Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Christophe Leuridan

Une démonstration élémentaire d'une identité de Biane et Yor

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 30 (1996), p. 255-260
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1996__30__255_0>

Une démonstration élémentaire d'une identité de Biane et Yor

Christophe Leuridan

Institut Fourier, Université de Grenoble I
BP 74, F-38402 St Martin d'Hères Cedex

Introduction

L'objet de cet article est de donner une démonstration élémentaire d'une identité entre lois browniennes due à P. Biane et M. Yor. Cette identité s'écrit :

$$\int_0^{+\infty} P_0^t \, dt = \left(\int_0^{+\infty} P_0^{\tau_r^0} \, dr \right) \circ \left(\int_{\mathbf{R}} (P_a^{\sigma_0})^\vee \, da \right)$$

avec des notations que nous détaillerons plus loin. Elle constitue une décomposition des trajectoires browniennes issues de 0 par rapport à leur dernier zéro avant chaque instant $t \in \mathbf{R}_+$.

P. Biane et M. Yor ont obtenu cette égalité (parmi beaucoup d'autres) dans [2], comme conséquence de la théorie des excursions browniennes. Ils l'ont ensuite utilisée dans [3] pour obtenir une nouvelle formulation du théorème de Ray [5] (décrivant la loi des temps locaux d'un mouvement brownien en un instant de loi exponentielle et indépendant du mouvement brownien) à partir des deux théorèmes de Ray [5] et Knight [4] les plus classiques (voir par exemple [6]).

Nous allons voir une démonstration qui ne fait pas appel à la théorie des excursions et n'utilise que des propriétés élémentaires du mouvement brownien. Explicitons maintenant les notations que nous avons utilisées pour écrire l'identité et qui serviront dans toute la suite.

Notations. — On note $\mathcal{W}$ l'espace des trajectoires à durée de vie finie, c'est-à-dire l'ensemble des applications continues w d'un segment $[0, \zeta(w)]$ dans $\mathbf{R}$. On munit $\mathcal{W}$ de la tribu engendrée par les fonctions coordonnées :

$$\begin{aligned} X_t : \mathcal{W} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ w &\longmapsto w(t) \text{ si } t \leq \zeta(w). \end{aligned}$$

On définit sur $\mathcal{W}$ les opérations suivantes :

• Concaténation :

Pour $w_1 \circ w_2 \in \mathcal{W}$, on note $w_1 \circ w_2$ l'élément de $\mathcal{W}$ défini par $\zeta(w_1 \circ w_2) = \zeta(w_1) + \zeta(w_2)$ et :

$$w_1 \circ w_2(t) = \left| \begin{array}{l} w_1(t) \text{ pour } 0 \leq t \leq \zeta(w_1) \\ w_1(\zeta(w_1)) + w_2(t - \zeta(w_1)) - w_2(0) \text{ pour } \zeta(w_1) \leq t \leq \zeta(w_1) + \zeta(w_2). \end{array} \right.$$

• Retournement temporel :

Pour $w \in \mathcal{W}$, $\check{w}$ est l'élément de $\mathcal{W}$ défini par $\zeta(\check{w}) = \zeta(w)$ et :

$$\check{w}(t) = w(\zeta(w) - t) \text{ pour } 0 \leq t \leq \zeta(w).$$

• Retournement spatio-temporel :

Pour $w \in \mathcal{W}$, $\widetilde{w}$ est l'élément de $\mathcal{W}$ défini par $\zeta(\widetilde{w}) = \zeta(w)$ et :

$$\widetilde{w}(t) = w(0) + w(\zeta(w)) - w(\zeta(w) - t) \text{ pour } 0 \leq t \leq \zeta(w).$$

La trajectoire $\widetilde{w}$ s'obtient à partir de la trajectoire w en effectuant un retournement spatial par rapport au niveau $\frac{1}{2}\big(w(0)+w(\zeta(w))\big)$, puis un retournement temporel. On remarquera que cette transformation ne modifie pas les extrémités des trajectoires puisque $\widetilde{w}(0) = w(0)$ et $\widetilde{w}(\zeta(\widetilde{w})) = w(\zeta(w))$.

