SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

B. JOURDAIN

Propagation trajectorielle du chaos pour les lois de conservation scalaire

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 32 (1998), p. 215-230

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1998__32__215_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Propagation trajectorielle du chaos pour les lois de conservation scalaire

B.Jourdain [1]

Résumé

A l'aide d'un problème de martingales, nous donnons une interprétation probabiliste trajectorielle de la solution d'une équation cinétique associée aux lois de conservation scalaire. Puis nous montrons que l'unique solution de ce problème est la limite au sens de la propagation du chaos d'une suite de lois de systèmes de particules en interaction, étendant ainsi un résultat obtenu par Perthame et Pulvirenti [2] pour les marginales en temps.

L'équation cinétique non linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x,v) + a(v).\nabla_x f(t,x,v) + \lambda(f(t,x,v) - 1_{\{v \leq u(t,x)\}}) = 0 \\ \text{où } \ (t,x,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \ \ u(t,x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t,x,v)dv \\ \text{et } \ \ f(0,x,v) = f_0(x,v) \end{cases} \tag{0.1}$$

$$\text{avec } \ \lambda > 0 \ \text{ et } \ a \ \text{ fonction continue de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathbb{R}^d$$

a été introduite par Perthame et Tadmor [3]. Ces auteurs ont montré que lorsque $w_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est positive et $f_0(x,v) = 1_{\{v \leq w_0(x)\}}$, dans le passage à la limite $\lambda \to +\infty$, u converge vers w, l'unique solution entropique de l'équation de conservation scalaire

$$\begin{cases} \partial_t w(t,x) + \nabla_x.A(w(t,x)) = 0, \ \ x \in \mathbb{R}^d, \ \ t \geq 0 \\ w(0,x) = w_0(x) \end{cases} \tag{0.2}$$

avec $A(v) = \int_0^v a(\tilde{v})d\tilde{v}$. Heuristiquement, on peut se convaincre de ce résultat de la façon suivante. Si on intègre (0.1) en v, on obtient $\partial_t u(t,x) + \nabla_x.\int_{\mathbb{R}_+} a(v)f(t,x,v)dv = 0$. Dans le passage à la limite, $f(t,x,v)$ et $1_{\{v\leq u(t,x)\}}$ deviennent très proches et remplaçant formellement $f(t,x,v)$ par $1_{\{v\leq u(t,x)\}}$ dans la dernière équation, on trouve que u vérifie l'équation de conservation scalaire.

Dans la première partie de ce travail, après avoir rappelé que pour $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, l'équation (0.1) admet une unique solution faible dans $L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$, nous cherchons à donner une interprétation probabiliste de cette solution lorsque f_0 est une densité de probabilité.

A cet effet, nous introduisons le problème de martingales non linéaire suivant : une

1. ENPC-CERMICS, 6-8 ave Blaise Pascal, Cité Descartes, Champs sur Marne, 77455 Marne la Vallée Cedex 2, FRANCE - e-mail : jourdain@cermics.enpc.fr

probabilité $P \in \mathcal{P}(D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ dont la marginale en t admet une densité $p(t,x,v)$ par rapport à la mesure de Lebesgue pour tout $t \in [0,T]$, est solution si $p(0,.,.) = f_0(.,.)$ et si, pour $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}_+} p(t,x,v)dv$, $\forall \phi \in C_b^{1,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$,

$$\phi(X_t,V_t) - \phi(X_0,V_0) - \int_0^t a(V_s).\nabla_x \phi(X_s,V_s)ds$$
$$- \lambda \int_0^t \frac{1_{\{u(s,X_s)>0\}}}{u(s,X_s)} \int_0^{u(s,X_s)} (\phi(X_s,v) - \phi(X_s,V_s))dv\, ds$$

est une P-martingale locale (où (X,V) processus canonique sur $D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$). Ce problème de martingales est associé à (0.1) au sens où si P est solution, alors $p(t,x,v)$ est solution faible de (0.1). Nous montrons qu'il admet une unique solution. La solution est construite de la façon suivante : la position X évolue suivant un mouvement de vitesse $a(V)$ tandis qu'aux instants de sauts (T_k) d'un processus de Poisson de paramètre λ, le paramètre de vitesse V se redistribue uniformément entre 0 et $u(T_k, X_{T_k})$ où u est la densité spatiale de la solution de (0.1).

Dans la seconde partie, nous généralisons un résultat de propagation du chaos dû à Perthame et Pulvirenti. Dans [2], ces auteurs restreignent la position x au tore $T^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, qu'ils subdivisent en cellules cubiques identiques disjointes de volume $|\Delta|$. Ils construisent un système à N particules à partir de N processus de Poisson indépendants de paramètre λ : l'évolution de la position de la ième particule est régie par son paramètre de vitesse et aux instants de sauts du ième processus de Poisson, ce paramètre de vitesse se redistribue uniformément entre 0 et la densité spatiale empirique dans la cellule où se trouve la particule (rapport entre le nombre de particules dans la cellule et $N|\Delta|$). Ils démontrent que pour $N \to +\infty$ avec $|\Delta| \to 0$ et $N|\Delta| \to +\infty$, les marginales en t des systèmes de particules sont $f(t,x,v)dxdv$-chaotiques où f est l'unique solution de (0.1). Le passage à la limite $|\Delta| \to 0, N|\Delta| \to +\infty, \lambda \to +\infty$ suffisamment doucement permet d'envisager la simulation de l'équation de conservation scalaire par une méthode de Monte-Carlo.
Nous étendons le résultat de Perthame et Pulvirenti en nous libérant de l'hypothèse technique de minoration de f_0 qui les contraignait à se limiter au tore et en travaillant sur $\mathcal{P}(D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ au lieu de considérer uniquement les marginales en temps. Nous introduisons un système de particules fortement inspiré du leur et nous montrons que pour f_0 satisfaisant une régularité en x précisée ultérieurement, il y a propagation du chaos en norme de variation sur $\mathcal{P}(D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ vers l'unique solution du problème de martingales partant de f_0.
Notre preuve reprend les deux étapes de la leur. Nous nous appuyons sur le couplage qu'ils utilisent mais avec un point de vue différent. Notre approche probabiliste nous permet de retrouver très facilement le résultat de leur première étape. Puis nous améliorons les majorations de la seconde étape en travaillant dans un cadre L^1 au lieu d'un cadre L^2.

Notations

Soit $D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ l'espace des fonctions càdlàg de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. On note $\mathcal{P}(D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ l'espace des probabilités sur $D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ que l'on munit de la norme en variation

$$\|P-Q\| = \sup\{\int \phi\, dP - \int \phi\, dQ,\ \phi : D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+) \to \mathbb{R} \quad \text{bornée par } 1\}$$

Si $P \in \mathcal{P}(D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, on note $(P_t)_{t\in[0,T]}$ les marginales en temps de P.
On désigne par $\tilde{\mathcal{P}}(D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ le sous ensemble de $\mathcal{P}(D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ constitué par les probabilités dont toutes les marginales en temps sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. Si $P \in \tilde{\mathcal{P}}(D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, alors il existe une fonction mesurable $p(t,x,v)$ telle que pour tout $t \in [0,T]$, $p(t,.,.)$ est une densité de P_t par rapport à la mesure de Lebesgue (voir Meyer [1] p193-194). Une telle fonction est appelée version mesurable des densités pour P.
Le processus canonique sur $D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ est noté (X_s,V_s), $s \in [0,T]$ avec $X_s \in \mathbb{R}^d$ et $V_s \in \mathbb{R}_+$.

