SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN BERTOIN
LAURENCE MARSALLE

Point le plus visité par un mouvement brownien avec dérive

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 32 (1998), p. 397-411
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1998__32__397_0>

Point le plus visité par un mouvement brownien avec dérive.

Jean Bertoin et Laurence Marsalle
Laboratoire de Probabilités, Université Pierre et Marie Curie,
4 Place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France

1 Introduction et principaux résultats

Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien réel, et $(\ell_t^x, t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ la famille bicontinue de ses temps locaux. Le processus $(\overline{V}_t, t \geq 0)$ défini pour tout $t \geq 0$ par

$$\overline{V}_t := \inf\{x \geq 0 : \ell_t^x \vee \ell_t^{-x} = \sup\{\ell_t^y : y \in \mathbb{R}\}\}$$

représente, en valeur absolue, le point le plus visité par B sur l'intervalle de temps $[0, t]$. Bass et Griffin [1] ont montré qu'il était transient, et ont également obtenu une loi du logarithme itéré

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{\overline{V}_t}{(2t \log\log t)^{1/2}} = 1 \ p.s.$$

Voir également Eisenbaum [3] et Leuridan [4] pour des travaux proches.

Nous nous intéressons ici au point le plus visité par un mouvement brownien réel avec coefficient de dérive $\mu > 0$, $(X_t = B_t + \mu t, t \geq 0)$. Considérons le processus continu des densités d'occupation $(\ell^x, x \in \mathbb{R})$, où

$$\ell^x := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{x \leq X_t \leq x+\varepsilon\}} dt,$$

puis définissons le point le plus visité par X sur l'intervalle d'espace $[0, y]$

$$V(y) := \inf\{x \geq 0 : \ell^x = m_y\}, \quad \text{avec } m_y = \max\{\ell^x : 0 \leq x \leq y\}.$$

Notons encore que, comme $(\ell^x, x \leq 0)$ est borné et $\sup\{\ell^x : x \geq 0\} = +\infty$, $V(y)$ est également le point de $(-\infty, y]$ le plus visité par X, pourvu que y soit assez grand. L'objet principal de ce travail est d'établir les deux résultats asymptotiques suivants.

Proposition 1.1
$V(y)/y$ converge en distribution vers la loi uniforme sur $[0, 1]$ quand y tend vers $+\infty$.

Théorème 1.2
Soit $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *une fonction croissante. Alors*

$$\liminf_{y \to +\infty} \frac{V(y)f(y)}{y} = 0 \quad ou \quad +\infty \ p.s.$$

selon que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{tf(t)}$ *diverge ou converge.*

Remarque : Il est facile de voir que $V(y) \leq y$ pour tous les $y \geq 0$, et que $V(y) = y$ pour certains y arbitrairement grands. En effet, si H_n désigne le temps d'atteinte par $(\ell^x, x \geq 0)$ du niveau n, alors pour tout $n \geq 1$, $V(H_n) = H_n$. C'est la raison pour laquelle on ne regarde que le comportement de la limite inférieure.

Ce papier est organisé de la façon suivante. La deuxième partie est consacrée à l'étude de $(\ell^x, x \geq 0)$, qui, d'après un théorème de Ray-Knight, est une diffusion récurrente positive. La théorie des excursions d'Itô ramène alors l'étude de $V(y)$ à celle des temps de record d'un processus de Poisson ponctuel. Dans la troisième partie, nous précisons le comportement asymptotique du point où un processus de Poisson ponctuel réalise son maximum, ce qui nous permet dans la quatrième partie de prouver les résultats énoncés ci-dessus. Enfin, la cinquième partie contient quelques résultats supplémentaires sur le comportement asymptotique du point le moins visité par X, ainsi que sur le point le plus visité par X sur l'intervalle de temps $[0, t]$, qui est défini de façon analogue à celle de Bass et Griffin pour le mouvement brownien.

2 Préliminaires

2.1 Processus des densités d'occupation

Nous commençons par rappeler que, d'après un théorème de type Ray-Knight, $(\ell^x, x \geq 0)$ a la loi du carré d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck plan de paramètre μ (voir par exemple Borodin et Salminen [2], page 78). Le processus $(\ell^x, x \geq 0)$ est en particulier une diffusion ergodique, le point 1 est régulier et récurrent. Le processus markovien $(\ell^x, x \geq 0)$ admet donc un temps local en 1.
Nous savons d'autre part que le carré d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck plan de paramètre μ admet pour probabilité invariante la loi exponentielle de paramètre μ, qu'on note m. Nous notons L le temps local en 1 normalisé par $\mathbb{E}_m[L_1] = 1$, où $\mathbb{E}_m$ désigne la loi du carré d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck plan sous la loi initiale m. Cette normalisation entraîne que la mesure associée à la fonctionnelle additive L est la masse de Dirac en 1 (cf. Revuz et Yor [7], chapitre X, section 2), et le théorème ergodique pour les fonctionnelles additives (cf. Revuz et Yor [7], chapitre X, section 3) donne $\lim_{t \to +\infty} L_t/t = 1$ *p.s.*
Au temps local L on associe son inverse continu à droite

