Séminaire de probabilités (Strasbourg)

C. Cocozza-Thivent
M. Roussignol

Comparaison des lois stationnaire et quasi-stationnaire d'un processus de Markov et application à la fiabilité

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 30 (1996), p. 24-39
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1996__30__24_0>

Comparaison des lois stationnaire et quasi-stationnaire d'un processus de Markov et application à la fiabilité

C. Cocozza-Thivent et **M. Roussignol**

Université de Marne la Vallée,
Equipe d'Analyse et de Mathématiques Appliquées
2 rue de la Butte Verte
93166 Noisy le Grand Cedex, France

Résumé : En utilisant une technique de couplage, nous obtenons une majoration de la distance entre la loi quasi-stationnaire et la loi stationnaire renormalisée d'un processus de Markov modélisant l'évolution d'un système mécanique. Ce système est formé de composants qui tombent en panne soit indépendamment soit sous l'effet d'un mode commun et qui sont réparés indépendamment les uns des autres.
Cette majoration permet de montrer que le taux de défaillance asymptotique de Vésely est une bonne approximation du taux de défaillance asymptotique réel du système lorsque celui-ci est fiable.

Mots clés : fiabilité, taux de défaillance, taux de défaillance de Vésely, loi stationnaire, loi quasi-stationnaire, couplage.

Abstract : Using coupling techniques, we obtain an upper bound for the distance between the quasi-stationnary law and the normalized stationnary law of a Markov process which modelizes the evolution of a mechanical system. This system is made up of components which drop down either independently from each other or by the effect of a common failure and which are repared independently form each other.
This upper bound allows us to prove that the asymptotic Vesely failure rate is a good approximation of the asymptotic failure rate when the system is reliable.

Key words : reliability, failure rate, Vesely failure rate, stationnary law, quasi-stationnary law, coupling.

I. Introduction

Considérons un processus de Markov $(\eta_t)_{t \geqslant 0}$ à valeurs dans un ensemble fini E et soit $(\mathcal{M}, \mathcal{P})$ une partition de E. Le processus représente l'évolution au cours du temps d'un système mécanique, l'ensemble $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{P}$) est l'ensemble des états de marche (resp. de panne) du système. Nous cherchons à calculer numériquement la fiabilité de ce système, la fiabilité à l'instant t étant définie par : $R(t) = \mathbb{P}(\eta_s \in \mathcal{M}, \forall s \leqslant t)$.
Lorsque le cardinal de E est élevé, ce qui est le cas dès que le système étudié est formé par exemple de plus d'une dizaine de composants, il n'est pas possible d'utiliser les formules classiques (exponentielle de matrice ou résolution de système différentiel).

La fiabilité à l'instant t peut s'écrire :

$$R(t) = \exp\left(- \int_0^t \lambda(s)\, ds \right)$$

où λ est le taux de défaillance du système. Le taux de défaillance à l'instant t possède l'interprétation suivante :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta \to 0+} \frac{1}{\Delta} \mathbb{P}(\eta_{t+\Delta} \in \mathcal{P} \,/\, \eta_s \in \mathcal{M}, \ \forall s \in [0, t])$$

Vésely a proposé d'effectuer les calculs de fiabilité en remplaçant $\lambda(t)$ par :

$$\lambda_v(t) = \lim_{\Delta \to 0+} \frac{1}{\Delta} \mathbb{P}(\eta_{t+\Delta} \in \mathcal{P} \,/\, \eta_t \in \mathcal{M})$$

Le taux λ_v est appelé taux de Vésely ou taux des états de marche critique. Ce taux est facile à calculer à partir d'une modélisation par arbre de défaillance, modélisation la plus utilisée par les ingénieurs pour des systèmes complexes.

L'expérience montre que pour des "systèmes fiables", le taux de Vésely est une bonne approximation du taux de défaillance, mais aucune démonstration mathématique n'en a été donnée jusqu'à présent. Dans [PG] Pagès et Gondran justifient empiriquement l'approximation pour des t petits (ce qui se conçoit bien intuitivement) et pour t tendant vers l'infini ce qui est beaucoup plus surprenant.