Remerciements: Je tiens à remercier Madame le Professeur Sylvie Méléard pour toute l'aide qu'elle m'a apportée au cours de ce travail.

1 Le problème de martingales non linéaire

1.1 L'équation cinétique (0.1)

Proposition 1.1 *Pour toute fonction $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, l'équation cinétique (0.1) admet une unique solution faible f dans $L^\infty([0,T],L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$. Si $f_0 \geq 0$, $f \geq 0$. En outre, si f' est la solution correspondant à la condition initiale f'_0,*

$$\|f-f'\|_\infty \leq \|f_0-f'_0\|_{L^1} \tag{1.1}$$

où $\|\|_\infty$ désigne la norme de $L^\infty([0,T],L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$.

Remarque 1.2 *Par invariance de l'équation cinétique par translation spatiale, si $f(t,x,v)$ est la solution associée à $f_0(x,v)$, $f(t,x+y,v)$ est la solution associée à $f_0(x+y,v)$. Avec la propriété de contraction (1.1), on en déduit que*

$$\left(\sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^d\\ y\neq 0}} \frac{1}{|y|}\|f_0(.+y,.)-f_0(.,.)\|_{L^1} \leq K\right) \Rightarrow \left(\sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^d\\ y\neq 0}} \frac{1}{|y|}\|f(.,.+y,.)-f(.,.,.)\|_\infty \leq K\right)$$

Preuve de la proposition 1.1 : Soit $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, f une solution faible de (0.1) dans $L^\infty([0,T],L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ et $u(s,x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(s,x,v)dv$. Ce qui suit est valable

pour t en dehors d'un borélien de $[0,T]$ de mesure de Lebesgue nulle.
Si $\psi \in C^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ à support compact

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} f(t,x,v)\psi(t,x,v)dxdv = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} f_0(x,v)\psi(0,x,v)dxdv$$
$$+ \int_{(0,t]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} f(s,x,v)\left(\partial_s\psi + a(v).\nabla_x\psi - \lambda\psi\right)(s,x,v)dsdxdv$$
$$+ \lambda \int_{(0,t]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} 1_{\{v\le u(s,x)\}}\psi(s,x,v)dsdxdv \tag{1.2}$$

Par densité, cette égalité reste vraie pour $\psi \in C^{1,1,0}([0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ à support compact.
Soit $\phi \in C^{1,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ à support compact et $\psi(s,x,v) = e^{\lambda(s-t)}\phi(x + (t-s)a(v), v)$.
La fonction ψ est $C^{1,1,0}$ à support compact dans $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. En outre,

$$\forall(s,x,v) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+,\ (\partial_s\psi + a(v).\nabla_x\psi - \lambda\psi)(s,x,v) = 0$$

En écrivant (1.2) pour ψ, on obtient alors par un simple changement de variables

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} f(t,x,v)\phi(x,v)dxdv = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} e^{-\lambda t}f_0(x - ta(v), v)\phi(x,v)dxdv$$
$$+ \lambda \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} 1_{\{v\le u(s,x-(t-s)a(v))\}}e^{\lambda(s-t)}\phi(x,v)dxdv$$

Ainsi $t \in [0,T]$ p.p., (x,v)p.p.,

$$f(t,x,v) = e^{-\lambda t}f_0(x - ta(v), v) + \lambda \int_0^t e^{\lambda(s-t)}1_{\{v\le u(s,x-(t-s)a(v))\}}ds \tag{1.3}$$

Donc f est point fixe de l'application H qui à $g \in L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ associe,

$$H(g)(t,x,v) = e^{-\lambda t}f_0(x - ta(v), v) + \lambda \int_0^t e^{\lambda(s-t)}1_{\{v\le u_g(s,x-(t-s)a(v))\}}ds$$

pour $u_g(s,x) = \int_{\mathbb{R}_+} g(s,x,v)dv$. On montre facilement que cette application est contractante de rapport $(1 - e^{-\lambda T})$ dans $L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$. Par le théorème du point fixe de Picard, elle admet un unique point fixe. On a donc obtenu l'unicité des solutions de (0.1) dans $L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$.
Pour établir l'existence, nous allons montrer que le point fixe f est solution de (0.1).
On pose $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t,x,v)dv$. On se donne $t \in [0,T]$ et $\psi \in C^{1,1,0}([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+)$ à support compact. En utilisant notamment la formule d'intégration par parties pour les intégrales de Stieljes, on obtient

$$\int_{(0,t]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} \left(\partial_s\psi + a(v).\nabla_x\psi - \lambda\psi\right)(s,x,v) \int_0^s e^{\lambda(\tau-s)}1_{\{v\le u(\tau,x-(s-\tau)a(v))\}}d\tau dsdxdv$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} \int_0^t \partial_s\left(e^{-\lambda s}\psi(s, x + sa(v), v)\right) \int_0^s e^{\lambda\tau}1_{\{v\le u(\tau,x+\tau a(v))\}}d\tau dsdxdv$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} e^{-\lambda t}\psi(t, x + ta(v), v) \int_0^t e^{\lambda\tau}1_{\{v\le u(\tau,x+\tau a(v))\}}d\tau dxdv$$
$$- \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} \int_0^t e^{-\lambda s}\psi(s, x + sa(v), v)e^{\lambda s}1_{\{v\le u(s,x+sa(v))\}}dsdxdv$$

$$\int_{(0,t]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}\Big(\partial_s\psi + a(v).\nabla_x\psi - \lambda\psi\Big)(s,x,v)\int_0^s e^{\lambda(\tau-s)}1_{\{v\leq u(\tau,x-(s-\tau)a(v))\}}d\tau dsdxdv$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}\psi(t,x,v)\int_0^t e^{\lambda(s-t)}1_{\{v\leq u(s,x-(t-s)a(v))\}}ds$$
$$- \int_{(0,t]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}\psi(s,x,v)1_{\{v\leq u(s,x)\}}dsdxdv \qquad (1.4)$$

Un raisonnement analogue fournit

$$\int_{(0,t]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}\Big(\partial_s\psi + a(v).\nabla_x\psi - \lambda\psi\Big)(s,x,v)e^{-\lambda s}f_0(x-sa(v),v)dsdxdv$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} e^{-\lambda t}f_0(x-ta(v),v)\psi(t,x,v)dxdv - \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} f_0(x,v)\psi(0,x,v)dxdv$$

En sommant cette équation et λ fois (1.4) puis en utilisant (1.3), on obtient que pour presque tout $t\in[0,T]$, (1.2) est vérifiée pour toute fonction $\psi\in C^{1,1,0}([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+)$ à support compact. Donc f est solution faible de l'équation cinétique (0.1).

