P. MATHIEU

# Quand l'inégalité log-Sobolev implique l'inégalité de trou spectral

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 32 (1998), p. 30-35
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1998__32__30_0>

# QUAND L'INEGALITE LOG-SOBOLEV IMPLIQUE L'INEGALITE DE TROU SPECTRAL

P.Mathieu.
LATP-CMI. Rue Joliot-curie.
F-13013 Marseille.
PMathieu@gyptis.univ-mrs.fr.

*Résumé*: Nous montrons que, sur une variété Riemannienne de volume fini, l'inégalité de Sobolev logarithmique implique l'inégalité de trou spectral.

Soit $E$ un espace localement compact séparable. Soit $\mu$ une mesure de Radon sur $E$. Nous supposons que $\mu$ est une probabilité et que son support est $E$. Soit $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ une forme de Dirichlet symétrique sur $(E, \mu)$ au sens de Fukushima 1980. Nous supposerons que $1 \in \mathcal{F}$ (1 est la fonction constante égale à 1) et que $\mathcal{E}(u, 1) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{F}$. On pose $\mathcal{E}(u) = \mathcal{E}(u, u)$. Nous utilisons aussi la notation $\|u\|_p$ pour la norme de la fonction $u$ dans $L_p = L_p(E, \mu)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Pour une fonction positive $u \in L_2$, on notera

$$E_2(u) = \int u^2 \log u^2 d\mu - \int u^2 d\mu \log \int u^2 d\mu$$

Soient $m \in I\!\!R_+$ et $\Lambda > 0$. Nous dirons que la forme de Dirichlet $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ satisfait l'inégalité log-Sobolev de constantes $\Lambda$ et $m$ si, pour toute fonction positive $u \in \mathcal{F}$, on a

$$E_2(u) \leq \frac{1}{\Lambda}(\mathcal{E}(u) + m \int u^2 d\mu) \tag{1}$$

On appelle "inégalité log-Sobolev tendue" l'inégalité (1) si $m = 0$. Il est connu que l'inégalité (1) est équivalente à certaines propriétés de contraction du semi-groupe Markovien associé à la forme de Dirichlet $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Par exemple on a, pour tout $t > 0$, $\|P_t u\|_q \leq e^{m'} \|u\|_2$, où $q = 1 + \exp(4\Lambda t)$ et $m' = (1/2 - 1/q)m/\Lambda$. Remarquer que si $m = 0$ - i.e. si l'inégalité est tendue - alors $m' = 0$ et $P_t$ est en fait une contraction de $L_2$ dans $L_q$. Nous renvoyons à Bakry 1992 pour d'autres résultats.
Soit maintenant

$$\Lambda(2) = \inf_{u \in \mathcal{F}, \int u d\mu = 0} \frac{\mathcal{E}(u)}{\int u^2 d\mu} \tag{2}$$

le trou spectral du générateur de $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Nous dirons que la forme de Dirichlet satisfait l'inégalité de trou spectral si $\Lambda(2) > 0$.
D'après les propositions 3.7 et 3.9 de Bakry 1992, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ satisfait une inégalité log-Sobolev tendue si et seulement si elle satisfait une inégalité log-Sobolev et l'inégalité de trou spectral. Des estimées du trou spectral en fonction de constantes dans des inégalités de Sobolev, log-Sobolev... ont également été obtenues par S.Aida 1997.
L'objet de cette note est de montrer que, sous certaines conditions d'ergodicité plus faibles que l'inégalité de trou spectral, on conserve l'implication: "log-Sobolev" implique "log-Sobolev tendue".
Pour cela nous introduisons la propriété suivante:

(P) Pour toute suite de fonctions $u_n \in \mathcal{F}$ telles que $\int u_n d\mu = 0$, $\|u_n\|_\infty \leq 1$ et $\mathcal{E}(u_n) \to 0$, alors $u_n$ converge vers 0 en $\mu$ mesure.

THEOREME

Si $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ satisfait la propriété (P) et une inégalité log-Sobolev, alors $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ satisfait l'inégalité de trou spectral.

Avant de donner la preuve du théorème, voici un exemple:

COROLLAIRE 1

Soit $E$ une variété Riemannienne connexe complète. On choisit pour $\mu$ la mesure de volume Riemannienne et nous supposerons donc que $E$ est de volume égal à 1. Soit $\mathcal{E}(u) = \int_E |du|^2 d\mu$, la forme de Dirichlet associée à l'opérateur de Laplace Beltrami sur $E$. $\mathcal{F}$ est l'espace de Sobolev $H_1$. Alors $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ satisfait la propriété (P). D'après le théorème, cela implique que, si $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ satisfait l'inégalité log-Sobolev alors elle satisfait aussi l'inégalité de trou spectral.

