Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Michel Émery
Marc Yor

Sur un théorème de Tsirelson relatif à des mouvements browniens corrélés et à la nullité de certains temps locaux

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 32 (1998), p. 306-312
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1998__32__306_0>

SUR UN THÉORÈME DE TSIRELSON RELATIF À DES MOUVEMENTS BROWNIENS CORRÉLÉS ET À LA NULLITÉ DE CERTAINS TEMPS LOCAUX

par M. Émery et M. Yor

B. Tsirelson a démontré dans [9] que la filtration naturelle d'un mouvement brownien (à une ou plusieurs dimensions) ne contient pas de processus de Walsh. Des variations sur la méthode de Tsirelson et sur ce résultat font l'objet de l'exposé précédent [1], auquel nous renvoyons le lecteur pour un bref résumé de l'histoire de cette question ainsi que pour des références. La superbe démonstration de Tsirelson repose de façon essentielle sur l'argument suivant (parmi d'autres) : Si deux mouvements browniens X et Y vérifient $\frac{d}{dt}\langle X,Y\rangle_t \leqslant 1-\varepsilon < 1$, alors les processus croissants $M_t = \sup_{s\leqslant t} X_s$ et $N_t = \sup_{s\leqslant t} Y_s$ ont peu de points de croissance communs; plus précisément, les mesures dM et dN sont presque sûrement étrangères (ce qui ne signifie pas que leurs supports soient presque sûrement disjoints). Tsirelson le démontre en exhibant dans le quart de plan une fonction vérifiant une inéquation aux dérivées partielles et certaines conditions au bord; nous en proposons ici aux habitués des semimartingales une autre démonstration, dans le cadre du calcul stochastique.

Ceci fait, nous nous pencherons sur les méthodes utilisées pour les affiner un peu et terminer par des estimations plus précises que celles qui suffisent à établir le théorème.

THÉORÈME (Tsirelson). — *Soient, dans une même filtration, X et Y deux mouvements browniens réels, issus de l'origine et vérifiant $d\langle X,Y\rangle_t = \Gamma_t\,dt$, où Γ est un processus prévisible tel que $\Gamma \leqslant r < 1$. En posant $M_t = \sup_{s\leqslant t} X_s$ et $N_t = \sup_{s\leqslant t} Y_s$, on a*

$$\int \mathbb{1}_{\{Y=N\}}\,dM = 0\,.$$

Si l'on remplace l'hypothèse $\Gamma \leqslant r$ par $\Gamma = r$, le processus $(M-X, N-Y)$ devient une diffusion dans le premier quadrant, réfléchie normalement aux bords; une transformation affine en fait un mouvement brownien dans un angle de mesure $\alpha = \operatorname{Arc}\cos(-r)$, avec, sur chaque côté de l'angle, une réflexion oblique parallèle à l'autre côté. Dans ce cas, l'ensemble $\{X=M \text{ et } Y=N\}$, intersection des supports de dM et dN, est $\{0\}$ si $r \in [-1,0]$, et est l'adhérence de l'image d'un subordinateur d'indice $1-\frac{\pi}{2\alpha}$ si $r \in \,]0,1[$ (sur tout ceci, voir le chapitre IV de Le Gall [5]); on a ainsi un résultat quantitatif bien plus fin que la simple propriété qualitative de nullité de la mesure dM sur le support de dN. Toujours dans le cas où $\Gamma = r$, si l'on ne s'intéresse qu'à l'existence d'instants où $X=M$ et $Y=N$, le critère de S.R.S. Varadhan et R. Williams ([10]) montre déjà qu'il existe de tels instants (non nuls) si et seulement si $r > 0$.

COROLLAIRE 1. — *Avec les notations du théorème, on appelle L le temps local de X en zéro et on suppose $|\Gamma| \leqslant r < 1$. On a alors*

$$\int \mathbb{1}_{\{Y=N\}} \, dL = \int \mathbb{1}_{\{Y=0\}} \, dM = \int \mathbb{1}_{\{Y=0\}} \, dL = 0 \, .$$