Si $f_0\geq 0$, d'après (1.3), il est clair que $f\geq 0$. Si f' est la solution correspondant à la condition initiale f_0', toujours d'après (1.3),
$t\in[0,T]$ p.p., $\|f(t,.,.)-f'(t,.,.)\|_{L^1}\leq e^{-\lambda t}\|f_0-f_0'\|_{L^1}+(1-e^{-\lambda t})\|f-f'\|_\infty$.
On en déduit $\|f-f'\|_\infty\leq\|f_0-f_0'\|_{L^1}$. ∎

1.2 Existence et unicité pour le problème de martingales

Définition 1.3 *Soit f_0 une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+$.*
On dit que $P\in\tilde{\mathcal{P}}(D([0,T],\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+))$ est solution du problème de martingales (PM) partant de f_0 si P_0 admet f_0 comme densité et si pour $p(t,x,v)$ version mesurable des densités de P et $u(t,x)=\int_{\mathbb{R}_+}p(t,x,v)dv$,

$$\phi(X_t,V_t)-\phi(X_0,V_0)-\int_0^t a(V_s).\nabla_x\phi(X_s,V_s)ds$$
$$-\lambda\int_0^t\frac{1_{\{u(s,X_s)>0\}}}{u(s,X_s)}\int_0^{u(s,X_s)}(\phi(X_s,v)-\phi(X_s,V_s))dvds$$

est une P martingale locale pour toute fonction $\phi\in C_b^{1,0}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+)$ (1.5)

Cette définition est indépendante du choix de la version mesurable des densités. En effet si p et p' sont deux telles versions et u et u' sont les densités spatiales associées,

$$P\text{p.s.},\ \forall t\in[0,T],\ \int_0^t\frac{1_{\{u(s,X_s)>0\}}}{u(s,X_s)}\int_0^{u(s,X_s)}(\phi(X_s,v)-\phi(X_s,V_s))dvds$$
$$=\int_0^t\frac{1_{\{u'(s,X_s)>0\}}}{u'(s,X_s)}\int_0^{u'(s,X_s)}(\phi(X_s,v)-\phi(X_s,V_s))dvds$$

Théorème 1.4 *Pour toute densité de probabilité f_0 sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, le problème de martingales (PM) partant de f_0 admet une unique solution P. De surcroît, toute version mesurable des densités pour P est solution de (0.1).*

Pour montrer le théorème, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.5 *Soit f_0 une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ et $h : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ positive. On note (PM_h) le problème de martingales: $P \in \mathcal{P}(D([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ est solution si P_0 admet une densité égale à f_0 et si (1.5) est vérifiée lorsque l'on y remplace u par h.*
Le problème (PM_h) admet une unique solution. En outre, la solution appartient à $\tilde{\mathcal{P}}(D([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$.

Preuve du lemme 1.5 : Soit P une solution de (PM_h). Pour montrer l'unicité pour ce problème, nous commençons par montrer que Pp.s., chaque trajectoire du processus X est une fonction déterministe de X_0 et de la trajectoire correspondante du processus V.
Soit $\phi \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$. Le processus $M_t^\phi = \phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t a(V_s).\nabla_x \phi(X_s) ds$ est une martingale locale localement bornée et donc localement de carré intégrable. Par la formule d'intégration par parties, on obtient

$$\phi^2(X_t) = \phi^2(X_0) + 2\int_0^t \phi(X_{s-}) dM_s^\phi + 2\int_0^t \phi(X_s) a(V_s).\nabla_x \phi(X_s) ds + [\phi(X)]_t$$

La fonction ϕ^2 étant dans $C_b^1(\mathbb{R}^d)$, $\phi^2(X_t) - \phi^2(X_0) - 2\int_0^t \phi(X_s) a(V_s).\nabla_x \phi(X_s) ds$ est une martingale locale. Donc $[\phi(X)]_t$ est une martingale locale. Puisque les sauts de M_t^ϕ et de $\phi(X_t)$ sont les mêmes, $[M^\phi]_t = [\phi(X)]_t$. Donc $[M^\phi]_t$ est une martingale locale et son compensateur $< M^\phi >_t$ est nul. Ainsi,

$$P\text{p.s.}, \ \forall t \in [0,T], \ \phi(X_t) = \phi(X_0) + \int_0^t a(V_s).\nabla_x \phi(X_s) ds$$

Avec des fonctions $\phi_{i,n} \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$, $1 \le i \le d$, $n \in \mathbb{N}^*$ telles que pour x dans $[-n,n]^d$, $\phi_{i,n}(x) = x_i$, on en déduit

$$P\text{p.s.}, \ \forall t \in [0,T], \ X_t = X_0 + \int_0^t a(V_s) ds$$

On se ramène à un problème de martingales qui ne porte que sur X_0 et V. Pour se rapprocher des notations de l'appendice de Sznitman [4], on définit sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ le noyau borélien à valeurs $\mathbb{R}$, $M(s,x,v,dv') = \lambda \frac{1_{\{h(s,x)>0\}}}{h(s,x)} 1_{\{-v \le v' \le -v+h(s,x)\}} dv'$.

$$\phi(V_t) - \phi(V_0) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\phi(V_s + v') - \phi(V_s)) M\left(s, X_0 + \int_0^s a(V_\tau) d\tau, V_s, dv'\right) ds$$

est une martingale locale pour toute fonction $\phi \in C_b(\mathbb{R}_+)$.
Par le théorème fonctionnel de classe monotone, cette propriété reste vraie pour ϕ borélienne et bornée. Par une adaptation immédiate de la peuve du Lemme 1 de l'appendice de Sznitman [4], on en déduit que Pp.s., V n'admet qu'un nombre fini de sauts sur chaque trajectoire et que $\forall t \in [0,T]$, $V_t = V_0 + \sum_{s \leq t} \Delta V_s$, la loi des instants et des valeurs des sauts sachant (X_0, V_0) étant déterminée de proche en proche (grâce à un choix judicieux de fonctions ϕ). D'où l'unicité pour (PM_h).

Pour l'existence, on se donne une variable aléatoire (χ_0, ν_0) distribuée suivant la loi de densité f_0, et, indépendamment, un processus de Poisson de paramètre λ de temps de sauts $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ ainsi qu'une suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de marques I.I.D. sur $[0,1]$. On construit (X, V) de la manière suivante:

- $(X_0, V_0) = (\chi_0, \nu_0)$
- sur $[0,T]$, entre les sauts du processus de Poisson, le paramètre de vitesse V est inchangé et la position X évolue suivant un mouvement libre de vitesse $a(V)$
- en T_k (si $T_k \leq T$), V prend la valeur $h(T_k, X_{T_k}) \times Z_k$ si $h(T_k, X_{T_k}) > 0$ et reste inchangé sinon. De cette façon, lorsque $h(T_k, X_{T_k}) > 0$, le paramètre de vitesse se redistribue uniformément sur $[0, h(T_k, X_{T_k})]$.

