} \cap \mathcal{V}$ pour que λ satisfasse (E').
Par la formule de changement de variable on a

$$ d\lambda = -\lambda_- \frac{1}{{}^p(S)} dC + \mathcal{E}(-\frac{1}{{}^p(S)} \cdot C) dV = -\lambda_- \frac{1}{{}^p(S)} dC + \frac{1}{{}^p(S)} dA, $$

donc

$$ V = \lambda_0 + \frac{1}{\mathcal{E}(-\frac{1}{{}^p(S)} \cdot C)\, {}^p(S)} \cdot A. $$

Nous obtenons alors

$$ \lambda = \mathcal{E}(-\frac{1}{{}^p(S)} \cdot C)(\lambda_0 + \frac{1}{\mathcal{E}(-\frac{1}{{}^p(S)} \cdot C)\, {}^p(S)} \cdot A). $$

Et donc $\lambda \in \mathcal{V} \cap \mathcal{P}$ et $\lambda \geq 0$.
Le processus $\lambda' := 1 - \lambda$ vérifie l'équation ${}^p(S)d\lambda' = -\lambda'_- dC + dB$. Cette équation est du même type que l'équation (E') et $\lambda'_0 \geq 0$, si bien que $\lambda' \geq 0$ et $\lambda \leq 1$.

Remarque 2.4. Lorsque $X = 0$, on retrouve la décomposition multiplicative d'une sousmartingale positive Z telle que Z et Z_- ne s'annulent jamais (voir théorème 2 de Meyer/Yoeurp (1976)).

Nous allons montrer grâce à un contre-exemple que si $\inf_{t \in [0,T]} S_t = 0$, l'équation (E) n'a pas de solution en général, si bien qu'il n'existe pas de processus prévisible λ à variation finie à valeurs dans [0,1] tel que le processus $Z := X + \lambda(Y - X)$ soit une martingale.

Exemple 2.5. Soit $(W_t)_{0\le t\le 1}$ un mouvement brownien unidimensionnel issu de 1, $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le 1}$ sa filtration naturelle et $S := |W|$. La formule de Tanaka nous dit que S s'écrit :

$$S_t = 1 + (\mathrm{sign}(W) \cdot W)_t + L_t^0 = \beta + L_t^0$$

où L^0 est le temps local de W en 0 et β est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien. Puisque $P(L_1^0 > 0) > 0$, il existe $\alpha > 0$ telle que $P(L_1^0 > \alpha) > 0$. Soient

$$T_0 = 0, \quad T_{n+1} = \inf\{1 \ge t > T_n \mid L_t - L_{T_n} > \alpha 2^{-n}\}$$

une suite de temps d'arrêt et

$$f = \sum \frac{1}{\sqrt{n+1}} 1_{[T_{2n}, T_{2n+1}[}$$

un processus prévisible, positif et borné par 1. Posons $X := \beta - f \cdot L^0$ et $Y = 2\beta + (1-f) \cdot L^0$. Ainsi $C = L^0$, $A = f \cdot C$ et l'équation (E) s'écrit :

$$|W| d\lambda = -\lambda dL^0 + f dL^0.$$

En intégrant $\mathbf{1}_{\{W=0\}}$ par rapport aux deux membres de cette équation on obtient que

$$(f - \lambda)\mathbf{1}_{\{W=0\}} dL^0 = 0.$$

Comme L^0 est un processus continu, on a $L^0_{T_{n+1}} - L^0_{T_n} > 0$ sur $\{L_1^0 > \alpha\}$ et la variation de λ ne peut pas être finie sur $\{L_1^0 > \alpha\}$, ce qui est absurde.
Cet exemple montre même plus : il n'existe pas de semimartingale λ avec $0 \le \lambda \le 1$ telle que $Z := X + \lambda S$ soit une martingale. En effet $dZ = dX + \lambda dS + S_- d\lambda$ et la martingale Z qui est une intégrale stochastique par rapport à W en vertu de la propriété de représentation prévisible de W, ne charge pas $\{W = 0\}$, si bien que

$$0 = \mathbf{1}_{\{W=0\}} dZ = (\lambda - f) dL^0.$$

Puisque f n'est pas à variation quadratique bornée, λ ne peut pas être une semimartingale.
Toutefois Jouini et Kallal (1995) ont montré que X et Y peuvent être séparées par une martingale. La proposition suivante montre qu'on peut même choisir une combinaison convexe prévisible de X et Y.