DÉMONSTRATION. — Le mouvement brownien $\hat{X} = -\int \operatorname{sgn} X \, dX = L - |X|$ vérifie $\sup_{s \leqslant t} \hat{X}_s = L_t$ et donc aussi $\{\hat{X}_t = \sup_{s \leqslant t} \hat{X}_s\} = \{X_t = 0\}$; de même, le brownien $\hat{Y} = -\int \operatorname{sgn} Y \, dY$ vérifie $\{\hat{Y}_t = \sup_{s \leqslant t} \hat{Y}_s\} = \{Y_t = 0\}$. Les crochets de X, $\hat{X}$, Y et $\hat{Y}$ valent $d\langle \hat{X}, Y \rangle = -\operatorname{sgn} X \, \Gamma \, dt$, $d\langle X, \hat{Y} \rangle = -\operatorname{sgn} Y \, \Gamma \, dt$ et $d\langle \hat{X}, \hat{Y} \rangle = \operatorname{sgn}(XY) \, \Gamma \, dt$. La nullité des trois intégrales du corollaire peut s'obtenir en appliquant le théorème à chacun des trois couples $(\hat{X}, Y)$, $(X, \hat{Y})$ et $(\hat{X}, \hat{Y})$. ∎

Nous commençons par la démonstration du théorème. Nous suivons la convention de Meyer sur les temps locaux : si l'on note $(L_t^a)_{t \geqslant 0, \, a \in \mathbb{R}}$ le processus des temps locaux d'une semimartingale continue U, et si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une différence de fonctions convexes, c'est la dérivée à gauche ϕ'_{g} qui intervient dans la formule du changement de variable

$$\phi \circ U_t = \phi(U_0) + \int_0^t \phi'_{\mathrm{g}}(U_s) \, dU_s + \tfrac{1}{2} \int_{a \in \mathbb{R}} L_t^a \, \phi''(da) \, ,$$

où ϕ'' est la mesure dérivée seconde de ϕ (voir par exemple [8], théorème (1.5) du chapitre VI). Du coup, le temps local est continu à droite en la variable a avec des limites à gauche L_t^{a-}, et l'on a la formule

$$\int \mathbb{1}_{\{U=a\}} \, dU = \tfrac{1}{2}(L^a - L^{a-})$$

(*ibid.*, théorème (1.7)); cette formule va être généralisée par le lemme 2, plus bas.

LEMME 1. — *Soient U une semimartingale continue positive et H un ensemble prévisible. Si $U = 0$ sur H, le processus $\int \mathbb{1}_H \, dU$ est croissant.*

DÉMONSTRATION DU LEMME. — Puisque U est positive, $L^a = 0$ pour tout $a < 0$, d'où $L^{0-} = 0$ et la formule ci-dessus devient $\int \mathbb{1}_{\{U=0\}} \, dU = \frac{1}{2} L^0$. On en déduit $\int \mathbb{1}_H \, dU = \int \mathbb{1}_H \mathbb{1}_{\{U=0\}} \, dU = \frac{1}{2} \int \mathbb{1}_H \, dL^0$. ∎

COROLLAIRE 2. — *Soient f et g deux fonctions différences de convexes sur $\mathbb{R}^d$, vérifiant $f \leqslant g$ et $f(0) = g(0)$. Si Z est une semimartingale continue dans $\mathbb{R}^d$, $\int \mathbb{1}_{\{Z=0\}} \, d(f \circ Z) \leqslant \int \mathbb{1}_{\{Z=0\}} \, d(g \circ Z)$.*

C'est immédiat en prenant $H = \{Z = 0\}$ et $U = (g - f) \circ Z$ dans le lemme 1. ∎

LEMME 2. — *Soient $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une différence de deux fonctions convexes, ϕ'_{g} et ϕ'_{d} ses dérivées à gauche et à droite, et a un réel. Si U est une semimartingale continue et $(L_t^b)_{t \geqslant 0, \, b \in \mathbb{R}}$ le processus de ses temps locaux, on a*

$$\int \mathbb{1}_{\{U=a\}} \, d(\phi \circ U) = \tfrac{1}{2} \left(\phi'_{\mathrm{d}}(a) L^a - \phi'_{\mathrm{g}}(a) L^{a-} \right) .$$