$$\lambda_u := \inf\{t > 0 : L_t > u\}, \qquad u \geq 0.$$

On a immédiatement

$$\lim_{t\to+\infty} \lambda_t/t = 1 \ p.s. \tag{1}$$

Pour simplifier, nous travaillerons conditionnellement à $\ell^0 = 1$, et étudierons les excursions du processus des temps locaux en dehors de 1. Ceci se généralise *mutis mutandi* à $\ell^0 = y$, pour $y > 0$, en considérant les excursions en dehors de y. Rappelons d'abord la définition du processus des excursions de $(\ell^x, x \geq 0)$ en dehors de 1. On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des fonctions continues $u : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ telles que

$$0 < H(u) < +\infty \quad \text{et} \quad u(t) = 1 \quad \text{pour tout } t \geq H(u),$$

où $H(u) := \inf\{t > 0 : u(t) = 1\}$. Par abus, on note 1 la fonction identiquement égale à 1. Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$e_t = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_{t-} = \lambda_t \\ (\ell^{\lambda_{t-}+s}, 0 \leq s < \lambda_t - \lambda_{t-}) & \text{si } \lambda_t > \lambda_{t-}. \end{cases}$$

D'après la théorie des excursions d'Itô (voir par exemple Rogers et Williams [8], chapitre VI, section 8), nous savons que le processus $(e_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson ponctuel à valeurs dans $\mathcal{U} \cup \{1\}$. Notons n sa mesure caractéristique (mesure d'Itô).

Soit maintenant $x > 1$, nous considérons

$$\mathcal{U}^x := \{u \in \mathcal{U} : \sup_{t\geq 0} u(t) > x\},$$

l'ensemble des excursions de hauteur supérieure à x. On sait alors qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$n(\mathcal{U}^x) = \frac{c}{s(x)},$$

où s désigne une fonction d'échelle du processus $(\ell^x, x \geq 0)$ satisfaisant $s(1) = 0$ (cf. Pitman et Yor [5], section 3). La fonction d'échelle étant continue, et comme $s(+\infty) = +\infty$, il existe une hauteur $h > 1$ telle que $n(\mathcal{U}^h) = 1$.

Pour tout $t \geq 0$, on définit alors γ_t de la façon suivante :

- Si $\lambda_{t-} = \lambda_t$, alors $\gamma_t = 0$.
- Si $\lambda_t > \lambda_{t-}$, alors

$$\gamma_t = \begin{cases} 0 & \text{si } e_t \notin \mathcal{U}^h \\ \sup\{e_t(s) : 0 \leq s < \lambda_t - \lambda_{t-}\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On déduit immédiatement le lemme suivant.

Lemme 2.1
Le processus $(\gamma_t, t \geq 0)$ *est un processus de Poisson ponctuel discret à valeurs dans* $[0, +\infty)$, *dont la mesure caractéristique est diffuse et a une masse totale égale à* 1.

2.2 Temps de record d'un processus de Poisson ponctuel

Soit $(Y, \mathbb{P})$ un processus de Poisson ponctuel discret à valeurs dans $[0, +\infty)$, de mesure caractéristique une loi de probabilité ν qu'on suppose diffuse. Le point 0 est pris comme point isolé. On note $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ la filtration naturelle du processus Y et on définit l'opérateur de translation θ de la façon usuelle : pour tout $t \geq 0$, pour tout $s \geq 0$,

$$(\theta_t Y)_s := Y_{t+s}.$$

On introduit également la loi du processus issu de x, $\mathbb{P}^x$, définie comme la loi Y^x, où

$$Y^x := \begin{cases} x & \text{si } t = 0 \\ Y_t & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Ceci nous permet d'énoncer la propriété forte de Markov sous la forme suivante. Soit T un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt, H une fonctionnelle du processus Y, alors

$$\mathbb{E}(H \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_T) = \mathbb{E}^{Y_T}(H).$$

Notre but est d'obtenir des renseignements sur le comportement asymptotique de l'instant en lequel Y réalise son maximum sur l'intervalle $[0, t]$

$$G_t = \inf\{s \geq 0 : M_s = M_t\}, \qquad \text{avec } M_t = \max\{Y_s : 0 \leq s \leq t\}. \tag{2}$$

Afin d'obtenir des résultats trajectoriels, nous introduisons la notion de *temps de record* du processus Y. On dit que le processus Y présente un *record* à l'instant t si Y_t dépasse toutes les valeurs précédentes du processus, i.e. $Y_t > M_{t-}$. Nous notons $T = (T_n, n \geq 0)$ la suite des *temps de record* de Y, définie par $T_0 = 0$ et pour $n \geq 1$ par

$$T_n = \inf\{t > T_{n-1} : Y_t > M_{T_{n-1}}\}.$$

L'intérêt de cette notion pour l'étude de G_t repose sur le fait que $G_t = T_n$ pour tout $t \in [T_n, T_{n+1})$.

Il est bien connu que la loi de la suite des temps de record ne dépend pas de la loi caractéristique du processus Y. Plus précisément, si Y' est un second processus de Poisson ponctuel dont la mesure caractéristique est également une loi de probabilité diffuse sur $[0, +\infty)$, alors la suite des temps de record de Y' a même loi que celle de Y.

Pour étudier les temps de record du processus Y, nous pouvons donc nous ramener au cas où

$$\nu(dx) = e^{-x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} dx.$$

Le choix de la loi exponentielle est motivée par la propriété d'absence de mémoire de cette loi, ce qui va nous permettre de préciser la structure des records (voir les propositions 4.1 et 4.8 dans Resnick [6] pour des résultats très proches). Plus précisément, introduisons

$$R_n := Y_{T_n}, \qquad n \geq 0$$

la suite des records de Y, ainsi que celle des inter-records

$$\Delta_n = T_{n+1} - T_n\,, \qquad n \geq 0.$$

Notons que $T_n = \Delta_0 + \cdots + \Delta_{n-1}$.

