SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE
ANZELM IWANIK

Sous-mesures symétriques sur un ensemble fini

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 32 (1998), p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1998__32__1_0>

Sous-mesures symétriques sur un ensemble fini

C. Dellacherie A. Iwanik

Introduction

Écartant de notre propos les "sous-mesures pathologiques" de [4], nous entendrons ici par "sous-mesure" une fonction croissante et sous-additive d'ensembles définie sur une tribu, et égale à l'enveloppe supérieure ponctuelle des mesures qu'elle majore. De telles fonctions d'ensemble se rencontrent communément en analyse, et tout particulièrement en théorie du potentiel. Dans cette théorie, il y a une forte analogie entre les opérateurs linéaires du type "potentiel" et les non-linéaires du type "réduite", l'opération "$\vee$" jouant ici le rôle de l'opération "$+$" là. Aussi était-il tentant de conjecturer qu'on avait, pour un espace de base fini de cardinalité n, un analogue du théorème de Carathéodory sur les enveloppes convexes qui majorerait le nombre minimal de mesures pour engendrer une sous-mesure par une fonction de n à croissance linéaire. Nous montrons ici qu'il n'en est rien. Plus précisément, si on se limite aux sous-mesures symétriques, i.e. dont la valeur sur un ensemble ne dépend que de la cardinalité de celui-ci et qui donc ne peuvent prendre qu'au plus $n+1$ valeurs distinctes, nous montrons que, dans le pire des cas, il faut exactement 2^{n-1} mesures pour engendrer la sous-mesure. Enfin, nous déterminons, toujours dans le cas fini mais de manière analogue à [3], les génératrices extrémales du cône convexe des sous-mesures symétriques : la simplicité de cette caractérisation, fournissant exactement 2^{n-1} éléments extrémaux, contraste avec l'inextricable complexité du cas général (cf. [1, 2]) des sous-mesures (pathologiques ou non).

1 Sous-mesures symétriques

Soient $E = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ et $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des mesures positives finies sur E. En particulier, la probabilité uniforme λ_A sur une partie non vide A de E appartient à $\mathcal{M}_n$. Notons $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des fonctions η, définies sur les parties de E, telles que η soit positive, croissante, sous-additive et $\eta(\emptyset) = 0$. À tout sous-ensemble non vide et borné H de $\mathcal{M}_n$ on associe la fonction

$$I_H(A) = \sup_{\mu \in H} \mu(A).$$

On a $I_H \in \mathcal{S}_n$ et on note $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des sous-mesures I_H où H est non vide borné dans $\mathcal{M}_n$.

Nous allons considérer aussi des familles de fonctions symétriques $\eta \in \mathcal{S}_n$, c'est-à-dire celles dont les valeurs $\eta(A)$ ne dependent que du cardinal $|A|$ (cf. [4]). Autrement dit, η symétrique signifie η invariant par rapport à l'action du groupe symétrique sur E. On écrit, respectivement, ${\mathcal{S}_n}^{\mathrm{sym}}$ et ${\mathcal{I}_n}^{\mathrm{sym}}$ pour indiquer qu'il s'agit de fonctions symétriques. Il est facile de voir que toutes ces familles sont des cônes convexes fermés dans l'espace $\mathbf{R}^{2^n}$.

Le lemme suivant est évident :

LEMME — *Soient $B, A_1, \ldots, A_k \subset E$ et $m \in \mathbf{N}$ tels que*

$$\sum_{i=1}^{k} 1_{A_i}(x) = m\, 1_B(x)$$

sur E. Alors $m\mu(B) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}_n$.

Si $J \in {\mathcal{I}_n}^{\mathrm{sym}}$, on écrit $J(A) = J_k$ quand $|A| = k$. La fonction J est alors complètement caracterisée par la suite $J_1, \ldots, J_n$.