Nous allons vérifier que la loi P de ce processus est solution de (PM_h). A cet effet, pour $\phi \in C_b^{1,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, on pose $H(s,z) = 1_{\{s \leq T\}} 1_{\{h(s,X_s)>0\}} (\phi(X_s, h(s,X_s)z) - \phi(X_s, V_{s-}))$. On définit $Q = \sum_k \delta_{\{T_k, Z_k\}}$ et on note $(\mathcal{G}_t)$ la filtration du processus $\sum_{k: T_k \leq t}(1 + Z_k)$. Soit $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \sigma(\chi_0, \nu_0)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ la tribu $\mathcal{F}_t$ prévisible. Pour $t \in [0,T]$,

$$\phi(X_t, V_t) = \phi(X_0, V_0) + \int_0^t a(V_s).\nabla_x \phi(X_s, V_s) ds + \int_{\mathbb{R}_+ \times [0,1]} H(s,z) 1_{\{s \leq t\}} Q(dsdz)$$

La mesure aléatoire Q est une $\mathcal{F}_t$-mesure de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ de compensateur $\lambda dtdz$. Comme la fonction H est $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes \mathcal{B}([0,1])$ mesurable, on en déduit que

$$\phi(X_t, V_t) - \phi(X_0, V_0) - \int_0^t a(V_s).\nabla_x \phi(X_s, V_s) ds - \lambda \int_0^t \int_{[0,1]} H(s,z) dsdz$$

est une $\mathcal{F}_t$-martingale locale. Donc P est solution du problème de martingale (PM_h).

On utilise la construction précédente pour établir l'absolue continuité. On commence par supposer $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, $h(t,x) > 0$. Soit $t \in (0,T]$ et $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. Avec la convention $T_0 = 0$,

$$\text{si } T_k \leq t < T_{k+1}, \ (X_t, V_t) = \left(\chi_0 + \sum_{j=1}^{k} (T_j - T_{j-1}) a(V_{T_{j-1}}) + (t - T_k) a(V_{T_k}), V_{T_k} \right).$$

Ainsi $\mathbb{E}(\phi(X_t, V_t))$ est égal à

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathbb{E}\left(\phi\left(\chi_0+\sum_{j=1}^{k}(T_j-T_{j-1})a(V_{T_{j-1}})+(t-T_k)a(V_{T_k}),V_{T_k}\right)\Big|T_k\le t<T_{k+1}\right)$$

et donc à

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\lambda t}\lambda^k\int_{0\le t_1\le t_2\le\ldots\le t_k\le t} dt_1\ldots dt_k\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+^{k+1}}\frac{1_{\{v_1\le h(t_1,x_1)\}}}{h(t_1,x_1)}\cdots\frac{1_{\{v_k\le h(t_k,x_k)\}}}{h(t_k,x_k)}$$
$$f_0(x_0,v_0)\phi(x_t,v_k)dx_0dv_0dv_1\ldots dv_k \tag{1.6}$$

où $x_i = x_0+\sum_{j=1}^{i}(t_j-t_{j-1})a(v_{j-1})$ et $x_t = x_0+\sum_{j=1}^{k}(t_j-t_{j-1})a(v_{j-1})+(t-t_k)a(v_k)$ (par convention $t_0=0$).
En effectuant le changement de variable $[x_0 \to x_t$ et $\forall 0\le i\le k, v_i\to v_i]$ dans l'intégrale sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+^{k+1}$ et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient $\mathbb{E}(\phi(X_t,V_t)) = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}\phi(x,v)\times p(t,x,v)dxdv$ pour

$$p(t,x,v)=\sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\lambda t}\lambda^k\int_{0\le t_1\le t_2\le\ldots\le t_k\le t} dt_1\ldots dt_k\int_{\mathbb{R}_+^k}\frac{1_{\{v_1\le h(t_1,y_1)\}}}{h(t_1,y_1)}\cdots\frac{1_{\{v_{k-1}\le h(t_{k-1},y_{k-1})\}}}{h(t_{k-1},y_{k-1})}$$
$$\frac{1_{\{v\le h(t_k,y_k)\}}}{h(t_k,y_k)}f_0(y_0,v_0)dv_0\ldots dv_{k-1}$$

avec $y_i = x-(t-t_k)a(v)-\sum_{j=i+1}^{k}(t_j-t_{j-1})a(v_{j-1})$.
Donc la loi de (X_t,V_t) est absolument continue.

Dans le cas où h peut s'annuler, au lieu de l'intégrale sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+^{k+1}$ de (1.6), on doit considérer 2^k intégrales suivant que $h(t_i,x_i)>0$ ou que $h(t_i,x_i)=0$ $(1\le i\le k)$.
On note I l'ensemble des i pour lesquels on prend $h(t_i,x_i)>0$ et $i_1,\ldots,i_n$ les éléments de I classés par ordre croissant. L'intégrale sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+^{k+1}$ est remplacée par la somme pour I variant dans l'ensemble des parties de $\{1,2,\ldots,k\}$ des intégrales :

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+^{n+1}}\prod_{i\notin I}1_{\{h(t_i,x_i)=0\}}\prod_{j=1}^{n}1_{\{h(t_{i_j},x_{i_j})>0\}}\frac{1_{\{v_j\le h(t_{i_j},x_{i_j})\}}}{h(t_{i_j},x_{i_j})}f_0(x_0,v_0)\phi(x_t,v_n)dx_0dv_0dv_1...dv_n$$

avec $t_{i_0}=0$, $x_i = x_0+\sum_{j=1}^{\max\{j:i_j\le i\}}(t_{i_j}-t_{i_{j-1}})a(v_{j-1})+(t_i-t_{i_{\max\{j:i_j\le i\}}})a(v_{\max\{j:i_j\le i\}})$ et $x_t = x_0+\sum_{j=1}^{n}(t_{i_j}-t_{i_{j-1}})a(v_{j-1})+(t-t_{i_n})a(v_n)$. Et on conclut en effectuant un changement de variable dans chacun des 2^k termes. ∎

Preuve du théorème 1.4 : Soit f_0 une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+$, P une solution du problème de martingales (PM) partant de f_0, p une version mesurable des densités pour P et $u(t,x)=\int_{\mathbb{R}_+}p(t,x,v)dv$. On va montrer que p est solution faible de (0.1). La loi P est solution de (PM_u). En utilisant la construction de la solution de (PM_u) donnée dans la preuve du Lemme 1.5, on obtient que

$$\begin{aligned}\psi(t,X_t,V_t)-\psi(0,X_0,V_0)-\int_0^t\left(\partial_s\psi(s,X_s,V_s)+a(V_s).\nabla_x\psi(s,X_s,V_s)\right)ds\\ -\lambda\int_0^t\frac{1_{\{u(s,X_s)>0\}}}{u(s,X_s)}\int_0^{u(s,X_s)}(\psi(s,X_s,v)-\psi(s,X_s,V_s))dvds\end{aligned}\tag{1.7}$$

est une P-martingale pour $\psi\in C^{1,1,0}([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+)$ à support compact.
On note A_t l'espérance du dernier terme. Par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}A_t&=\lambda\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}\frac{1_{\{u(s,x)>0\}}}{u(s,x)}\left(\int_0^{u(s,x)}\psi(s,x,v)dv\right)p(s,x,v')dxdv'ds\\&-\lambda\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}\frac{1_{\{u(s,x)>0\}}}{u(s,x)}\left(\int_0^{u(s,x)}\psi(s,x,v')dv\right)p(s,x,v')dxdv'ds\\&=\lambda\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}\frac{1_{\{u(s,x)>0\}}}{u(s,x)}\psi(s,x,v)1_{\{v\leq u(s,x)\}}\left(\int_{\mathbb{R}_+}p(s,x,v')dv'\right)dxdvds\\&-\lambda\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}1_{\{u(s,x)>0\}}\psi(s,x,v)p(s,x,v)dxdvds\\&=\lambda\int_{(0,t]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}\psi(s,x,v)\left(1_{\{v\leq u(s,x)\}}-p(s,x,v)\right)dsdxdv\end{aligned}$$

Avec la constance de l'espérance de la martingale (1.7), on en déduit facilement que p est solution faible de (0.1).