Proposition 2.2
(i) La suite $(R_n, n \geq 0)$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{R}_+$, de pas la loi exponentielle de paramètre 1.
(ii) Conditionnellement à $R_0, R_1, \ldots, R_n$, les variables aléatoires $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ sont indépendantes et suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs $1, \mathrm{e}^{-R_1}, \ldots, \mathrm{e}^{-R_n}$.

Preuve : Elle repose essentiellement sur la propriété forte de Markov que nous allons appliquer au $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt T_n. Ecrivons d'abord

$$T_{n+1} = T_n + T_1 \circ \theta_{T_n},$$

où nous rappelons que $T_1 = \inf\{t > 0 : Y_t > Y_0\}$. Ceci entraîne les deux identités suivantes

$$R_{n+1} - R_n = (Y_{T_1} - Y_0) \circ \theta_{T_n} \quad , \quad \Delta_n = T_1 \circ \theta_{T_n}.$$

On déduit de la propriété de Markov des processus de Poisson ponctuels que, si on pose $Y_{T_n} = y$, alors

$$\mathbb{P}(R_{n+1} - R_n \in dx,\ \Delta_n \in dt \mid \mathcal{F}_{T_n}) = \mathbb{P}^y(R_1 - y \in dx,\ T_1 \in dt) = \mathbb{P}^y(R_1 - y \in dx)\mathbb{P}^y(T_1 \in dt)$$

(en utilisant pour la dernière égalité le fait que l'instant du premier saut d'un processus de Poisson ponctuel est indépendant de la valeur de ce saut).
Or nous savons (voir par exemple Revuz et Yor [7], chapitre XII, section 1) d'une part que

$$\mathbb{P}^y(R_1 - y \in dx) = \mathrm{e}^{-x} 1\!\!1_{\{x>0\}} dx,$$

et d'autre part que

$$\mathbb{P}^y(T_1 \in dt) = \mathrm{e}^{-y} \exp\{-\mathrm{e}^{-y} t\} 1\!\!1_{\{t \geq 0\}} dt,$$

et on peut alors compléter la preuve par récurrence.

Corollaire 2.3
La suite des inter-records $(\Delta_n, n \geq 0)$ admet la représentation

$$\Delta_n = \mathrm{e}^{R_n} Z_n\,, \qquad n \geq 0,$$

où $(Z_n, n \geq 0)$ est une suite de variables i.i.d., de loi exponentielle de paramètre 1, et indépendante de la suite $(R_n, n \geq 0)$.

Preuve : Posons $Z_n = \mathrm{e}^{-R_n}\Delta_n$ pour tout $n \geq 0$. D'après la proposition 2.2 (ii), nous savons que conditionnellement à $R_1, \ldots, R_n$, les variables $Z_1, \ldots, Z_n$ sont indépendantes, et de plus nous pouvons calculer leur loi conditionnelle : soit h borélienne, i compris entre 1 et n fixé,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(Z_i) \mid R_1, \ldots, R_n] &= \mathbb{E}[h(\mathrm{e}^{-R_i}\Delta_i) \mid R_1, \ldots, R_n] \\ &= \int_0^{+\infty} h(\mathrm{e}^{-R_i}x)\mathrm{e}^{-R_i} \exp\{-x\mathrm{e}^{-R_i}\}dx \\ &= \int_0^{+\infty} h(u)\mathrm{e}^{-u}du. \end{aligned}$$

Le corollaire est établi. □

3 Comportement asymptotique du dernier temps de record

Rappelons que G_t, le dernier temps de record sur l'intervalle de temps $[0, t]$, a été défini par l'équation (2). On connaît explicitement la loi de G_t. Si $M_t = 0$ (évènement de probabilité e^{-t}), alors $G_t = 0$, et conditionnellement à $M_t > 0$, G_t suit une loi uniforme sur $[0, t]$. On a donc

$$\mathbb{P}(G_t/t \leq u) = (1 - \mathrm{e}^{-t})u + \mathrm{e}^{-t}, \qquad 0 \leq u \leq 1, \tag{3}$$

ce qui entraîne immédiatement le lemme suivant.

Lemme 3.1
G_t/t converge en distribution vers la loi uniforme sur $[0,1]$ quand t tend vers $+\infty$.

Les résultats sur les temps de record nous permettent d'étudier le comportement trajectoriel de G_t; nous commençons par établir un lemme technique.

Lemme 3.2
Pour tout $\beta > 2$, on a $\mathbb{P}(T_{n+1} \leq \beta \mathrm{e}^{R_n}) \geq (1 - 2/\beta)$.