*Preuve*

Nous recopions la preuve donnée dans Mathieu 1996-2. Soit $K$ un sous-ensemble compact connexe régulier de $E$. Il existe une constante $C$ telle que, pour toute fonction $u \in C^\infty$, on ait

$$\mu(K) \int_K (u - \frac{\int_K u d\mu}{\mu(K)})^2 d\mu \leq \frac{1}{C} \int_K |du|^2 d\mu \tag{3}$$

(En d'autres termes, nous avons une inégalité de Poincaré sur $K$. Nous donnons une preuve de l'inégalité (3) en annexe).

Soit $u_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}$ telles que $\int u_n d\mu = 0$, $\|u_n\|_\infty \leq 1$ et $\mathcal{E}(u_n) \to 0$. Alors

$$\begin{aligned}
&\int u_n^2 d\mu \\
&= \int_K u_n^2 d\mu + \int_{E-K} u_n^2 d\mu \\
&\leq \frac{(\int_K u_n d\mu)^2}{\mu(K)^2} + \frac{1}{C\mu(K)} \int_K |du_n|^2 d\mu + \int_{E-K} u_n^2 d\mu \\
&\leq \frac{\mu(E-K)^2}{\mu(K)^2} + \frac{1}{C\mu(K)} \mathcal{E}(u_n) + \mu(E-K)
\end{aligned}$$

Donc

$$\limsup \int u_n^2 d\mu \leq \frac{\mu(E-K)^2}{\mu(K)^2} + \mu(E-K)$$

Il suffit maintenant de choisir $K$ assez gros pour montrer que $u_n$ converge vers 0 dans $L_2$ donc en $\mu$ mesure.

*Remarques*

1-Pour une forme de Dirichlet symétrique (comme c'est le cas ici), la propriété (P) est équivalente à la propriété suivante:

$$\sup_{\|u\|_\infty \leq 1} \|P_t u - \int u d\mu\|_1 \to 0$$

quand $t$ tend vers $+\infty$.
2-La propriété (P) permet également d'obtenir des estimées pour les temps d'atteinte pour le processus de Markov associé à $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$: soit $(X_t, t \geq 0)$ le processus de Markov associé à $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Pour un ensemble mesurable $A$, on note $\tau_A = \inf\{t > 0 \ t.q.\ X_t \in A\}$ le temps d'atteinte de $A$ par $X$. Alors $(P)$ a lieu si et seulement si $\lim_{T\to\infty} \sup_A \mu(A) P_\mu[\tau_A \geq T] = 0$. ( $P_\mu$ désigne la loi du processus $X$ quand la loi de $X_0$ est $\mu$). Voir Mathieu 1996-2 et 1996-3.
3-Tous les processus de Markov symétriques ergodiques ne satisfont pas (P). Par exemple le processus d'exclusion simple symétrique en dimension 1 ne satisfait pas (P). (Voir Mathieu 1996-2)

COROLLAIRE 2

Comme dans le corollaire 1, nous choisissons pour $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ la forme de Dirichlet associée à l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété connexe complète de volume 1. Soit $n > 2$. Supposons que $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ satisfait l'inégalité de Sobolev de dimension $n$:

$$\|u\|_p \leq \frac{1}{\Lambda}(\mathcal{E}(u) + m \int u^2 d\mu)$$

où $p = 2n/(n-2)$.
Alors la variété $E$ est compacte.

*Preuve*
L'inégalité de Sobolev implique l'inégalité de Sobolev faible et donc l'inégalité log-Sobolev. (Voir Bakry 1992, chapitre 4). D'après le théorème, on a donc une inégalité de trou spectral. $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ satisfait donc une inégalité de Sobolev et l'inégalité de trou spectral. D'après Bakry 1992, Lemme 4.1, cela implique que $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ satisfait en fait l'inégalité de Sobolev tendue i.e. avec $m = \Lambda$.
D'après la remarque 1 suivant le théorème 5.4 de Bakry 1992, le diamètre de $E$ est fini. Donc $E$ est compacte.