DÉMONSTRATION DU LEMME. — Puisque le temps local L^b, qui figure dans la formule du changement de variable

$$\phi \circ U_t = \phi(U_0) + \int_0^t \phi'_{\mathrm{g}}(U_s) \, dU_s + \tfrac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} L_t^b \, \phi''(db) \, ,$$

est un processus croissant porté par l'ensemble $\{U = b\}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathbb{1}_{\{U_s=a\}}\, d(\phi\circ U)_s &= \int_0^t \mathbb{1}_{\{U_s=a\}}\, \phi'_{\rm g}(U_s)\, dU_s + \tfrac12 \int_{\mathbb{R}} \phi''(db) \int_0^t \mathbb{1}_{\{U_s=a\}} dL^b_s \\ &= \phi'_{\rm g}(a) \int_0^t \mathbb{1}_{\{U_s=a\}}\, dU_s + \tfrac12\, \phi''(\{a\}) \int_0^t \mathbb{1}_{\{U_s=a\}} dL^a_s \\ &= \tfrac12\, \phi'_{\rm g}(a)\, (L^a_t - L^{a-}_t) + \tfrac12\, \big(\phi'_{\rm d}(a) - \phi'_{\rm g}(a)\big)\, L^a_t \\ &= \tfrac12\, \big(\phi'_{\rm d}(a) L^a_t - \phi'_{\rm g}(a) L^{a-}_t\big)\ . \end{aligned}$$

∎

COROLLAIRE 3. — *Soit V un processus continu, adapté et positif. Si, pour un exposant $p \in \,]0,1[$, le processus V^p est une semimartingale, V est aussi une semimartingale et $\int \mathbb{1}_{\{V=0\}}\, dV = 0$.*

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE. — En posant $U = V^p$ et $\phi(x) = |x|^{1/p}$, on a $V = \phi\circ U$. Puisque ϕ est convexe, V est une semimartingale ; et puisque $\phi'_{\rm g}(0) = \phi'_{\rm d}(0) = 0$, le lemme 2 donne $\int \mathbb{1}_{\{V=0\}}\, dV = \int \mathbb{1}_{\{U=0\}}\, d(\phi\circ U) = 0$. ∎

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. — Sans perdre de généralité, nous supposerons $r > 0$. Les processus $\xi = M - X$ et $\eta = N - Y$ sont des sous-martingales.

Pour $\varepsilon > 0$, la semimartingale $U^\varepsilon = (\varepsilon + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{r}{(1+r)}}$ peut être calculée par la formule du changement de variable ; on trouve

$$dU^\varepsilon = \frac{2r}{1+r}\, (\varepsilon + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{1}{1+r}} \left[\xi\, d\xi + \eta\, d\eta + \left(1 - \frac{1}{1+r}\, \frac{\xi^2+\eta^2+2\xi\eta\Gamma}{\varepsilon+\xi^2+\eta^2}\right) dt\right] .$$

Le coefficient de dt est positif car $0 \leqslant \dfrac{2\xi\eta}{\varepsilon+\xi^2+\eta^2} \leqslant \dfrac{\xi^2+\eta^2}{\varepsilon+\xi^2+\eta^2} \leqslant 1$ et $\Gamma \leqslant r$; les termes $\xi\, d\xi$ et $\eta\, d\eta$ donnent eux aussi des sous-martingales locales ; ainsi, U^ε est une sous-martingale locale. Comme $\sup_{s\leqslant t} (U^\varepsilon)_s$ est dans tous les L^p, la sous-martingale locale U^ε est une vraie sous-martingale ; en faisant tendre ε vers zéro, on voit que *le processus $U = (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{r}{1+r}}$ est une sous-martingale* (et donc une semimartingale).

Posons $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ et $p = 2r/(1+r) < 1$. Comme $\rho^p = U$, le corollaire 3 dit que la semimartingale ρ vérifie $\int \mathbb{1}_{\{\rho=0\}}\, d\rho = 0$. Et en appliquant le corollaire 2 à la semimartingale bidimensionnelle $Z = (\xi, \eta)$ et aux trois fonctions convexes nulles à l'origine $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = |x|$ et $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, qui vérifient $f \leqslant g \leqslant h$, on obtient $0 \leqslant \int \mathbb{1}_{\{\rho=0\}}\, d\xi \leqslant \int \mathbb{1}_{\{\rho=0\}}\, d\rho$. Il s'ensuit que $\int \mathbb{1}_{\{\rho=0\}}\, d\xi = 0$, et, en prenant la partie à variation finie, $\int \mathbb{1}_{\{\rho=0\}}\, dM = 0$. En remplaçant dans cette égalité $\mathbb{1}_{\{\rho=0\}}$ par $\mathbb{1}_{\{Y=N\}} \mathbb{1}_{\{X=M\}}$ puis $\mathbb{1}_{\{X=M\}}\, dM$ par dM, il reste $\int \mathbb{1}_{\{Y=N\}}\, dM = 0$. Le théorème est établi. ∎