Preuve : Elle repose sur l'inégalité de Markov. Nous avons, grâce à la proposition 2.2 et au corollaire 2.3,

$$\mathbb{E}[T_{n+1}\mathrm{e}^{-R_n}] = \sum_0^n \mathbb{E}[\Delta_k \mathrm{e}^{-R_n}] = \sum_0^n \mathbb{E}[\mathrm{e}^{R_k - R_n} Z_k] = \sum_0^n \mathbb{E}[\exp(-R_1)]^{n-k} = \sum_0^n 2^{-k}.$$

Il suffit alors d'écrire que

$$\mathbb{P}(T_{n+1}\mathrm{e}^{-R_n} \geq \beta) \leq (1/\beta)\mathbb{E}[T_{n+1}\mathrm{e}^{-R_n}] \leq 2/\beta,$$

et le lemme est prouvé. □

Dans le but d'obtenir un test intégral pour G_t, nous allons considérer la suite des évènements

$$\Lambda_n^{(\beta)} = \{T_{n+1} \leq \beta e^{R_n},\ \Delta_{n+1} \geq \beta f(e^{2n}) e^{R_n}\}, \qquad n \geq 0$$

où $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ est une fonction croissante et $\beta > 2$.

Lemme 3.3
Si l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{tf(t)}$ *diverge, alors pour tout* $\beta > 2$,

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \to +\infty} \Lambda_n^{(\beta)}) \geq (1 - 2/\beta)^2.$$

Preuve : Nous allons utiliser une version généralisée du lemme de Borel-Cantelli (cf. Spitzer [9] page 317); nous commençons donc par évaluer $\mathbb{P}(\Lambda_n^{(\beta)})$. Nous utilisons le corollaire 2.3 pour écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Lambda_n^{(\beta)}) &= \mathbb{P}(T_{n+1} \leq \beta e^{R_n},\ e^{R_{n+1}} Z_{n+1} \geq \beta f(e^{2n}) e^{R_n}) \\
&= \mathbb{P}(T_{n+1} \leq \beta e^{R_n},\ e^{R_{n+1} - R_n} Z_{n+1} \geq \beta f(e^{2n})) \\
&= \mathbb{P}(T_{n+1} \leq \beta e^{R_n}) \mathbb{P}(e^{R_1} Z_1 \geq \beta f(e^{2n})).
\end{aligned}$$

Le lemme 3.1 nous permet de minorer le premier terme du produit, regardons le second. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(e^{R_1} Z_1 \geq \beta f(e^{2n})) &= \mathbb{P}(R_1 \geq \log \beta + \log(f(e^{2n})) - \log(Z_1)) \\
&= \int_0^{+\infty} \exp\{\log x - \log \beta - \log(f(e^{2n}))\} e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{\beta f(e^{2n})} \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{\beta f(e^{2n})}.
\end{aligned}$$

On a donc obtenu la minoration

$$\mathbb{P}(\Lambda_n^{(\beta)}) \geq \frac{(1 - 2/\beta)}{\beta f(e^{2n})}. \tag{4}$$

On vérifie ensuite que la série de terme général $1/f(e^{2n})$ et l'intégrale $\int^{+\infty} dt/tf(t)$ sont de même nature. Ceci découle simplement du fait que la fonction f est croissante, donc

$$\frac{(1 - 1/e)}{f(e^{2(k+1)})} \leq \int_{e^k}^{e^{k+1}} \frac{dt}{tf(t^2)} \leq \frac{(e - 1)}{f(e^{2k})},$$

et du fait que les intégrales $\int^{+\infty} dt/tf(t)$ et $\int^{+\infty} dt/tf(t^2)$ sont de même nature. En conclusion, la série $\sum_0^{+\infty} \mathbb{P}(\Lambda_n^{(\beta)})$ diverge.

Pour pouvoir utiliser la version généralisée du lemme de Borel-Cantelli, nous allons montrer que pour $|n - m| \geq 2$,

$$\mathbb{P}(\Lambda_n^{(\beta)} \cap \Lambda_m^{(\beta)}) \leq (\beta/(\beta - 2))^2 \mathbb{P}(\Lambda_n^{(\beta)}) \mathbb{P}(\Lambda_m^{(\beta)}).$$

Pour cela, on écrit d'abord

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Lambda_n^{(\beta)} \cap \Lambda_m^{(\beta)}) &= \mathbb{P}\left(T_{n+1} \leq \beta e^{R_n},\, T_{m+1} \leq \beta e^{R_m},\, \Delta_{n+1} \geq \beta f(e^{2n}) e^{R_n},\, \Delta_{m+1} \geq \beta f(e^{2m}) e^{R_m}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\Delta_{n+1} \geq \beta f(e^{2n}) e^{R_n},\, \Delta_{m+1} \geq \beta f(e^{2m}) e^{R_m}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(e^{(R_{n+1}-R_n)} Z_{n+1} \geq \beta f(e^{2n})\right) \mathbb{P}\left(e^{(R_{m+1}-R_m)} Z_{m+1} \geq \beta f(e^{2m})\right),
\end{aligned}$$

car la condition d'écartement sur n et m nous assure l'indépendance des deux évènements considérés. Leurs probabilités ont déjà été calculées ci-dessus, ce qui entraîne

$$\mathbb{P}(\Lambda_n^{(\beta)} \cap \Lambda_m^{(\beta)}) \leq \frac{1}{\beta f(e^{2n})} \times \frac{1}{\beta f(e^{2m})},$$

et pour conclure on utilise le fait que, d'après (4), pour tout $n \geq 0$

$$\frac{1}{\beta f(e^{2n})} \leq (\beta/(\beta-2)) \mathbb{P}(\Lambda_n^{(\beta)}),$$

ce qui donne la majoration voulue. Le lemme de Borel-Cantelli généralisé complète la preuve.

□

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et de prouver un test intégral sur le comportement asymptotique de G_t.