La motivation du travail présenté ici a été de chercher une justification au fait que $\lambda_v(\infty) = \lim_{t \to +\infty} \lambda_v(t)$ soit proche de $\lambda(\infty) = \lim_{t \to +\infty} \lambda(t)$ pour des "systèmes fiables" et de préciser ce faisant ce qu'est un "système fiable".

Cela nous a amené à nous intéresser à la comparaison entre la loi stationnaire et la loi quasi-stationnaire (relativement à $\mathcal{M}$) du processus $(\eta_t)_{t \geq 0}$. Nous obtenons des résultats lorsque le générateur du processus de Markov $(\eta_t)_{t \geq 0}$ a une forme particulière correspondant à un système formé de composants fonctionnant indépendamment hormis la présence d'un mode commun de défaillance.

Le système que nous allons étudier est formé d'un ensemble C de composants, chaque composant pouvant se trouver en marche (état noté 1) ou en panne (état noté 0). L'ensemble des états du système est donc $E = \{0, 1\}^C$. Pour η dans E et c dans C, $\eta(c) = 1$ (resp. $\eta(c) = 0$) si le composant c est en marche (resp. en panne) dans la configuration η, et η s'identifie à un sous ensemble de C par $\eta = \{c \in C, \eta(c) = 1\}$.

Pour η dans E, A un sous-ensemble de C et j dans $\{0, 1\}$, nous notons $\eta^{A,j}$ la configuration définie par :

$$\eta^{A,j}(c') = \begin{cases} \eta(c') & \text{si } c' \notin A \\ j & \text{si } c' \in A \end{cases}$$

Nous supposons que le générateur du processus de Markov $(\eta_t)_{t \geq 0}$ définissant l'évolution de ce système s'écrit :

$$(1) \qquad Af(\eta) = \sum_{c \in \eta} \lambda(c)\,[\,f(\eta^{c,0}) - f(\eta)\,] + \sum_{c \notin \eta} \mu(c)\,[\,f(\eta^{c,1}) - f(\eta)\,]$$

$$+ \Lambda \sum_{A \subset \eta} \prod_{c \in A} p(c) \prod_{c \notin A,\, c \in \eta} (\,1 - p(c)\,)\,[\,f(\eta^{A,0}) - f(\eta)\,]$$

où les $\lambda(c)$, $\mu(c)$ et Λ sont des réels positifs et les $p(c)$ des réels compris entre 0 et 1. L'interprétation est la suivante : chaque composant c a un taux de défaillance "intrinsèque" $\lambda(c)$ et un taux de réparation $\mu(c)$; en outre un mode commun (c'est-à-dire un événement qui peut affecter simultanément plusieurs composants) survient avec un taux Λ. Lorsque ce mode commun survient, indépendamment chaque composant c en marche est mis en panne avec la probabilité $p(c)$ et n'est pas affecté avec la probabilité $1-p(c)$.

Dans le paragraphe II, nous construisons un processus de Markov dont la loi stationnaire est égale sur $\mathcal{M}$, à une renormalisation près, à la loi quasi-stationnaire du processus initial (lemme II.1). La comparaison entre les lois stationnaire et quasi-stationnaire du processus initial est donc ramenée à la comparaison des lois stationnaires de deux processus. Par une méthode de couplage, nous obtenons, pour le processus dont le générateur est donné par (1), une majoration de la distance (sur $\mathcal{M}$) entre ces deux lois (proposition II.4).