L'unicité pour (PM) est une conséquence de ce résultat et de la Proposition 1.1. En effet, si P et P' sont deux solutions de densités spatiales respectives $u(t,x)$ et $u'(t,x)$, le résultat d'unicité de la Proposition 1.1 implique (t,x)p.p., $u(t,x)=u'(t,x)$. On en déduit que P' est solution de (PM_u). Par l'unicité pour ce problème, $P'=P$.

Pour l'existence, on note f la solution de (0.1) et on pose $h(t,x)=\int_{\mathbb{R}_+}f(t,x,v)dv$. D'après la Proposition 1.1, $h\geq 0$. Soit P la solution de (PM_h), p une version mesurable des densités pour P et u la densité spatiale associée.

$$\begin{aligned}\psi(t,X_t,V_t)-\psi(0,X_0,V_0)-\int_0^t\left(\partial_s\psi(s,X_s,V_s)+a(V_s).\nabla_x\psi(s,X_s,V_s)\right)ds\\ -\lambda\int_0^t\frac{1_{\{h(s,X_s)>0\}}}{h(s,X_s)}\int_0^{h(s,X_s)}(\psi(s,X_s,v)-\psi(s,X_s,V_s))dvds\end{aligned}$$

est une P-martingale pour $\psi\in C^{1,1,0}([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+)$ à support compact. En prenant l'espérance, on obtient que p est solution faible de l'équation linéaire

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}\psi(t,x,v)p(t,x,v)dxdv=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}\psi(0,x,v)f_0(x,v)dxdv\\&+\int_{(0,t]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}(\partial_s\psi+a(v).\nabla_x\psi-\lambda\psi)(s,x,v)p(s,x,v)dsdxdv\\&+\lambda\int_{(0,t]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}\psi(s,x,v)\left(1_{\{h(s,x)>0\}}\frac{u(s,x)}{h(s,x)}1_{\{v\leq h(s,x)\}}+1_{\{h(s,x)=0\}}p(s,x,v)\right)dsdxdv\end{aligned}$$

Comme dans la preuve de la Proposition 1.1, on en déduit que $\forall t \in [0,T]$, (x,v)p.p.,

$$p(t,x,v) = e^{-\lambda t} f_0(x - ta(v), v)$$
$$+ \lambda \int_0^t e^{\lambda(s-t)} \left(1_{\{h(s,x_{t,s,v})>0\}} \frac{u(s,x_{t,s,v})}{h(s,x_{t,s,v})} 1_{\{v \le h(s,x_{t,s,v})\}} + 1_{\{h(s,x_{t,s,v})=0\}} p(s,x_{t,s,v},v) \right) ds$$

avec $x_{t,s,v} = x - (t-s)a(v)$.
Donc p est point fixe de l'application H qui à $g \in L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ associe

$$H(g)(t,x,v) = e^{-\lambda t} f_0(x - ta(v), v)$$
$$+ \lambda \int_0^t e^{\lambda(s-t)} \left(1_{\{h(s,x_{t,s,v})>0\}} \frac{u_g(s,x_{t,s,v})}{h(s,x_{t,s,v})} 1_{\{v \le h(s,x_{t,s,v})\}} + 1_{\{h(s,x_{t,s,v})=0\}} g(s,x_{t,s,v},v) \right) ds$$

où $u_g(t,x) = \int_{\mathbb{R}_+} g(t,x,v)dv$. On montre facilement que H est contractante de rapport $(1 - e^{-\lambda T})$ puis que f est l'unique point fixe de H. On en déduit que (t,x)p.p., $h(t,x) = u(t,x)$. Donc P est solution du problème de martingales (PM). ∎

2 Le résultat de propagation du chaos

2.1 Le système de particules en interaction

Soit $N \ge 2$. On fixe un hypercube D de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue $|D|$ centré en 0 que l'on subdivise en $\frac{|D|}{|\Delta|}$ cellules cubiques identiques de mesure de Lebesgue $|\Delta|$. Si $y \in D$, $\Delta(y)$ désigne la cellule dans laquelle se trouve y. Pour $y^N = (y^{N,1}, \ldots, y^{N,N}) \in \mathbb{R}^{Nd}$, on définit la densité empirique au point $y^{N,i}$ par

$$\rho_i(y^N) = 1_{\{y^{N,i} \in D\}} \frac{1}{(N-1)|\Delta|} \sum_{j \ne i} 1_{\Delta(y^{N,i})}(y^{N,j})$$

On note $(X_t^N, V_t^N) = (X_t^{N,1}, \ldots, X_t^{N,N}, V_t^{N,1}, \ldots, V_t^{N,N})$ le processus canonique sur $D([0,T], \mathbb{R}^{Nd} \times \mathbb{R}_+^N)$. On définit la loi du système de particules en interaction comme l'unique solution $P^{N,D,\Delta}$ du problème de martingales:
$P \in \mathcal{P}(D([0,T], \mathbb{R}^{Nd} \times \mathbb{R}_+^N))$ est solution si P_0 est égale à $(f_0 dx dv)^{\otimes N}$ et pour toute fonction $\phi \in C_b^{1,0}(\mathbb{R}^{Nd} \times \mathbb{R}_+^N)$,

$$\phi(X_t^N, V_t^N) - \phi(X_0^N, V_0^N) - \sum_{i=1}^N \int_0^t \Bigg((a(V_s^{N,i}).\nabla_{x_i}\phi(X_s^N, V_s^N) ds + \lambda \frac{1_{\{\rho_i(X_s^N)>0\}}}{\rho_i(X_s^N)}$$
$$\int_0^{\rho_i(X_s^N)} (\phi(X_s^N, V_s^{N,1}, \ldots, V_s^{N,i-1}, v, V_s^{N,i+1}, \ldots, V_s^{N,N}) - \phi(X_s^N, V_s^N)) dv \Bigg) ds$$

est une P-martingale locale. L'unicité pour ce problème de martingales s'obtient comme dans la preuve du lemme 1.5.