Les trajectoires de $\mathcal{W}$ que nous considérons dans la suite sont obtenues en "tuant" des trajectoires browniennes en temps fini : étant donné une trajectoire $w \in \mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ et $t_0 \in \mathbf{R}_+$, on note w^{t_0} la trajectoire w "tuée à l'instant t_0", définie par $\zeta(w^{t_0}) = t_0$ et :

$$w^{t_0} = w(t) \text{ pour } 0 \leq t \leq t_0.$$

Pour $b \in \mathbf{R}$, on note P_b la mesure de Wiener issue de b, et si T est un instant aléatoire sur $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ presque sûrement fini sous P_b, on note P_b^T la mesure image de P_b par la fonction $w \mapsto w^{T(w)}$.

Les temps que nous utilisons ici sont de trois sortes :

- les temps fixes : $t_0 \in \mathbf{R}_+$.
- les instants d'atteinte d'un point par la trajectoire :

$$\sigma_b(w) = \inf\{t \in \mathbf{R}_+ \mid w(t) = b\} \text{ pour } b \in \mathbf{R}.$$

- les instants d'atteinte d'une valeur par un temps local :

$$\tau_r^b(w) = \inf\{t \in \mathbf{R}_+ \mid L_t^b(w) = r\} \text{ pour } b \in \mathbf{R} \text{ et } r \in \mathbf{R}_+,$$

où :

$$L_t^b(w) = \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{|w(s)-b| \leq \varepsilon\}} \, ds.$$

Avec ces notations, l'égalité de Biane et Yor :

$$\int_0^{+\infty} P_0^t \, dt = \left(\int_0^{+\infty} P_0^{\tau_r^0} \, dr\right) \circ \left(\int_{\mathbf{R}} P_a^{\sigma_0} \, da\right)^{\vee}$$

signifie que la mesure image de $\left(\int_0^{+\infty} P_0^{\tau_r^0} \, dr\right) \otimes \left(\int_{\mathbf{R}} P_a^{\sigma_0} \, da\right)$ par l'application $(w_1, w_2) \mapsto w_1 \circ \overset{\vee}{w}_2$ de $\mathcal{W}^2$ dans $\mathcal{W}$ est la mesure $\int_0^{+\infty} P_0^t \, dt$. En l'écrivant sous la forme :

$$\int_0^{+\infty} P_0^t \, dt = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^{+\infty} P_0^{\tau_r^0} \circ (P_a^{\sigma_0})^{\vee} \, dr\right) da\,,$$

elle s'interprète comme la désintégration de la mesure σ-finie $\int_0^{+\infty} P_0^t \, dt$ suivant la fonctionnelle $w \mapsto (w(\zeta(w)), L^0_{\zeta(w)}(w))$. Venons-en maintenant à la démonstration.

Démonstration de l'identité. — La preuve s'effectue en trois temps. La première étape consiste à désintégrer la mesure $\int_0^{+\infty} P_0^t \, dt$ suivant la fonctionnelle $w \mapsto (w(\zeta(w)), L^{w(\zeta(w))}_{\zeta(w)}(w))$. On a l'identité suivante :

THÉORÈME. — $\int_0^{+\infty} P_0^t \, dt = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^{+\infty} P_0^{\tau_r^a} \, dr\right) da.$

La deuxième étape consiste à transformer cette identité par retournement spatio-temporel. En remarquant que les probabilités P_0^t sont invariantes, et que l'on a (d'après la propriété de Markov) $P_0^{\tau_r^a} = P_0^{\sigma_a} \circ P_a^{\tau_r^a}$ pour $a \in \mathbf{R}$ et $r > 0$, on obtient l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} P_0^t \, dt = \left(\int_0^{+\infty} P_0^{\tau_r^0} \, dr\right)^{\sim} \circ \left(\int_{\mathbf{R}} P_a^{\sigma_0} \, da\right)^{\vee}.$$

Pour obtenir l'identité de Biane et Yor, il ne reste plus qu'à montrer l'invariance par retournement spatio-temporel de la mesure $\int_0^{+\infty} P_0^{\tau_r^0} \, dr$, ce qui fait l'objet de la troisième étape. La démonstration élémentaire que nous donnons permet de retrouver l'invariance des probabilités $P_0^{\tau_r^0}$ par retournement du temps (voir la remarque à la fin de l'article).