Proposition 2.6. *Soit X une surmartingale, Y une sousmartingale et $X \le Y$. Alors il existe un processus prévisible λ à valeurs dans $[0,1]$ tel que $Z := X + \lambda(Y - X)$ soit une martingale.*

Démonstration. La proposition 2.3 nous dit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un processus prévisible λ^n tel que $Z^n := X + \lambda^n(Y - X + \frac{1}{n})$ est une martingale. Comme $X_T \le Z_T^n \le Y_T - X_T + \frac{1}{n}$, la suite (Z_T^n) est uniformément intégrable, si bien qu'il existe une sous-suite qui converge faiblement dans L^1 vers une variable aléatoire Z_T. Désignons par $\mathcal{C}(Z_T^n, Z_T^{n+1}, \ldots)$ l'enveloppe convexe de $\{Z_T^n, Z_T^{n+1}, \ldots\}$. Il est bien connu qu'on peut choisir une suite (W_T^n) de $\mathcal{C}(Z_T^n, Z_T^{n+1}, \ldots)$ telle que (W_T^n) converge dans L^1 vers Z_T. On en déduit qu'il existe des processus prévisibles μ^n et ϵ^n tels que $0 \leq \mu^n \leq 1$, $0 \leq \epsilon^n \leq \frac{1}{n}$ et pour tout $t \in [0,T]$

$$W_t^n := E(W_T^n|\mathcal{F}_t) = X_t + \mu^n(Y_t - X_t) + \epsilon_t^n.$$

Soit $W_t := E[Z_T|\mathcal{F}_t]$. Le lemme maximal de Doob nous dit que la suite $(W - W^n)_T^*$ converge vers 0 en probabilité. Quitte à prendre une nouvelle sous-suite on peut supposer qu'elle converge p.s. vers 0. On note A l'ensemble prévisible où la limite de la suite (μ^n) existe et on pose $\mu := \lim \mu^n 1_A$. Dans ce cas le processus $X + \mu(Y - X) = W$ est une martingale et la proposition est démontrée.

3. Cas général.

Dans ce paragraphe nous étudions l'existence et l'unicité d'une semimartingale λ à valeurs dans [0,1] telle que $Z := X + \lambda S$ soit une martingale. Soient

$$\begin{cases} \lambda' = \mathcal{E}(-\frac{1}{P(S)} \cdot C)(\frac{1}{\mathcal{E}(-\frac{1}{P(S)} \cdot C)P(S)} \cdot A) \\ \lambda'' = \mathcal{E}(-\frac{1}{P(S)} \cdot C)(1 + \frac{1}{\mathcal{E}(-\frac{1}{P(S)} \cdot C)P(S)} \cdot A) \end{cases}$$

les solutions de l'équation (E) correspondant aux valeurs initiales $\lambda'_0 = 0$ et $\lambda''_0 = 1$.

Proposition 3.1. *Supposons que* $\inf_{t \in [0,T]} S_t > 0$. *Pour toute v.a.* λ_T *vérifiant les inégalités* $\lambda'_T \leq \lambda_T \leq \lambda''_T$, *il existe une et une seule semimartingale* λ *à valeurs dans* $[0,1]$ *telle que* $Z := X + \lambda(Y - X)$. *De plus* λ *est prévisible à variation finie si et seulement s'il existe deux v.a. positives* a *et* b, $\mathcal{F}_0$*-mesurables, telles que* $\lambda_T = a\lambda'_T + b\lambda''_T$ *et* $a + b = 1$.

Démonstration. Le processus $Z := X + \lambda S$ est une martingale si et seulement si $\lambda_t = \dfrac{E(X_T + \lambda_T S_T \mid \mathcal{F}_t) - X_t}{S_t}$. Ainsi λ est unique. Pour l'existence de λ on pose $\lambda_t := \dfrac{E(X_T + \lambda_T S_T \mid \mathcal{F}_t) - X_t}{S_t}$. Ce processus est certainement une semimartingale et de plus les inégalités $\lambda'_T \leq \lambda_T \leq \lambda''_T$ entraînent que $0 \leq \lambda'_t \leq \lambda_t \leq \lambda''_t \leq 1$ $\forall t \in [0,T]$. Enfin la dernière assertion de la proposition 3.1 est une conséquence immédiate de la proposition 2.3.

Remarque 3.2. Lorsque $\lambda_T < \lambda'_T$ p.s. (resp. $\lambda_T > \lambda''_T$ p.s.), il n'existe pas de semimartingale λ à valeurs dans $[0,1]$ telle que $Z := X + \lambda(Y - X)$ soit une martingale. En effet si $\lambda_T < \lambda'_T$ p.s. (resp. $\lambda_T > \lambda''_T$ p.s.) , la démonstration de la proposition 3.1 nous dit que $\lambda'_0 < \lambda_0 = 0$ (resp. $\lambda''_0 > \lambda_0 = 1$) , ce qui est absurde.

Références.

C. Dellacherie et P.A. Meyer (1980) "Probabilités et Potentiel", chapitre V à VIII, Hermann.

J. Jacod (1979) "Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales", LN 714, Springer Verlag.

E. Jouini et H. Kallal (1995) "Martingales and Arbitrage in Securities Markets with Transaction Costs", Journal of Econ. Theory, 54, p. 259-304.

P.A. Meyer et C. Yoeurp (1976) " Sur la décomposition multiplicative de sousmartingales positives", Séminaire de Probabilités X, LN 511, p. 501-504, Springer Verlag.