REMARQUES. — En remplaçant ξ par X et η par Y, le même calcul permet d'établir, si $|\Gamma| \leqslant r < 1$, que $(X^2 + Y^2)^{r/(1+r)}$ est une sous-martingale. En outre, l'exposant $r/(1+r)$ est le plus petit possible ; en effet, le coefficient de dt dans le calcul de $d(X^2+Y^2)^q$ vaut, au facteur positif $2q(X^2+Y^2)^{q-1}$ près,

$$1 - (1-q)\left(1 + \frac{2XY}{X^2+Y^2}\, \Gamma\right) ,$$

donc, lorsque $\Gamma \equiv r$ et $q < r/(1+r)$, ce coefficient est négatif dans un angle contenant la diagonale $\{x = y\}$.

Dans le cas $r = 0$ où (X, Y) est un mouvement brownien plan, ce qui précède montre que $(X^2 + Y^2)^q$ est une sous-martingale pour tout $q > 0$. Ce résultat est dû à Getoor et Sharpe, qui l'ont établi dans [4] pour toutes les martingales conformes. On pourrait de même étendre l'argument ci-dessus au cas d'une martingale (X, Y) « r-conforme », c'est-à-dire vérifiant une inégalité de Kunita-Watanabe renforcée du facteur $r < 1$.

Le cas $r = 1$ est en particulier celui du mouvement brownien unidimensionnel $(X = Y)$, pour lequel $|X|^q$ n'est une semimartingale pour aucun exposant $q < 1$.

Le cas général interpole de façon continue entre ces deux cas extrêmes. Inspirée de Neveu [6], sa démonstration rappelle celle de l'inégalité de sous-harmonicité de Janson (voir par exemple le paragraphe 6.7 de [3]).

Des thèmes proches de celui-ci sont aussi abordés dans [2] et [7] ; cette dernière référence contient tout un formulaire bien intéressant sur les temps locaux.

Voici pour finir deux extensions de ce qui précède. La première généralise le corollaire 3, et donne un critère un peu plus opératoire de nullité de $\int \mathbb{1}_{\{V=0\}}\, dV$.

LEMME 3. — *Soit V une semimartingale continue. Pour que $\int \mathbb{1}_{\{V=0\}}\, dV = 0$, il suffit qu'il existe une fonction impaire $h : \mathbf{R}-\{0\} \to \mathbf{R}$, strictement positive sur $]0, \infty[$, telle que*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^t \frac{d\langle V, V\rangle_s}{h(V_s)}\, \mathbb{1}_{\{|V_s|>\varepsilon\}} \quad \textit{existe,}$$

mais

$$\int_0 \frac{da}{h(a)} = \infty\,.$$

DÉMONSTRATION. — Il suffit d'écrire la formule de densité d'occupation :

$$\int_0^t \frac{d\langle V, V\rangle_s}{h(V_s)}\, \mathbb{1}_{\{|V_s|>\varepsilon\}} = \int_\varepsilon^\infty \frac{da}{h(a)}\, (L_t^a - L_t^{-a})\,.$$

Lorsque ε tend vers $0+$, le premier membre converge ; lorsque a tend vers $0+$, $L_t^a - L_t^{-a}$ tend vers $\int_0^t \mathbb{1}_{\{V=0\}}\, dV$. Ceci n'est possible que si $\int_0^t \mathbb{1}_{\{V=0\}}\, dV = 0$. ∎

PROPOSITION 1. — *Soit $\phi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une différence de deux fonctions convexes telle que ${\phi'}^2/\phi$ soit intégrable sur tout intervalle $[0, a]$ (où $a > 0$). Si U est une semimartingale positive, la semimartingale $V = \phi \circ U$ vérifie $\int \mathbb{1}_{\{V=0\}}\, dV = 0$.*

Le corollaire 3 est un cas particulier de cette proposition, puisque la fonction $\phi(x) = x^{\frac{1}{p}}$ vérifie pour $0 < p < 1$ l'hypothèse de la proposition.