On se donne N processus de Poisson indépendants de paramètre λ (on note $(T_k^i)_{k\in\mathbb{N}^*}$ les instants de sauts du ième processus), N suites $(Z_k^i)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de marques I.I.D. sur $[0,1]$ et N variables (χ_0^i, ν_0^i) I.I.D. suivant la loi de densité f_0. La probabilité $P^{N,D,\Delta}$ est la loi du processus (X^N, V^N) construit de la manière suivante :

- pour $1 \leq i \leq N$, $(X_0^{N,i}, V_0^{N,i}) = (\chi_0^i, \nu_0^i)$
- sur $[0,T]$, en dehors des sauts du ième processus de Poisson, $V^{N,i}$ le paramètre de vitesse de la ième particule est constant et sa position évolue suivant un mouvement libre de vitesse $a(V^{N,i})$
- à l'instant T_k^i (si $T_k^i \leq T$), $V^{N,i}$ prend la valeur $\rho_i(X^N_{T_k^i}) \times Z_k^i$ si $\rho_i(X^N_{T_k^i}) > 0$ et reste constant sinon.

Remarque 2.1 – *Comme on peut le voir sur la construction que l'on vient d'en donner, $P^{N,D,\Delta}$ est symétrique.*

- *Si on cherche seulement à approcher la solution de (0.1) dans un domaine contenu dans D, on peut arrêter de suivre toute particule qui sort de D. En effet, le paramètre de vitesse d'une telle particule ne peut plus changer. La particule part donc à l'infini et n'interagit plus avec les autres.*

2.2 Propagation du chaos

Théorème 2.2 *On se donne f_0 une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ qui vérifie*

$$\sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^d \\ y\neq 0}} \frac{1}{|y|} \|f_0(.+y,.) - f_0(.,.)\|_{L^1} \leq K|y| \tag{2.1}$$

On note P la solution du problème de martingales (PM) partant de f_0 (théorème 1.4) et on pose $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}_+} p(t,x,v)dv$ pour p version mesurable des densités de P.
Pour $k \leq N$, on note $P_{(k)}^{N,D,\Delta}$ la loi des k premières particules sous $P^{N,D,\Delta}$. Alors en norme de variation sur $\mathcal{P}(D([0,T], \mathbb{R}^{kd} \times \mathbb{R}_+^k))$,

$$\left\| P_{(k)}^{N,D,\Delta} - P^{\otimes k} \right\| \leq 2k\lambda e^{3\lambda T} \left(\left(\sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}} + 2^d \sqrt{d} K |\Delta|^{\frac{1}{d}} \right) T + \int_0^T \int_{D^c} u(s,z)dzds \right) \tag{2.2}$$

Ainsi, pour $N \to +\infty$ avec $|D| \to +\infty$, $|\Delta| \to 0$ et $\frac{N|\Delta|}{|D|} \to +\infty$, il y a propagation du chaos.

Preuve : La preuve est basée sur le couplage utilisé par Perthame et Pulvirenti dans [2]. On va construire un système à $2N$ particules tel que la loi du sous-système constitué par les N premières particules est $P^{N,D,\Delta}$ et que celle du sous-système constitué par les N dernières est $P^{\otimes N}$.

Le couplage
On note $(X^N, Y^N) \in \mathbb{R}^{2Nd}$ et $(V^N, W^N) \in \mathbb{R}_+^{2N}$ les positions et les paramètres de vitesse des $2N$ particules.
On se donne N variables (χ_0^i, ν_0^i) I.I.D. suivant la loi de densité $f_0(x,v)$ et N processus de Poisson de paramètre λ indépendants. On note $(T_k^i)_{k\in\mathbb{N}^*}$ les temps de sauts successifs du ième processus. On se donne également, indépendamment du reste, N suites indépendantes $(Z_k^{i,1}, Z_k^{i,2}, Z_k^{i,3})_{k\in\mathbb{N}^*}$ de marques I.I.D. suivant la loi uniforme sur $[0,1]^3$. On construit le couplage de la façon suivante :

- pour $1 \leq i \leq N$, $(X_0^{N,i}, V_0^{N,i}) = (Y_0^{N,i}, W_0^{N,i}) = (\chi_0^i, \nu_0^i)$
- sur $[0,T]$, en dehors des sauts du ième processus de Poisson, $V^{N,i}$ le paramètre de vitesse de la ième particule et $W^{N,i}$ celui de la N+ième restent constants et les positions de ces deux particules évoluent respectivement suivant des mouvements libres de vitesse $a(V^{N,i})$ et $a(W^{N,i})$
- à l'instant T_k^i (si $T_k^i \leq T$), en notant $\rho_{i,k} = \rho_i(X_{T_k^i}^N)$ et $u_{i,k} = u(T_k^i, Y_{T_k^i}^{N,i})$ pour alléger les formules
  - si $\rho_{i,k} = u_{i,k} = 0$, alors $V^{N,i}$ et $W^{N,i}$ sont inchangés.
  - si $\rho_{i,k} > 0$ et $u_{i,k} = 0$ alors $W^{N,i}$ est inchangé et on pose $V_{T_k^i}^{N,i} = \rho_{i,k} \times Z_k^{2,i}$
  - si $\rho_{i,k} = 0$ et $u_{i,k} > 0$ alors $V^{N,i}$ est inchangé et on pose $W_{T_k^i}^{N,i} = u_{i,k} \times Z_k^{2,i}$
  - $\rho_{i,k} \geq u_{i,k} > 0$
    - si $Z_k^{1,i} \leq \frac{u_{i,k}}{\rho_{i,k}}$, on pose $V_{T_k^i}^{N,i} = W_{T_k^i}^{N,i} = u_{i,k} \times Z_k^{2,i}$
    - sinon on pose $V_{T_k^i}^{N,i} = u_{i,k} + (\rho_{i,k} - u_{i,k}) \times Z_k^{2,i}$ et $W_{T_k^i}^{N,i} = u_{i,k} \times Z_k^{3,i}$
  - si $0 < \rho_{i,k} < u_{i,k}$
    - si $Z_k^{1,i} \leq \frac{\rho_{i,k}}{u_{i,k}}$, on pose $V_{T_k^i}^{N,i} = W_{T_k^i}^{N,i} = \rho_{i,k} \times Z_k^{2,i}$
    - sinon on pose $W_{T_k^i}^{N,i} = \rho_{i,k} + (u_{i,k} - \rho_{i,k}) \times Z_k^{2,i}$ et $V_{T_k^i}^{N,i} = \rho_{i,k} \times Z_k^{3,i}$

Etape 1
Dans cette première étape qui utilise la compensation des mesures aléatoires de Poisson, nous majorons, pour $t \in [0,T]$, la probabilité pour que les trajectoires de la ième particule et de la (N+i)ème particule sur $[0,t]$ soient différentes. Par symétrie, cette probabilité est indépendante de i. On la note Q_t.