*Preuve du théorème*
Supposons l'inégalité (1) satisfaite ainsi que (P).
1- Reformulons (P): soit $u_n \in \mathcal{F}$, une suite de fonctions telle que $\int u_n d\mu = 0$, $\int u_n^2 d\mu \leq 1$ et $\mathcal{E}(u_n) \to 0$. Soit $k > 0$ et posons $v_n = u_n \wedge k \vee (-k)$ et $w_n = v_n - \int v_n d\mu$. Alors

$$\frac{k}{2}\mu(u_n > \frac{k}{2}) \leq \int_{u_n > \frac{k}{2}} u_n d\mu = -\int_{u_n \leq \frac{k}{2}} u_n d\mu \leq \sqrt{\mu(u_n \leq \frac{k}{2})}$$

car $\int u_n^2 d\mu \leq 1$. Donc

$$\int (k - v_n) d\mu \geq \frac{k}{2}\mu(v_n \leq \frac{k}{2}) = \frac{k}{2}\mu(u_n \leq \frac{k}{2})$$
$$\geq \frac{k^3}{8}\mu(u_n > \frac{k}{2})^2 \geq \frac{k^3}{8}\mu(u_n \geq k)^2$$

Sur l'ensemble où $u_n \geq k$, on a $v_n = k$, donc

$$\int |w_n| d\mu \geq \mu(u_n \geq k) \int (k - v_n) d\mu \geq \frac{k^3}{8}\mu(u_n \geq k)^3$$

Comme nous avons supposé que $\mathcal{E}(1, u) = 0$ et comme $v_n$ est une contraction normale de $u_n$, on a $\mathcal{E}(w_n) = \mathcal{E}(v_n) \leq \mathcal{E}(u_n)$. De plus $\|w_n\|_\infty \leq 2k$. La suite $w_n$ satisfait donc les hypothèses de (P), donc $w_n$ converge vers 0 en $\mu$ mesure et donc dans $L_1$. D'après les inégalités ci-dessus, cela implique que $\mu(u_n \geq k) \to 0$. De même on montrerait que $\mu(u_n \leq -k) \to 0$. On a ainsi prouvé que $u_n$ converge vers 0 en $\mu$ mesure. Comme la suite $u_n$ est bornée dans $L_2$ elle converge en fait vers 0 dans $L_1$.
Nous avons donc montré que (P) implique
(P'): pour toute suite de fonctions $u_n \in \mathcal{F}$ telles que $\int u_n d\mu = 0$, $\int u_n^2 d\mu \leq 1$ et $\mathcal{E}(u_n) \to 0$, alors $u_n$ converge vers 0 dans $L_1$.
2- Nous allons aussi ré-écrire l'inégalité log-Sobolev sous une forme un peu différente. Soient $p < 2 < p'$ et $q < 0 < q'$ tels que $1/p + 1/q = 1/p' + 1/q' = 1/2$. L'inégalité de Holder implique que

$$q \log \frac{\|u\|_p}{\|u\|_2} \leq q' \log \frac{\|u\|_{p'}}{\|u\|_2}$$

En faisant tendre $p'$ vers 2 et en choisissant $p = 1$, on obtient

$$-2 \log \frac{\|u\|_1}{\|u\|_2} \leq \frac{E_2(u)}{\|u\|_2^2} \tag{4}$$

(1) et (4) impliquent que

$$2 \log \frac{\|u\|_2}{\|u\|_1} \leq \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{\mathcal{E}(u)}{\|u\|_2^2} + m\right) \tag{5}$$

pour toute fonction positive $u \in \mathcal{F}$.
3- Montrons que $\Lambda(2) \neq 0$. Il suffit de prouver que, pour toute suite $u_n \in \mathcal{F}$ telle que $\int u_n d\mu = 0$, $\int u_n^2 d\mu \leq 1$ et $\mathcal{E}(u_n) \to 0$, on a $\int u_n^2 d\mu \to 0$ Or d'après (P'), $u_n$ converge vers 0 dans $L_1$. D'après (5), $u_n$ converge donc vers 0 dans $L_2$.

**Annexe**
Nous donnons ici une démonstration de l'inégalité (3): on notera $n$ la dimension de la variété $E$, $d$ la distance sur $K$ et $B$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$.
Soit $\varepsilon_1 > 0$. Soit $(x_i, i = 1...N)$ une famille de points de l'intérieur de $K$ tels que $K \subset \cup_i B(x_i, \varepsilon_1)$, où $B(x, r)$ désigne la boule géodésique de centre $x$ et rayon $r$.
Soient $k, l \in \{1, ...N\}$. Soit $(l(t), t \in [0, 1])$ un chemin dans l'intérieur de $K$ tel que $l(0) = x_k$ et $l(1) = x_l$. Soit $\varepsilon_2 = \inf_{k,l} \inf_t d(l(t), \partial K)$. Soit $\varepsilon_3 < \varepsilon_1, \varepsilon_3 < \varepsilon_2/3$. Soient $x \in B(x_k, \varepsilon_1) \cap K$ et $y \in B(x_l, \varepsilon_1) \cap K$. Soit $(l_{x,y}(t), t \in [-1/4, 5/4])$