Théorème 3.4
Soit $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *une fonction croissante. Alors*

$$\liminf_{t \to +\infty} \frac{G_t f(t)}{t} = 0 \quad ou \quad +\infty \ p.s.$$

selon que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t f(t)}$ *diverge ou converge.*

Preuve : Nous commençons par supposer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} dt/tf(t)$ converge. Notre but est d'appliquer le lemme de Borel-Cantelli. Par commodité, nous introduisons $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, définie par $g(t) = tf(t)$. La fonction g étant strictement croissante, nous lui associons sa fonction réciproque, φ. Grâce à (3), nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G_{2^n} f(G_{2^n}) \leq 2^{n+1}) &= \mathbb{P}(G_{2^n} \leq \varphi(2^{n+1})) \\
&\leq 2^{-n}(1 - e^{-2^n})\varphi(2^{n+1}) + e^{-2^n} \\
&\leq 2^{-n}\varphi(2^{n+1}) + e^{-2^n}.
\end{aligned}$$

On note ensuite que

$$\sum_0^{+\infty} \frac{\varphi(2^{n+1})}{2^n} = 8 \sum_0^{+\infty} \frac{\varphi(2^{n+1})}{2^{n+3}} \leq 8 \sum_0^{+\infty} \int_{2^{n+1}}^{2^{n+2}} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = 8 \int_2^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt.$$

Etudions la convergence de l'intégrale de droite :

$$\int^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}dt = \int^{+\infty} \frac{u}{g(u)^2}dg(u) = \int^{+\infty} \frac{du}{uf(u)} + \int^{+\infty} \frac{df(u)}{f(u)^2}.$$

Le premier terme de la somme est fini par hypothèse. Le second l'est également, car, f étant croissante et l'intégrale $\int_1^{+\infty} du/uf(u)$ convergente, on a nécessairement $\lim_{+\infty} f = +\infty$. On en déduit la convergence de la série $\sum_0^{+\infty}(2^{-n}\varphi(2^{n+1}) + e^{-2^n})$, le lemme de Borel-Cantelli entraîne qu'avec probabilité 1 il existe n_0 tel que $G_{2^n}f(G_{2^n}) > 2^{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$.

Un argument standard de monotonie entraîne alors $\liminf_{t\to+\infty} G_t f(t)/t \geq 1$. Comme le résultat du test intégral est inchangé quand on remplace f par εf, où ε est un réel positif arbitraire, on conclut que

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{G_t f(t)}{t} = +\infty.$$

On suppose maintenant que l'intégrale $\int_1^{+\infty} dt/tf(t)$ diverge. On introduit $\tilde{f}(x) = f(x^2)$. La fonction $\tilde{f}$ est croissante et l'intégrale $\int_1^{+\infty} dt/t\tilde{f}(t)$ diverge. Posons

$$\Lambda_n^{(\beta)}(\tilde{f}) = \left\{T_{n+1} \leq \beta e^{R_n},\ \Delta_{n+1} \geq \beta \tilde{f}(e^{2n})e^{R_n}\right\};$$

nous allons montrer que pour tout $\beta > 2$ fixé,

$$\limsup_{n\to+\infty} \Lambda_n^{(\beta)}(\tilde{f}) \subset \left\{\liminf_{t\to+\infty} \frac{G_t f(t)}{t} \leq 1\right\}. \tag{5}$$

Nous travaillons avec ω fixé appartenant à $\limsup_{+\infty} \Lambda_n^{(\beta)}(\tilde{f})$. Il existe donc une suite $(n_k, k \geq 0)$ d'entiers tendant vers $+\infty$ telle que pour tout $k \geq 0$:

$$T_{n_k+1} \leq \beta e^{R_{n_k}},\ \ \Delta_{n_k+1} \geq \beta \tilde{f}(e^{2n_k})e^{R_{n_k}}.$$

D'après la loi forte des grands nombres et la proposition 2.2 (i), $R_n/n \to 1$ *p.s.* et nous pouvons supposer que $\beta e^{R_{n_k}} \leq e^{2n_k}$ pour tout $k \geq 0$.
Nous en déduisons la série d'inégalités suivantes

$$T_{n_k+2} > \Delta_{n_k+1} \geq \beta\tilde{f}(e^{2n_k})e^{R_{n_k}} \geq \beta\tilde{f}(\beta e^{R_{n_k}})e^{R_{n_k}} \geq \tilde{f}(T_{n_k+1})T_{n_k+1}.$$

Ensuite, on remarque que pour tout $t \in [T_{n_k+1}, T_{n_k+2}[$, $G_t = T_{n_k+1}$, et *a fortiori* $G_t\tilde{f}(G_t) < t$, quitte à prendre t suffisamment proche de T_{n_k+2}. Plus précisément, pour tout $k \geq 0$, il existe un réel $t_k \in [T_{n_k+1}, T_{n_k+2}[$ tel que

$$G_{t_k}\tilde{f}(G_{t_k}) \leq t_k.$$

Mais d'après la première partie de la preuve, nous savons que $\lim_{t \to +\infty} G_t/\sqrt{t} = +\infty$ *p.s.* Il existe donc k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$,

$$G_{t_k} \geq \sqrt{t_k} \quad \text{et en conséquence} \quad \tilde{f}(G_{t_k}) \geq \tilde{f}(\sqrt{t_k}) = f(t_k).$$

Ainsi $G_{t_k} f(t_k) \leq t_k$ pour tout $k \geq k_0$, ce qui établit (5).