DÉMONSTRATION. — En prenant $h(x) = x$ dans le lemme 3, il suffit de vérifier que l'intégrale $\int_0^t d\langle V, V\rangle_s / V_s$ est finie. En appelant L le temps local de U, on écrit

$$\int_0^t \frac{d\langle V, V\rangle_s}{V_s} = \int_0^t \frac{(\phi' \circ U_s)^2\, d\langle U, U\rangle_s}{\phi \circ U_s} = \int_0^\infty \frac{da\, \phi'(a)^2}{\phi(a)}\, L_t^a$$

et il ne reste qu'à remarquer que les trajectoires de $a \mapsto L_t^a$ sont continues sur $[0, \infty[$ et à support compact. ∎

Nous terminons par une extension du théorème, ou plutôt de la dernière égalité du corollaire 1.

PROPOSITION 2. — *Soient r et p tels que $\frac{1}{3} < r < 1$ et $p > \dfrac{r+1}{2r}$. Soient X et Y deux semimartingales continues, de la forme*

$$X_t = B_t + \int_0^t H_s\, ds \qquad \text{et} \qquad Y_t = C_t + \int_0^t K_s\, ds\ ,$$

où B et C sont des mouvements browniens réels et H et K des processus prévisibles tels que

$$\int_0^t |H_s|^p\, ds < \infty \qquad \text{et} \qquad \int_0^t |K_s|^p\, ds < \infty\ .$$

Appelons L le temps local de X à l'origine. Si l'on a $d\langle X, Y\rangle_t = \Gamma_t\, dt$ où Γ est un processus prévisible vérifiant $|\Gamma| \leqslant r$, alors

$$\int 1\!\!1_{Y=0}\, dL = 0\ .$$

REMARQUE. — Pour $r \leqslant \frac{1}{3}$, le résultat subsiste, mais n'est pas intéressant car l'exposant p est alors supérieur à 2; on peut dans ce cas obtenir mieux (le même résultat pour $p = 2$) par un simple changement de probabilité, en se ramenant au corollaire 1 par le théorème de Girsanov. En revanche, pour $r > \frac{1}{3}$, l'exposant p peut être choisi plus petit que 2; il peut d'ailleurs être pris proche de 1 si r lui-même est proche de 1.

DÉMONSTRATION. — Il suffit d'établir que le processus $U = (X^2 + Y^2)^{\frac{r}{1+r}}$ est une semimartingale; un argument calqué sur la fin de la démonstration du théorème permettra alors de conclure.

Comme plus haut, nous allons approcher U par $U^\varepsilon = (\varepsilon + X^2 + Y^2)^{\frac{r}{(1+r)}}$. Posons $\rho = \sqrt{X^2+Y^2}$. Le même calcul que pour le théorème donne $U^\varepsilon = \frac{2r}{1+r}(I^\varepsilon + A^\varepsilon)$, où l'on a posé

$$I^\varepsilon = \int \frac{X\, dX + Y\, dY}{(\varepsilon+\rho^2)^{\frac{1}{1+r}}} \quad \text{et} \quad A^\varepsilon = \int \frac{1}{(\varepsilon+\rho^2)^{\frac{1}{1+r}}} \left(1 - \frac{1}{1+r}\, \frac{X^2+Y^2+2\Gamma XY}{\varepsilon+X^2+Y^2}\right) dt\ .$$

L'hypothèse $|\Gamma| \leqslant r$ entraîne que A^ε est un processus croissant. Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que I^ε converge, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers l'intégrale stochastique

$$I = \int \frac{X\, dX + Y\, dY}{\rho^{\frac{2}{1+r}}}\ ;$$

comme U^ε tend vers U, les A^ε devront alors par différence converger vers un processus A, qui sera croissant comme limite de processus croissants, et l'on aura ainsi établi que U est la semimartingale $\frac{2r}{1+r}\,(I + A)$.

Pour montrer que l'intégrale stochastique I a bien un sens et est la limite des I^ε, il suffit de vérifier que le processus prévisible $|X|\, \rho^{-\frac{2}{1+r}}$ (qui est positif et peut prendre des valeurs infinies) est intégrable par rapport à la semimartingale X. En échangeant X et Y, on en déduira à la fois que I existe et, par le théorème de convergence dominée pour les semimartingales, que les I^ε convergent vers I.