PREMIÈRE ÉTAPE.

Le théorème est une conséquence immédiate de l'observation suivante :

LEMME. — *Pour P_0-presque tout $w \in \mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ la mesure image de la mesure $da\, dr$ par l'application $(a, r) \mapsto \tau_r^a(w)$ de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$ est la mesure de Lebesque sur $\mathbf{R}_+$.*

Démonstration du lemme. — Il suffit de constater que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$:

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{\tau_r^a(w) \le t\}} dr\right) da = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{r \le L_t^a(w)\}} dr\right) da$$
$$= \int_{\mathbf{R}} L_t^a(w) \, da = t\,.$$

Démonstration du théorème. — Soit F une fonctionnelle mesurable de $\mathcal{W}$ dans $\mathbf{R}_+$. D'après le lemme, on a pour P_0-presque tout $w \in \mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$:

$$\int_0^{+\infty} F(w^t)\,dt = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^{+\infty} F(w^{\tau_r^a(w)})dr \right) da\,.$$

En intégrant cette égalité contre $P_0(dw)$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} P_0^t[F]\,dt = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^{+\infty} P_0^{\tau_r^a}[F]\,dr \right) da\,,$$

ce qui prouve le théorème.

DEUXIÈME ÉTAPE.

On effectue un retournement spatio-temporel dans l'égalité de la proposition. On remarque d'abord l'invariance des probabilités P_0^t. En effet, si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien issu de 0, alors pour tout $t \in \mathbf{R}_+$:

$$(B_t - B_{t-s})_{0\leq s\leq t} \text{ a même loi que } (B_s)_{0\leq s\leq t}.$$

On a donc :

$$\int_0^{+\infty} P_0^t\,dt = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^{+\infty} (P_0^{\tau_r^a})^{\sim} dr \right) da\,.$$

Or, d'après la propriété de Markov :

$$P_0^{\tau_r^a} = P_0^{\sigma_a} \circ P_a^{\tau_r^a} \quad \text{pour } a \in \mathbf{R} \text{ et } r > 0\,.$$

En remarquant que pour w_1 et $w_2 \in \mathcal{W}$:

$$w_1 \circ (w_2 + a) = w_1 \circ w_2$$

et :

$$(w_1 \circ w_2)^{\sim} = \widetilde{w}_2 \circ \widetilde{w}_1 + w_1(0) - w_2(0)\,,$$

on obtient :

$$(P_0^{\tau_r^a})^{\sim} = (P_0^{\sigma_a} \circ P_0^{\tau_r^0})^{\sim} = (P_0^{\tau_r^0})^{\sim} \circ (P_0^{\sigma_a})^{\sim} = (P_0^{\tau_r^0})^{\sim} \circ (P_a^{\sigma_0})^{\vee}\,.$$

Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} P_0^t\,dt = \left(\int_0^{+\infty} P_0^{\tau_r^0}\,dr \right)^{\sim} \circ \left(\int_{\mathbf{R}} P_a^{\sigma_0} da \right)^{\vee}\,.$$

TROISIÈME ÉTAPE.

Il s'agit de prouver l'invariance par retournement spatio-temporel de la mesure $\int_0^{+\infty} P_0^{\tau_r^0}\,dr$.

Pour cela, on munit $\mathcal{W}$ d'une métrique de la "convergence uniforme" en définissant la distance entre deux trajectoires $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$ par :

$$d(w_1, w_2) = \sup_{t\geq 0} \left| w_1(t \wedge \zeta(w_1)) - w_2(t \wedge \zeta(w_2)) \right| + \left| \zeta(w_1) - \zeta(w_2) \right|.$$

Soit F une fonctionnelle continue bornée, à support borné, de $\mathcal{W}$ dans $\mathbf{R}$. On a:

$$\int_0^{+\infty} (P_0^{\tau_r^0})^{\sim}[F]\,dr = \int P_0(dw) \int_0^{+\infty} F((w^{\tau_r^0(w)})^{\sim})\,dr$$
$$= \int P_0(dw) \int_0^{+\infty} F((w^t)^{\sim})\,dL_t^0 .$$