Soit $(\mathcal{F}_t^i)$ la filtration du processus $\sum_{k:T_k^i \le t}(1 + Z_k^{1,i}, Z_k^{2,i}, Z_k^{3,i})$.
On pose aussi $\mathcal{F}_0 = \sigma((\chi_0^i, \nu_0^i),\ 1 \le i \le N)$ et $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0 \vee (\vee_{i=1}^N \mathcal{F}_t^i)$. La mesure aléatoire $M^i = \sum_k \delta_{\{T_k^i, Z_k^{1,i}, Z_k^{2,i}, Z_k^{3,i}\}}$ est une $\mathcal{F}_t^i$– mesure de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]^3$ de compensateur $\lambda dt dz_1 dz_2 dz_3$. Par l'indépendance, M^i est encore une $\mathcal{F}_t$-mesure de Poisson de compensateur $\lambda dt dz_1 dz_2 dz_3$. On définit

$$G(s) = 1_{\{\max(u(s,Y_s^{N,1}),\rho_1(X_s^N))>0\}} \frac{\min(u(s,Y_s^{N,1}),\rho_1(X_s^N))}{\max(u(s,Y_s^{N,1}),\rho_1(X_s^N))} + 1_{\{\max(u(s,Y_s^{N,1}),\rho_1(X_s^N))=0\}}$$

$$H(s,z_1) = 1_{\{s\in(0,t]\}} 1_{\{z_1 \ge G(s)\}}$$

Les trajectoires de la première particule et de la (N+1)ème particule sur $[0,t]$ sont différentes si et seulement si il y a avant t un saut du premier processus de Poisson tel que les paramètres de vitesse sont égaux avant ce saut et prennent des valeurs différentes à l'instant du saut. Pour que le kième saut vérifie cette propriété, il faut que $H(T_k^1, Z_k^1) = 1$. Donc

$$Q_t \le \mathbb{E}\Big(\int_{\mathbb{R}_+\times[0,1]^3} H(s,z_1) M^1(ds dz_1 dz_2 dz_3)\Big) \tag{2.3}$$

On note $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ la tribu $\mathcal{F}_t$ prévisible. $H(s,z_1)$ est $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)\otimes\mathcal{B}([0,1]^3)$ mesurable. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\int_{\mathbb{R}_+\times[0,1]^3} H(s,z_1) M^1(ds dz_1 dz_2 dz_3)\Big) &= \mathbb{E}\Big(\int_{\mathbb{R}_+\times[0,1]^3} H(s,z_1) \lambda ds dz_1 dz_2 dz_3\Big)\\ &= \lambda \int_0^t \mathbb{E}\Big(1_{\{\max(u(s,Y_s^{N,1}),\rho_1(X_s^N))>0\}} \frac{|u(s,Y_s^{N,1}) - \rho_1(X_s^N)|}{\max(u(s,Y_s^{N,1}),\rho_1(X_s^N))}\Big) ds\end{aligned}$$

Avec (2.3), on en déduit

$$Q_t \le \lambda \int_0^t \mathbb{E}\Big(1_{\{\max(u(s,Y_s^{N,1}),\rho_1(X_s^N))>0\}} \frac{|u(s,Y_s^{N,1}) - \rho_1(X_s^N)|}{\max(u(s,Y_s^{N,1}),\rho_1(X_s^N))}\Big) ds$$

Or $\forall a,b,c \ge 0,\ 1_{\{\max(a,b)>0\}} \frac{|a-b|}{\max(a,b)} \le 1_{\{a=0\}} + 1_{\{a>0\}} \frac{|a-c|}{a} + 1_{\{\max(b,c)>0\}} \frac{|b-c|}{\max(b,c)}$

Donc

$$\begin{aligned}Q_t \le{}& \lambda \int_0^t \mathbb{E}\Big(1_{\{u(s,Y_s^{N,1})=0\}}\Big) ds + \lambda \int_0^t \mathbb{E}\Big(1_{\{u(s,Y_s^{N,1})>0\}} \frac{|u(s,Y_s^{N,1}) - \rho_1(Y_s^N)|}{u(s,Y_s^{N,1})}\Big) ds\\ &+ \lambda \int_0^t \mathbb{E}\Big(1_{\{\max(\rho_1(X_s^N),\rho_1(Y_s^N))>0\}} \frac{|\rho_1(X_s^N) - \rho_1(Y_s^N)|}{\max(\rho_1(X_s^N),\rho_1(Y_s^N))}\Big) ds\end{aligned} \tag{2.4}$$

Comme $Y_s^{N,1}$ suit la loi de densité $u(s,y)$, le premier terme du second membre de (2.4) est nul.

<u>Etape 2</u>
Cette seconde étape est consacrée à la majoration du second et du troisième terme du second membre de (2.4).

Majoration de $A_s = \mathbb{E}\Big(1_{\{u(s,Y_s^{N,1})>0\}} \frac{|u(s,Y_s^{N,1})-\rho_1(Y_s^N)|}{u(s,Y_s^{N,1})}\Big)$

Nous travaillons directement dans le cadre L^1 au lieu de passer dans L^2 comme le font Perthame et Pulvirenti.

$$\begin{aligned}
A_s &\leq \int_{\mathbb{R}^{Nd}} |u(s,y^1) - \rho_1(y^1,\dots,y^N)| dy^1 u(s,y^2)dy^2 \dots u(s,y^N)dy^N \\
&\leq \int_{D^c} u(s,y^1)dy^1 + \int_D \left| u(s,y^1) - \frac{1}{|\Delta|}\int_{\Delta(y^1)} u(s,z)dz \right| dy^1 \\
&+ \int_{D\times\mathbb{R}^{(N-1)d}} \left| \frac{1}{|\Delta|}\int_{\Delta(y^1)} u(s,z)dz - \rho_1(y^1,\dots,y^N)\right| dy^1 u(s,y^2)dy^2 \dots u(s,y^N)dy^N
\end{aligned} \tag{2.5}$$

On note A_s^2 et A_s^3 le second et le troisième terme du second membre. L'hypothèse (2.1) va nous permettre de contrôler A_s^2. Soit Γ l'hypercube de $\mathbb{R}^d$ de volume $2^d|\Delta|$ centré en 0.

$$\begin{aligned}
A_s^2 &\leq \frac{1}{|\Delta|}\int_D \int_{\Delta(x)} |u(s,x) - u(s,z)| dz dx \leq \frac{1}{|\Delta|}\int_D \int_\Gamma |u(s,x) - u(s,x+y)| dy dx \\
&\leq \frac{1}{|\Delta|}\int_\Gamma \|u(s,.) - u(s,.+y)\|_{L^1} dy
\end{aligned}$$

En utilisant (2.1) et la Remarque 1.2, on en déduit

$$A_s^2 \leq \frac{1}{|\Delta|}\int_\Gamma K|y|dy \leq \frac{1}{|\Delta|}\int_\Gamma K\sqrt{d}|\Delta|^{\frac{1}{d}} dy \leq 2^d\sqrt{d}K|\Delta|^{\frac{1}{d}} \tag{2.6}$$

La majoration de A_s^3 repose sur le fait que la variance d'une somme de variables indépendantes est égale à la somme des variances.