Prenant en compte la décomposition de X (le cas de Y est analogue), nous sommes ramenés à vérifier la convergence des intégrales

$$\int_0^t \frac{X_s}{\rho_s^{\frac{2}{1+r}}}\, dB_s \qquad \text{et} \qquad \int_0^t \frac{|X_s|}{\rho_s^{\frac{2}{1+r}}}\, |H_s|\, ds \;;$$

en minorant ρ par $|X|$, il suffit de montrer que

$$\int_0^t \frac{1}{|X_s|^{2\frac{1-r}{1+r}}}\, ds < \infty \qquad \text{et} \qquad \int_0^t \frac{1}{|X_s|^{\frac{1-r}{1+r}}}\, |H_s|\, ds < \infty \,.$$

Puisque $r > \frac{1}{3}$, l'exposant $\alpha = 2\frac{1-r}{1+r}$ vérifie $\alpha < 1$, la fonction $|x|^{2-\alpha}$ est convexe, et la première intégrale apparaît dans la formule

$$|X_t|^{2-\alpha} \;=\; (2-\alpha)\int_0^t |X_s|^{1-\alpha}\, \mathrm{sgn}\, X_s\, dX_s \;+\; \frac{(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}\int_0^t \frac{ds}{|X_s|^{\alpha}}\,,$$

ce qui montre qu'elle converge. Pour l'autre intégrale, introduisons l'exposant q conjugué de p et posons $\beta = q\,\frac{1-r}{1+r}$. On peut écrire

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{|X_s|^{\frac{1-r}{1+r}}}\, |H_s|\, ds &\leqslant \Big[\int_0^t \Big(\frac{1}{|X_s|^{\frac{1-r}{1+r}}}\Big)^q ds\Big]^{\frac{1}{q}} \Big[\int_0^t |H_s|^p\, ds\Big]^{\frac{1}{p}} \\ &= \Big[\int_0^t \frac{1}{|X_s|^{\beta}}\, ds\Big]^{\frac{1}{q}} \Big[\int_0^t |H_s|^p\, ds\Big]^{\frac{1}{p}} \,.\end{aligned}$$

L'hypothèse $p > \frac{r+1}{2r}$ donne $q < \frac{1+r}{1-r}$ d'où $\beta < 1$, et le premier facteur est fini par le même argument que pour α ci-dessus; l'autre facteur est fini par hypothèse. La proposition est ainsi démontrée. ∎

RÉFÉRENCES

[1] M. Barlow, M. Émery, F. Knight, S. Song & M. Yor. Autour d'un théorème de Tsirelson sur des filtrations browniennes et non browniennes. Dans ce volume.

[2] J.-M. Bismut. On the set of zeros of certain semimartingales. *Proc. London Math. Soc. 49,* 73–86, 1984.

[3] R. Durrett. Brownian Motion and Martingales in Analysis. Wadsworth Mathematics Series, Wadsworth, 1984.

[4] R.K. Getoor & M.J. Sharpe. Conformal martingales. *Invent. Math. 16,* 271–308, 1972.

[5] J.-F. Le Gall. Some properties of planar Brownian motion. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XX, Lecture Notes in Mathematics 1527, Springer 1992.

[6] J. Neveu. Sur l'espérance conditionnelle par rapport à un mouvement brownien. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B, 12,* 105–109, 1976.

[7] Y. Ouknine & M. Rutkovski. Local times of functions of continuous semimartingales. *Stochastic Analysis and Applications 13,* 211–232, 1995.

[8] D. Revuz & M. Yor. Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer, 1991.

[9] B. Tsirelson. Triple points: From non-Brownian filtrations to harmonic measures. *GAFA, Geom. funct. anal. 7,* 1096–1142, 1997.

[10] S.R.S. Varadhan & R.J. Williams. Brownian motion in a wedge with oblique reflection. *Comm. Pure Appl. Math. 38,* 405–443, 1984.

[11] M. Yor. Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semimartingales. *Temps Locaux, Astérisque 52-53,* 23–35, 1978.

Michel Émery
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
I.R.M.A.
7 rue René Descartes
67 084 STRASBOURG Cedex
`emery@math.u-strasbg.fr`

Marc Yor
Université Pierre et Marie Curie
Laboratoire de Probabilités
4 place Jussieu
75 252 PARIS Cedex 05