THÉORÈME 1 — *Soit $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Il existe $J \in {\mathcal{I}_n}^{\mathrm{sym}}$ tel que $J_k = x_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ si et seulement si*

$$\frac{x_1}{1} \geq \frac{x_2}{2} \geq \ldots \geq \frac{x_n}{n}.$$

Démonstration. La condition est nécessaire : J étant la borne supérieure de mesures, on obtient du lemme, pour un B à $k+1$ points,

$$kJ_{k+1} \;=\; kJ(B) \;\leq\; \sum_{i \in B} J(B \setminus \{i\}) \;=\; (k+1)J_k.$$

La condition est aussi suffisante. En effet, on note que $kx_l \leq x_k$ pour tout $k \leq l$. Posons $J = I_H$, où

$$H = \{x_{|A|}\lambda_A \,:\, \emptyset \neq A \subset E\}.$$

Pour $|B| = k > 0$ on vérifie que $J(B) = x_k$, donc $J_k = x_k$. En effet,

$$J(B) = \sup\{\mu(B) \,:\, \mu \in H\} = \sup\{\mu(B) \,:\, \mu \in H,\ |\mathrm{supp}\,\mu| \geq k\}$$

$$= \sup\{\mu(B) \,:\, \mu \in H,\ B \subset \mathrm{supp}\,\mu\} = \sup\{x_l\, k/l \,:\, l \geq k\} = x_k.$$

2 Mesures engendrant une sous-mesure

Pour tout $n = 1, 2, \ldots$, $E = \{0, \ldots, n-1\}$ et $J \in \mathcal{I}_n$ posons $s(n, J) = \min\{|H| : J = I_H\}$ et

$$s(n) = \max_{J \in \mathcal{I}_n} s(n, J).$$

On écrit $s^{\mathrm{sym}}(n)$ si $\mathcal{I}_n$ est remplacée par $\mathcal{I}_n{}^{\mathrm{sym}}$. On constate aisément que $s^{\mathrm{sym}} \leq s$, $s(1) = s^{\mathrm{sym}}(1) = 1$, $s(2) = s^{\mathrm{sym}}(2) = 2$ et que les fonctions s, s^{sym} sont croissantes. Le résultat suivant implique en particulier que $s(3) = 4$ et que $n^{-1} \log s(n) \to \log 2$.

THÉORÈME 2 — *Pour tout $n \geq 3$ on a $2^{n-1} \leq s(n) \leq 2^n - n - 1$. En outre,*

$$s^{\mathrm{sym}}(n) = 2^{n-1}$$

pour tout $n \geq 1$.

Démonstration.

1. Afin de démontrer la minoration choisissons d'abord des nombres γ_k tels que

$$\frac{n}{n+1} \leq \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_{[(n+1)/2]} \leq 1$$

et posons $J = I_H$, où

$$H = \{\gamma_k \lambda_A : \emptyset \neq A \subset E,\ k = [(|A| + 1)/2]\}.$$

Évidemment $J \in \mathcal{I}_n{}^{\mathrm{sym}}$. Montrons que

$$J(B) = \gamma_l,$$

où $l = [(|B| + 1)/2]$, pour toute partie non vide B de E. On a clairement $J(B) \geq \gamma_l \lambda_B(B) = \gamma_l$. D'autre part, $J(B) = \gamma_k \lambda_A(B)$ pour un certain A avec $|A| = 2k - 1$. Lorsque $k \leq l$, nous avons $J(B) \leq \gamma_l$, tandis que pour $k > l$ on écrit:

$$J(B) = \gamma_k \, |B \cap A| \, / \, |A| \ \leq \ \gamma_k \frac{2l}{2k-1} \ \leq \ \frac{2l}{2k-1}$$

$$\leq 1 - \frac{1}{2l+1} \ \leq 1 - \frac{1}{n+1} \ \leq \ \gamma_l.$$

Supposons alors que $J = I_L$ et démontrons que $|L| \geq 2^{n-1}$. Comme on peut supposer que L est fini, il existe des mesures $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}$ dans L telles que $\mu_i(\{i\}) = \gamma_1$. Pour tout $j \neq i$ on obtient:

$$\mu_i(\{j\}) = \mu_i(\{i, j\}) - \mu_i(\{i\}) \leq J(\{i, j\}) - \gamma_1 = 0,$$

donc μ_i est concentrée sur i et égale à $\gamma_1 \lambda_{\{i\}}$. De même, il existe, pour tout A de 3 points, une mesure $\mu_A \in L$ satisfaisant $\mu_A(A) = \gamma_2$. La mesure μ_A est concentrée sur A, car si $j \notin A$ alors $[(|A \cup \{j\}| + 1)/2] = 2$, donc

$$\mu_A(A \cup \{j\}) \leq J(A \cup \{j\}) = \gamma_2 = \mu_A(A).$$

On constate que les mesures μ_A, où $|A| = 1,3$, sont distinctes entre elles. De même façon on obtient pour toute partie impaire $B \subset E$ une mesure $\mu_B \in L$ telle que μ_B est concentrée sur B et $\mu_B(B) = \gamma_{(|B|+1)/2}$. Notons que μ_B n'est concentrée sur aucune partie propre C de B, car on a

$$\mu_B(C) \leq J(C) = \gamma_{[(|C|+1)/2]} < \mu_B(B).$$

Par conséquent,

$$|L| \geq \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots = 2^{n-1}.$$

2. Pour obtenir la majoration de $s(n)$ supposons $J \in \mathcal{I}_n$. Par compacité, il existe, pour toute partie non vide A de E, une mesure $\mu_A \leq J$ telle que $J(A) = \mu_A(A)$. Donc $J = I_H$, où $H = \{\mu_A : \emptyset \neq A \subset E\}$. Ceci démontre que $s(n) \leq 2^n - 1$. Or, on peut choisir les mesures $\mu_{\{i,i'\}}$, où $i = 0, 1, \ldots, n-1$ et $i' = i + 1 \bmod n$, de telle manière que $\mu_{\{i,i'\}}(\{i\}) = J(\{i\})$, $\mu_{\{i,i'\}}(\{i'\}) = J(\{i,i'\}) - J(\{i\})$ et $\mu_{\{i,i'\}}(\{k\}) = 0$ si $k \neq i, i'$. Comme J est sous-additive, on a bien $\mu_{\{i,i'\}} \leq J$ et les mesures $\mu_{\{i,i'\}}$ réalisent les valeurs de J en $\{i\}$ et en $\{i,i'\}$ à la fois. Par conséquent, $J = I_L$, où $L = \{\mu_A : |A| \geq 2\}$, d'où la majoration souhaitée.

3. La majoration de $s^{\mathrm{sym}}(n)$ exige d'autres économies sur le choix de H. Soit $J \in \mathcal{I}_n{}^{\mathrm{sym}}$. Comme $J(A)$, où $\emptyset \neq A \subset E$, ne depend que de $|A|$, on peut bien poser $J(A) = J_k$, où $k = |A| = 1, \ldots, n$.

Pour trouver un assez petit H tel que notre J soit égale à I_H on définit des mesures μ_B $(0 \in B \subset E)$ de telle manière que $\mu_B \leq J$, $\mu_B(B) = J_{j+1}$ et $\mu_B(B \setminus \{0\}) = J_j$, où $j = |B| - 1$, comme suit

$$\mu_B = J_j \lambda_{B\setminus\{0\}} + (J_{j+1} - J_j)\lambda_{\{0\}}.$$

La vérification de la relation $\mu_B \leq J$ est facile grâce au Théorème 1 (notons qu'il suffit de vérifier l'inégalité $\mu_B(C) \leq J(C)$ pour $C \subset B$; dans le cas où $0 \in C$ et $j > 0$ utilisons la relation $J_{j+1} - J_j \leq J_j/j$). Ainsi les 2^{n-1} mesures μ_B réalisent les valeurs de J sur $\{B : 0 \in B\}$ aussi bien que sur $\{A : 0 \notin A\}$, ce qui achève de démontrer le théorème.