$$\begin{aligned}
A_s^3 &= \sum_\Delta \mathbb{E}\left| \frac{1}{N-1}\sum_{k=2}^N \left(1_\Delta(Y_s^{N,k}) - \mathbb{E}\left(1_\Delta(Y_s^{N,k})\right)\right)\right| \\
&\leq \sum_\Delta \sqrt{\frac{1}{N-1}\mathbb{E}\left(1_\Delta(Y_s^{N,2}) - \mathbb{E}\left(1_\Delta(Y_s^{N,2})\right)\right)^2} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{N-1}}\sum_\Delta \sqrt{\int_\Delta u(s,z)dz\left(1 - \int_\Delta u(s,z)dz\right)} \\
&\leq \sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}}\sqrt{\sum_\Delta \int_\Delta u(s,z)dz} \qquad \text{par l'inégalité de Schwarz} \\
&\leq \sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}}
\end{aligned}$$

Avec les inégalités (2.5) et (2.6), on obtient

$$A_s \leq \sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}} + 2^d\sqrt{d}K|\Delta|^{\frac{1}{d}} + \int_{D^c} u(s,z)dz \tag{2.7}$$

Majoration de $B_s = \mathbb{E}\left(1_{\{\max(\rho_1(X_s^N),\rho_1(Y_s^N))>0\}}\frac{|\rho_1(X_s^N)-\rho_1(Y_s^N)|}{\max(\rho_1(X_s^N),\rho_1(Y_s^N))}\right)$

Pour $y^N = (y^{N,1},\dots,y^{N,N}) \in \mathbb{R}^{Nd}$, on note $n_\Delta(y^N) = \sum_{i=1}^N 1_\Delta(y^{N,i})$.

$$\begin{aligned}
B_s &\le \mathbb{E}\left(1_{\{X_s^{N,1}\neq Y_s^{N,1}\}}\right)\\
&+\sum_\Delta \mathbb{E}\left(1_\Delta(X_s^{N,1})1_\Delta(Y_s^{N,1})1_{\{\max(n_\Delta(X_s^N),n_\Delta(Y_s^N))>1\}}\frac{|n_\Delta(X_s^N)-n_\Delta(Y_s^N)|}{\max(n_\Delta(X_s^N),n_\Delta(Y_s^N))-1}\right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Si $X_s^{N,1} \neq Y_s^{N,1}$, alors les trajectoires de la première particule et de la (N+1)ème particule sur $[0,s]$ sont différentes. Donc le premier terme du second membre est majoré par Q_s. On note B_s^2 le second terme. Sa majoration repose sur l'interchangeabilité des couples $(X_s^{N,i},Y_s^{N,i})$, $1\le i\le N$.

$$\begin{aligned}
B_s^2 &= \frac{1}{N}\sum_\Delta \mathbb{E}\left(1_{\{\max(n_\Delta(X_s^N),n_\Delta(Y_s^N))>1\}}\frac{|n_\Delta(X_s^N)-n_\Delta(Y_s^N)|\sum_{i=1}^N 1_\Delta(X_s^{N,i})1_\Delta(Y_s^{N,i})}{\max(n_\Delta(X_s^N),n_\Delta(Y_s^N))-1}\right)\\
&\le \frac{1}{N}\sum_\Delta \mathbb{E}\left(1_{\{\max(n_\Delta(X_s^N),n_\Delta(Y_s^N))>1\}}\frac{|n_\Delta(X_s^N)-n_\Delta(Y_s^N)|\min(n_\Delta(X_s^N),n_\Delta(Y_s^N))}{\max(n_\Delta(X_s^N),n_\Delta(Y_s^N))-1}\right)\\
&\le \frac{1}{N}\sum_\Delta \mathbb{E}\left(|n_\Delta(X_s^N)-n_\Delta(Y_s^N)|\right)\\
&\le \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \mathbb{E}\left(\sum_\Delta |1_\Delta(X_s^{N,i})-1_\Delta(Y_s^{N,i})|\right)\\
&\le \frac{2}{N}\sum_{i=1}^N \mathbb{E}\left(1_{\{X_s^{N,i}\neq Y_s^{N,i}\}}\right)\le 2Q_s
\end{aligned}$$

L'inégalité (2.8) fournit alors

$$B_s \le 3Q_s \tag{2.9}$$

Conclusion

En regroupant (2.9) et (2.7) dans (2.4), on obtient

$$Q_t \le \lambda\left(\left(\sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}}+2^d\sqrt{d}K|\Delta|^{\frac{1}{d}}\right)t+\int_0^t\int_{D^c}u(s,z)dzds\right)+3\lambda\int_0^t Q_sds$$

D'après le lemme de Gronwall,

$$Q_t \le \lambda\left(\left(\sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}}+2^d\sqrt{d}K|\Delta|^{\frac{1}{d}}\right)t+\int_0^t\int_{D^c}u(s,z)dzds\right)e^{3\lambda t} \tag{2.10}$$

Soit $k\le N$. La probabilité pour que les processus $(X^{N,1},V^{N,1},\dots,X^{N,k},V^{N,k})$ et $(Y^{N,1},W^{N,1},\dots,Y^{N,k},W^{N,k})$ diffèrent sur $[0,T]$ est inférieure à kQ_T. Comme $P_k^{N,D,\Delta}$ et $P^{\otimes k}$ sont les lois de ces processus, la norme de variation de leur différence est inférieure au double de cette probabilité. Avec (2.10), on en déduit (2.2). ∎

Remarque 2.3 *En nous limitant au tore* $T^d \simeq [0,1]^d$ *pour les positions des particules, comme le font Perthame et Pulvirenti [2], et en prenant* $D = T^d$*, nous aurions obtenu à la place de (2.2) une majoration en* $2k\lambda\left(\sqrt{\frac{1}{(N-1)|\Delta|}} + 2^d\sqrt{d}K|\Delta|^{\frac{1}{d}}\right)Te^{3\lambda T}$ *que l'on peut comparer avec leur résultat en* $Ck\lambda e^{6\lambda T}\sqrt{|\Delta|^{\frac{1}{d}} + \frac{1}{N|\Delta|}}$.

Comme $\sqrt{\frac{1}{(N-1)|\Delta|}} + 2^d\sqrt{d}K|\Delta|^{\frac{1}{d}} \leq \sqrt{2\left(\frac{1}{(N-1)|\Delta|} + 4^d dK^2|\Delta|^{\frac{2}{d}}\right)}$*, notre majoration fournit une meilleure décroissance de la norme de variation avec* $|\Delta|$*. En outre, elle ne nécessite pas les hypothèses techniques de majoration et de minoraration de* f_0 *faites par Perthame et Pulvirenti.*

Références

[1] P.A. Meyer. *Probabilités et Potentiel.* Hermann, 1966.

[2] B. Perthame and M. Pulvirenti. On some large systems of random particles which approximate scalar conservation laws. *Asymt. Anal.*, 10(3):263–278, 1995.

[3] B. Perthame and E. Tadmor. A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws. *Comm. Math. Phys.*, 136:501–517, 1991.

[4] A.S. Sznitman. Equations de type de Boltzmann spatialement homogènes. *Z. Warsch. Verw. Geb.*, 66:559–592, 1984.