En combinant (5), le lemme 3.3 et le fait que β peut être choisi arbitrairement grand, on obtient que $\liminf_{t \to +\infty} G_t f(t)/t \leq 1$ *p.s.* Le résultat du test intégral n'étant pas modifié lorsqu'on remplace la fonction f par f/ε, où $\varepsilon > 0$ est un réel arbitraire, on en déduit que $\liminf_{t \to +\infty} G_t f(t)/t = 0$ *p.s.* Le théorème est prouvé. □

4 Preuve des résultats

Nous allons appliquer les résultats obtenus dans la partie 3 au processus de Poisson ponctuel $Y = \gamma$ introduit dans la section 2.1. Nous rappelons que, pour simplifier, on travaille conditionnellement à $\ell^0 = 1$, et que λ désigne l'inverse de L, le temps local au niveau 1 de ℓ.

Lemme 4.1
Sur $\{G_y \neq 0\}$, *nous avons l'encadrement*

$$\lambda_{G_y -} \leq V(\lambda_y) \leq \lambda_{G_y}.$$

Preuve : Regardons l'information que donne G_y.
• Si $G_y = 0$, alors le processus $(\ell^x, x \geq 0)$ est resté sous le niveau h sur l'intervalle $[0, \lambda_y]$.
• Si $G_y = x > 0$, alors le supremum de $\{\ell^v : 0 \leq v \leq \lambda_y\}$ est réalisé sur l'intervalle de temps $[\lambda_{x-}, \lambda_x]$, ce qui revient exactement à dire que

$$\lambda_{G_y -} \leq V(\lambda_y) \leq \lambda_{G_y},$$

le lemme est donc prouvé. □

Par la suite, nous utiliserons implicitement le fait que $\lim_{y \to +\infty} G_y = +\infty$ *p.s.*, de sorte que l'hypothèse du lemme 4.1 est vérifiée dès que y est suffisamment grand.
Nous allons maintenant nous servir du fait que $\lambda_t \sim t$ quand $t \to +\infty$, et de l'encadrement du lemme 4.1 pour montrer la proposition 1.1.

Preuve de la proposition 1.1 : Lorsque $t \to +\infty$, $G_t \to +\infty$ et $\lambda_t/t \to 1$ (d'après (1)), ce qui entraîne la convergence en probabilité de λ_{G_t}/G_t et $\lambda_{G_t -}/G_t$ vers 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe t_0 tel que pour tout $t \geq t_0$

$$\mathbb{P}(|\lambda_t/t - 1| > \varepsilon) \leq \varepsilon, \quad \mathbb{P}(|\lambda_{G_t}/G_t - 1| > \varepsilon) \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(|\lambda_{G_t -}/G_t - 1| > \varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, nous savons que $\mathbb{P}(G_t = 0) = e^{-t}$, nous pouvons donc supposer que pour tout $t \geq t_0$, $\mathbb{P}(G_t = 0) \leq \varepsilon$. Ceci nous permet alors d'écrire l'inégalité suivante : pour tout $\beta \in [0,1]$, pour tout $t \geq t_0$,

$$\mathbb{P}(V(t)/t \leq \beta) \leq \mathbb{P}(\{V(t)/t \leq \beta\} \cap \{|\lambda_t/t - 1| \leq \varepsilon\} \cap \{|\lambda_{G_t-}/G_t - 1| \leq \varepsilon\} \cap \{G_t \neq 0\}) + 3\varepsilon.$$

Fixons $\omega \in \{|\lambda_t/t - 1| \leq \varepsilon\} \cap \{|\lambda_{G_t-}/G_t - 1| \leq \varepsilon\} \cap \{G_t \neq 0\}$. Alors

$$V((1+\varepsilon)t) \geq V(\lambda_t) \geq \lambda_{G_t-} \geq (1-\varepsilon)G_t,$$

ce qui donne, si on ne garde plus que les deux extrémités des inégalités

$$\frac{V((1+\varepsilon)t)}{(1+\varepsilon)t} \geq \frac{(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)} \frac{G_t}{t}.$$

On pose alors $u = (1+\varepsilon)t$, donc pour tout $u \geq (1+\varepsilon)t_0$

$$\frac{V(u)}{u} \geq (1-\varepsilon) \frac{G_{u/(1+\varepsilon)}}{u}.$$

Ainsi, pour tout $\beta \in [0,1]$

$$\mathbb{P}(V(u)/u \leq \beta) \leq \mathbb{P}\left(\frac{G_{u/(1+\varepsilon)}}{u/(1+\varepsilon)} \leq \beta \frac{(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)}\right) + 3\varepsilon,$$

ce qui entraîne d'après le lemme 3.1 que pour tout $\beta \in [0,1]$, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{u \to +\infty} \mathbb{P}(V(u)/u \leq \beta) \leq \beta \frac{(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} + 3\varepsilon,$$

et finalement $\limsup_{u \to +\infty} \mathbb{P}(V(u)/u \leq \beta) \leq \beta$.
Pour obtenir la minoration de la limite inférieure, il suffit de procéder de manière analogue en considérant cette fois-ci $\mathbb{P}(V(u)/u > \beta)$. Ceci termine la preuve de la proposition. □

Preuve du théorème 1.2 : Nous commençons par supposer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} dt/tf(t)$ diverge, ce qui équivaut à la divergence de $\int_1^{+\infty} dt/tf(t/2)$. Le théorème 3.4 donne