3 Points extrémaux

Notons $\mathcal{P}_n^{\mathrm{sym}}$ l'ensemble des sous-mesures J dans $\mathcal{I}_n^{\mathrm{sym}}$ telles que $J(E) = 1$. Cet ensemble est convexe et compact dans $\mathbf{R}^{2^n}$ donc tout élément de $\mathcal{P}_n^{\mathrm{sym}}$ s'écrit comme une combinaison convexe de points extrémaux. Nous allons caractériser et compter les points extrémaux de $\mathcal{P}_n^{\mathrm{sym}}$.

Toute sous-mesure symétrique $J \in \mathcal{I}_n^{\mathrm{sym}}$ est déterminée par sa fonction de répartition $x_k = J(\{0, \ldots, k-1\})$ (cette idée a été utilisée dans [3]). On sait du théorème 1 que les fonctions de répartition sont exactement les suites croissantes de nombres positifs $(x_1, \ldots, x_n)$ telles que la suite x_k/k décroisse. Il est clair que la correspondance entre les sous-mesures dans $\mathcal{P}_n^{\mathrm{sym}}$ et leurs fonctions de répartition établit un isomorphisme affine de $\mathcal{P}_n^{\mathrm{sym}}$ et l'ensemble convexe $\mathcal{F}_n$ des suites de nombres positifs caractérisées par les trois conditions suivantes :

a) $x_n = 1$,

b) x_k est croissante,

c) les pentes des vecteurs $(k,\ x_k)$ décroissent.

THÉORÈME 3 — *Soit x_k la fonction de répartition d'une sous-mesure J de $\mathcal{P}_n^{\mathrm{sym}}$. Alors J est un point extrémal de $\mathcal{P}_n^{\mathrm{sym}}$ si et seulement si*

$$x_{k-1} = x_k \quad \text{ou} \quad \frac{k-1}{k}\, x_k$$

pour tout $k = 2, \ldots, n$. Le nombre des points extrémaux est égal à 2^{n-1}.

Démonstration.

Soit $k \geq 2$. Il résulte des conditions b) et c) que

$$\frac{k-1}{k}\, x_k \leq x_{k-1} \leq x_k\,.$$

Si les deux inégalités sont strictes alors on s'aperçoit qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que les suites x^+, x^-, où

$$x_t^{\pm} = (1 \pm \epsilon) x_t$$

pour $t = 0, 1, \ldots, k-1$ et $x_t^{\pm} = x_t$ ailleurs, appartiennent à $\mathcal{F}_n$. Or, $x_t = (x_t^+ + x_t^-)/2$ d'où ni x ni J ne sont extrémales. D'autre part il est évident que si une des inégalités est toujours une égalité (pour $k = n, n-1, \ldots, 2$), alors x est un point extrémal dans $\mathcal{F}_n$ donc J en est un dans $\mathcal{P}_n^{\mathrm{sym}}$.

Comme pour tout $k = n, n-1, \ldots, 2$ il y a un choix entre les deux égalités, le nombre total des choix monte à 2^{n-1}, ce qui donne le résultat souhaité.

Références

[1] M. Bąk, *On the extremal submeasures on a 3-set*, Discuss. Math. **10** (1990), 41–45

[2] J. Ball, S. Eigen, J. Lindhe, *Extreme probability submeasures on 3 points*, Real Analysis Exchange **20**(1) (1994/95), 94–101

[3] J. B. Kadane, L. Wasserman, *Symmetric coherent Choquet capacities*, prépublication

[4] F. Topsøe, *Some remarks concerning pathological submeasures*, Math. Scand. **38** (1976), 159–166

C. Dellacherie, Mathématiques, URA CNRS 1378,
Université de Rouen, 76821 Mt-St-Aignan
e-mail : Claude.Dellacherie@univ-rouen.fr

A. Iwanik, Instytut Matematyki,
Politechnika Wrocławska, 50-370 Wrocław, Pologne
e-mail : iwanik@im.pwr.wroc.pl