Le fait d'avoir choisi une fonctionnelle continue bornée à support borné permet d'utiliser le théorème de convergence dominée en approchant l'intégrale $\int_0^{+\infty} F((w^t)^{\sim})dL_t^0(w)$ par une somme:

$$\sum_{k=0}^{n-1} F((w^{t_k})^{\sim})(L_{t_{k+1}}^0 - L_{t_k}^0)(w),$$

avec $t_n > \cdots > t_0 = 0$ fixés.Or, sous la probabilité P_0, on a les identités en loi:

$$\left((X_t - X_{t-s})_{0\leq s\leq t}\,,\ (X_s)_{s\geq t}\right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left((X_s)_{0\leq s\leq t}\,,\ (X_s)_{s\geq t}\right)\ ,$$

d'où pour $k \in \{0,\ldots,n-1\}$:

$$\left((X_{t_k} - X_{t_k-s})_{0\leq s\leq t_k}\,,\ L_{t_{k+1}}^0 - L_{t_k}^0\right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left((X_s)_{0\leq s\leq t_k}\,,\ L_{t_{k+1}}^0 - L_{t_k}^0\right)\ .$$

Donc:

$$\int P_0(dw)\sum_{k=0}^{n-1} F((w^{t_k})^{\sim})(L_{t_{k+1}}^0 - L_{t_k}^0)(w) = \int P_0(dw)\sum_{k=0}^{n-1} F(w^{t_k})(L_{t_{k+1}}^0 - L_{t_k}^0)(w)\ .$$

Ainsi:

$$\int_0^{+\infty} (P_0^{\tau_r^0})^{\sim}[F]dr = \int_0^{+\infty} P_0^{\tau_r^0}[F]\,dr\ ,$$

ce qui prouve l'invariance de $\int_0^{+\infty} P_0^{\tau_r^0}\,dr$ par retournement spatio-temporel.

Remarque. — Cette démonstration permet de retrouver de façon élémentaire l'invariance des probabilités $P_0^{\tau_r^0}$ par retournement du temps qui est un résultat classique généralement obtenu comme conséquence de la théorie des excursions browniennes (voir [6] au chapitre XII, exercice 4.17) ou de la relation entre le pont et le pseudo-pont browniens (voir [1] ou [6] au chapitre VI exercice 2.29).

En effet, la mesure $\int_0^{+\infty} P_0^{\tau_r^0}\,dr$ est portée par les trajectoires de $\mathcal{W}$ commençant et finissant en 0. Pour de telles trajectoires, le retournement spatio-temporel se compose d'une symétrie par rapport au niveau 0 et d'un retournement du temps. La mesures $\int_0^{+\infty} P_0^{\tau_r^0}\,dr$ étant symétrique (*i.e.* invariante par la transformation $w \mapsto -w$), son invariance par retournement spatio-temporel entraîne son invariance par retournement du temps. L'invariance des probabilités $P_0^{\tau_r^0}$ s'obtient en conditionnant par rapport à la fonctionnelle L_ζ^0 (qui est elle aussi invariante par retournement du temps).

Bibliographie

[1] Biane P., Le Gall J.F., Yor M. — *Un processus qui ressemble au pont brownien*, Séminaire de Probabilités XXI, LNM **1247** Springer (1987), 270–275.

[2] Biane P., Yor M. — *Valeurs principales associées aux temps locaux browniens*, Bulletin des Sciences Mathématiques **111** (1987), 23–101.

[3] Biane P., Yor M. — *Sur la loi des temps locaux browniens pris en un temps exponentiel*, Séminaire de Probabilités XXII, LNM **1321** Springer (1988), 454–466.

[4] Knight F.B. — *Random walks and a sojourn density process of Brownian motion*, Transactions of the American Mathematical Society **109** (1963), 56–86.

[5] Ray D.B. — *Sojourn times of a diffusion process*, Illinois Journal of mathematics **7** (1963), 615–630.

[6] Revuz D., Yor M. — *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, 1991.