un chemin de $x$ à $y$ tel que $l_{x,y}(t) \in K$, $d(l_{x,y}(0), x_k) \leq \varepsilon_3$, $d(l_{x,y}(1), x_l) \leq \varepsilon_3$, $\sup_{t\in[0,1]} d(l_{x,y}(t), l(t)) < \varepsilon_2$. Nous supposons de plus que $\sup_{x,y} \sup_t |\frac{d}{dt} l_{x,y}(t)| < \infty$ et que

$$(*) \int_{K\cap B(x_k,\varepsilon_1)} d\mu(x) \int_{K\cap B(x_l,\varepsilon_1)} d\mu(y) \Phi(l_{x,y}(t)) \leq C \int_K \Phi(z) d\mu(z)$$

pour toute fonction positive régulière $\Phi$. Ici $C$ est une constante indépendante de $\Phi$ et $t$. Pour construire $(l_{x,y}(t), -1/4 \leq t \leq 0)$, on utilise un difféomorphisme entre $B(x_k, \varepsilon_1)$ et $B$. Rappelons que, par hypothèse, $K$ est régulier, c'est-à-dire qu' il est possible de choisir $\varepsilon_1$ et les $x_i$ tels que soit $B(x_i, \varepsilon_1) \subset K$, soit il existe un difféomorphisme $F$ de $B(x_i, \varepsilon_1)$ vers $B$ tel que l'image de $B(x_i, \varepsilon_1) \cap \partial K$ soit $B \cap [\mathrm{x}_n = 0]$, et l'image de $B(x_i, \varepsilon_1) \cap Int(K)$ soit $B \cap [\mathrm{x}_n < 0]$. On procède de même pour $t \in [1, 5/4]$. Soient maintenant $e_0 \in T_{x_k}K$ et $e_1 \in T_{x_l}K$ tels que $l_{x,y}(0) = \exp_{x_k}(e_0)$ et $l_{x,y}(1) = \exp_{x_l}(e_1)$. On identifie les espaces tangents $(T_{l(t)}K, t \in [0,1])$ par transport parallèle le long de la courbe $l$. Pour $t \in [0,1]$, posons $e_t = e_0 + t(e_1 - e_0) \in T_{l(t)}K$ et $l_{x,y}(t) = \exp_{l(t)}(e_t)$. Le chemin ainsi construit satisfait nos hypothèses.
On a alors

$$\begin{aligned}
&2\mu(K) \int_K (u(x) - \frac{\int_K u(y) d\mu(y)}{\mu(K)})^2 d\mu(x) \\
&= \int_K d\mu(x) \int_K d\mu(y)(u(x) - u(y))^2 \\
&\leq \Sigma_{k,l} \int_{K\cap B(x_k,\varepsilon_1)} d\mu(x) \int_{K\cap B(x_l,\varepsilon_1)} d\mu(y)(u(x) - u(y))^2
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
&\int_{K\cap B(x_k,\varepsilon_1)} d\mu(x) \int_{K\cap B(x_l,\varepsilon_1)} d\mu(y)(u(x) - u(y))^2 \\
&= \int_{K\cap B(x_k,\varepsilon_1)} d\mu(x) \int_{K\cap B(x_l,\varepsilon_1)} d\mu(y) (\int_{-1/4}^{5/4} dt \; du(l_{x,y}(t)). \frac{d}{dt} l_{x,y}(t))^2 \\
&\leq C' \int_{K\cap B(x_k,\varepsilon_1)} d\mu(x) \int_{K\cap B(x_l,\varepsilon_1)} d\mu(y) \int_{-1/4}^{5/4} dt |du(l_{x,y}(t))|^2 \\
&\leq C' \sup_t \int_{K\cap B(x_k,\varepsilon_1)} d\mu(x) \int_{K\cap B(x_l,\varepsilon_1)} d\mu(y) |du(l_{x,y}(t))|^2 \\
&\leq C' \int_K |du(x)|^2 d\mu(x) \text{ d'après } (*) \\
&= C' \mathcal{E}(u)
\end{aligned}$$

où la constante $C'$ ne dépend ni de k, ni de l, ni de $u$.

*L'auteur remercie D.Bakry et M.Ledoux pour leurs suggestions qui ont permis de simplifier la preuve du théorème.*

Références:

Aida.S. (1997): Uniform positivity improving property, Sobolev inequality and spectral gaps. Preprint.

Bakry.D. (1992): L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semi-groupes. Ecole d'été de St Flour 1992. LNM 1581.
Fukushima.M. (1980): Dirichlet forms and Markov processes. (North Holland).
Mathieu.P. (1996-1): Hitting times and spectral gap inequalities. A paraître dans Ann. IHP.
Mathieu.P (1996-2): On the law of the hitting time of a small set by a Markov process. Preprint
Mathieu.P (1996-3): Uniform estimates of the hitting times of big sets by a Markov process. Preprint