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{t \to +\infty} \frac{G_t f(t/2)}{t} = 0\right) = 1.$$

On fixe alors ω dans $\{\lim_{t \to +\infty} \lambda_t/t = 1\} \cap \{\liminf_{t \to +\infty} G_t f(t/2)/t = 0\}$, évènement de probabilité 1. Pour tout $\eta > 0$, on peut choisir t arbitrairement grand tel que

$$\frac{G_t f(t/2)}{t} \leq \eta \quad , \quad |\frac{\lambda_t}{t} - 1| \leq 1/2 \quad \text{et} \quad |\frac{\lambda_{G_t}}{G_t} - 1| \leq 1.$$

Grâce au lemme 4.1, ceci entraîne

$$V(t/2) \leq V(\lambda_t) \leq \lambda_{G_t} \leq 2G_t,$$

et donc
$$\frac{V(t/2)f(t/2)}{t/2} \leq 4\frac{G_t f(t/2)}{t} \leq 4\eta.$$

Nous avons ainsi établi que $\liminf_{t\to+\infty} V(t)f(t)/t = 0$ avec probabilité 1.

On suppose ensuite que l'intégrale $\int_1^{+\infty} dt/tf(t)$ converge. La convergence de $\int_1^{+\infty} dt/tf(2t)$ en découle, et ainsi, d'après le théorème 3.4,

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\to+\infty} \frac{G_t f(2t)}{t} = +\infty\right) = 1.$$

Comme précédemment, on fixe $\omega \in \{\lim_{t\to+\infty} G_t f(2t)/t = +\infty\}$. Alors pour tout $A > 0$ et tout t suffisamment grand

$$\frac{G_t f(2t)}{t} \geq A,\ |\frac{\lambda_t}{t} - 1| \leq 1 \text{ et } |\frac{\lambda_{G_t-}}{G_{t_k}} - 1| \leq 1/2.$$

En conséquence $V(2t) \geq V(\lambda_t) \geq \lambda_{G_t-} \geq (1/2)G_t$, et donc $V(2t)f(2t)/t \geq A/2$; la preuve du théorème est complète. □

5 Quelques compléments

5.1 Point le moins visité

Si on définit le point le moins visité par X sur $[0, y]$,

$$v(y) := \inf\{x \geq 0 : \ell^x = \min_{0\leq u\leq y} \ell^u\},$$

nous pouvons adapter la méthode utilisée pour l'étude de $V(y)$ à celle de $v(y)$. On considère les excursions de $(\ell^x, x \geq 0)$ en-dessous de 1, il existe une hauteur $h' \in (0,1)$ telle que
$$n(u \in \mathcal{U} : \inf_{t\geq 0} u(t) < h') = 1.$$

On définit un nouveau processus de Poisson ponctuel, γ', de façon analogue à γ. Nous pouvons alors appliquer les résultats de la partie 3 à γ', puis passer à $v(y)$.
D'autre part, les processus des excursions au-dessus et en-dessous de 1 étant indépendants, γ et γ' sont indépendants. Ceci nous permet de renforcer la proposition 1.1 et le théorème 1.2 de la façon suivante.

Proposition 5.1
Le couple $(V(y)/y, v(y)/y)$ converge en distribution vers le produit de deux lois uniformes sur $[0,1]$ quand y tend vers $+\infty$.

Pour énoncer la seconde proposition, nous adoptons les notations suivantes :
Si $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ et $g : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ sont deux fonctions croissantes,

$$\mathbf{C} = \left\{ \int_1^{+\infty} dt/tf(t) \text{ converge} \right\} \quad , \quad \mathbf{D} = \left\{ \int_1^{+\infty} dt/tf(t) \text{ diverge} \right\},$$

$$\mathbf{c} = \left\{ \int_1^{+\infty} dt/tg(t) \text{ converge} \right\} \quad , \quad \mathbf{d} = \left\{ \int_1^{+\infty} dt/tg(t) \text{ diverge} \right\}.$$

Proposition 5.2
On a p.s.

$$\bullet\mathbf{Cc} \Longrightarrow \lim_{y\to+\infty} \frac{V(y)f(y)}{y} = +\infty \quad et \quad \lim_{y\to+\infty} \frac{v(y)g(y)}{y} = +\infty.$$

$$\bullet\mathbf{Cd} \Longrightarrow \lim_{y\to+\infty} \frac{V(y)f(y)}{y} = +\infty \quad et \quad \liminf_{y\to+\infty} \frac{v(y)g(y)}{y} = 0.$$

$$\bullet\mathbf{Dc} \Longrightarrow \liminf_{y\to+\infty} \frac{V(y)f(y)}{y} = 0 \quad et \quad \lim_{y\to+\infty} \frac{v(y)g(y)}{y} = +\infty.$$

$$\bullet\mathbf{Dd} \Longrightarrow \liminf_{y\to+\infty} \frac{V(y)f(y)}{y} = 0 \quad et \quad \liminf_{y\to+\infty} \frac{v(y)g(y)}{y} = 0.$$

5.2 Point le plus visité sur l'intervalle de temps $[0,t]$

Les résultats asymptotiques obtenus pour $V(y)$, point de l'intervalle d'espace $[0,y]$ le plus visité par X, permettent facilement de déduire le comportement asymptotique du point le plus visité par X pendant l'intervalle de temps $[0,t]$.
On considère $(\ell_t^x : x \in \mathbb{R},\, t \geq 0)$ la famille bicontinue des temps locaux de X, et on introduit

$$M_t = \max\{\ell_t^x : x \geq 0\} \quad \text{et} \quad \overline{V}_t = \inf\{x \geq 0 : \ell_t^x = M_t\}.$$

Corollaire 5.3
$\overline{V}_t/\mu t$ converge en distribution vers la loi uniforme sur $[0,1]$ quand t tend vers $+\infty$.

Corollaire 5.4
Soit $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ une fonction croissante. Alors

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{\overline{V}_t f(t)}{t} = 0 \quad ou \quad +\infty \ p.s.$$

selon que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{tf(t)}$ diverge ou converge.

La démonstration des corollaires repose sur le fait que $X_t/t \to \mu$, ce qui permet de ramener l'étude de $\overline{V}_t$ à celle de $V(\mu t)$ au moyen du lemme suivant.

Lemme 5.5
Pour tout $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\mathbb{P}\left(V(\mu s(1-\varepsilon)) \leq \overline{V}_s \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}V(\mu s(1+\varepsilon)) \text{ pour tout } s \geq t\right)$$

tend vers 1 *lorsque* t *tend vers* $+\infty$.

Preuve : On introduit $S_t = \sup\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$ et $J_t = \inf\{X_s : s \geq t\}$, respectivement le supremum passé et l'infimum futur de X. Fixons $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$. Comme $X_t/t \to \mu$, on peut choisir t suffisamment grand pour que la probabilité de l'évènement

$$\{\mu s(1-\varepsilon) \leq J_s \text{ et } S_s \leq \mu s(1+\varepsilon) \text{ pour tout } s \geq t\}$$

vaille au moins $1-\eta$. On travaille désormais sur cet évènement.
Fixons $s \geq t$. Le fait que $J_s \geq \mu s(1-\varepsilon)$ entraîne

$$\ell^x = \ell^x_s \quad \text{pour tout } x < \mu s(1-\varepsilon). \tag{6}$$

L'inégalité $V(\mu s(1-\varepsilon)) \leq \overline{V}_s$ en découle aisément.

Vérifions ensuite que $(1-\varepsilon)\overline{V}_s \leq (1+\varepsilon)V(\mu s(1+\varepsilon))$; pour cela, distinguons deux cas. Dans un premier temps, supposons que $\overline{V}_s < \mu s(1-\varepsilon)$. L'identité (6) entraîne alors que $\overline{V}_s = V(\mu s(1-\varepsilon))$, et *a fortiori* $(1-\varepsilon)\overline{V}_s \leq (1+\varepsilon)V(\mu s(1+\varepsilon))$.
Supposons ensuite que $\overline{V}_s \geq \mu s(1-\varepsilon)$. Pour tout $y \in [0, \mu s(1-\varepsilon))$, on a clairement

$$\ell^y = \ell^y_s < \ell^{\overline{V}_s}_s \leq \ell^{\overline{V}_s},$$

et donc $V(\mu s(1+\varepsilon)) \geq \mu s(1-\varepsilon)$. Pour conclure, il ne reste qu'à observer que, comme $S_s \leq \mu s(1+\varepsilon)$, on a nécessairement $\overline{V}_s \leq \mu s(1+\varepsilon)$, i.e. $\mu s \geq \overline{V}_s/(1+\varepsilon)$. □

Le corollaire 5.3 découle maintenant immédiatement de la proposition 1.1 et du lemme 5.5. Quant au corollaire 5.4, il se déduit de façon analogue du théorème 1.2, du lemme 5.5 et du fait que le résultat du test intégral est inchangé lorqu'on remplace $f(t)$ par $af(bt)$.

Remarque : Pour ce qui est du comportement de la limite supérieure de $\overline{V}$, on peut montrer que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\overline{V}_t}{\mu t} = 1.$$

Comme précédemment, l'argument repose sur le lemme 5.5; nous omettons les détails.

Remerciements : Nous remercions Jean-François Le Gall et Zhan Shi pour les remarques constructives qu'ils nous ont faites sur ce travail.

References

[1] R.F. Bass et P.S. Griffin : The most visited site of Brownian motion and simple random walk. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* 70, 417-436. (1985)

[2] A.N. Borodin et P. Salminen : *Handbook of Brownian motion - Facts and formulae.* Probability and its applications, Birkhäuser. (1996)

[3] N. Eisenbaum : Un théorème de Ray-Knight lié au supremum des temps locaux browniens. *Probab. Theory Relat. Fields* 87, 79-95. (1990)

[4] C. Leuridan : Le point d'un fermé le plus visité par le mouvement brownien. *Ann. Probab.* 25, 953-996. (1997)

[5] J. Pitman et M. Yor : A decomposition of Bessel bridges. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* 59, 425-457. (1982)

[6] S.I. Resnick : *Extreme values, regular variation, and point processes.* Applied Probability, vol. 4. Springer, Berlin (1987)

[7] D. Revuz et M. Yor : *Continuous martingales and Brownian motion*, 2nd edn. Springer, Berlin. (1994)

[8] L.C.G. Rogers et D. Williams : *Diffusions, Markov Processes, and Martingales* vol. 2 : Itô calculus. Wiley, New-York. (1987)

[9] F. Spitzer : *Principles of random walk.* Van Nostrand, Princeton. (1964)