Dans le paragraphe III, nous remarquons que les taux de défaillance et de Vésely asymptotiques s'expriment respectivement à l'aide des lois stationnaire et quasi-stationnaire (proposition III.1), ce qui nous permet d'obtenir un majorant de l'erreur relative entre taux de Vésely et taux de défaillance asymptotiques (proposition III.2). Dans cette majoration interviennent le terme $\max_{\eta \in \mathcal{M}} \sum_{\xi \in \mathcal{P}} A(\eta, \xi)$ et le quotient "indisponibilité asymptotique sur taux de défaillance asymptotique". Le fait que le premier terme tende vers 0 exprimera pour nous le fait que le système devient "de plus en plus fiable". D'autre part il nous faudra montrer que le deuxième terme reste borné lorsque le système devient "de plus en plus fiable". C'est ce que nous établissons dans le lemme III.5 pour des systèmes très généraux. Finalement nous obtenons le résultat suivant (proposition III.7) :

Proposition

Plaçons-nous dans le cas du système dont le générateur est donné par (1) et supposons ce système cohérent. Lorsque les taux de défaillance des composants critiques et le taux de défaillance de mode commun tendent vers 0, les autres taux de défaillance restant bornés supérieurement et les taux de réparation bornés inférieurement par des quantités *strictement positives, alors l'erreur relative entre le taux de défaillance asymptotique et le taux de Vésely asymptotique tend vers 0.*

Nous terminons par quelques commentaires (paragraphe IV).

II. Comparaison entre loi stationnaire et loi quasi-stationnaire

Pour l'instant, nous ne faisons pas d'hypothèse sur la forme du générateur de notre processus $(\eta_t)_{t \geqslant 0}$ et nous étudions sa loi stationnaire relativement à l'ensemble $\mathcal{M}$, c'est-à-dire que nous nous intéressons à la loi de probabilité $\tilde{\pi}$ sur $\mathcal{M}$ donnée par :

$$\tilde{\pi}(\eta) = \lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}(\eta_t = \eta \;/\; \eta_s \in \mathcal{M} \;\; \forall s \leqslant t)$$

Notons A la matrice des taux de transition du système et $A_{\mathcal{M}}$ sa restriction à $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ D'après le théorème de Péron-Frobénius [Sen], si $A_{\mathcal{M}}$ est irréductible et si $\mathcal{M}$ n'est pas absorbant, c'est-à-dire si le temps de sortie de $\mathcal{M}$ est fini presque-sûrement, alors $A_{\mathcal{M}}$ possède une valeur propre s (appelée valeur propre de Péron-Frobénius) simple réelle et strictement négative, les autres valeurs propres de $A_{\mathcal{M}}$ étant de partie réelle inférieure à s et $\tilde{\pi}$ est un vecteur propre à gauche de $A_{\mathcal{M}}$ associé à s : $\tilde{\pi}\, A_{\mathcal{M}} = s\; \tilde{\pi}$. En outre $\lambda(\infty) = -s$.

Supposons que le processus $(\eta_t)_{t \geqslant 0}$ possède une unique loi stationnaire notée π. Nous souhaitons comparer les lois de probabilité $\tilde{\pi}$ et $\frac{\pi}{\pi(\mathcal{M})}$ sur $\mathcal{M}$. Pour cela, grâce au lemme suivant, nous allons nous ramener à la comparaison des lois stationnaires de deux processus markoviens.

Lemme II.1 *: Soit $0 < K < 1$ et Δ un point n'appartenant pas à l'ensemble $\mathcal{M}$. Notons $\tilde{A}$ la matrice génératrice définie sur $\mathcal{M} \cup \{\Delta\}$ par :*

$$\tilde{A}(\eta, \xi) = A(\eta, \xi) \quad \text{pour } \eta \in \mathcal{M} \text{ et } \xi \in \mathcal{M}$$

$$\tilde{A}(\eta, \Delta) = -\sum_{\xi \in \mathcal{M}} A(\eta, \xi) = \sum_{\xi \in \mathcal{P}} A(\eta, \xi)$$

$$\tilde{A}(\Delta, \xi) = \frac{|s|K}{1-K}\, \tilde{\pi}(\xi)$$

$$\tilde{A}(\Delta, \Delta) = \frac{sK}{1-K}$$

où s est la valeur propre de Péron-Frobénius de $A_{\mathcal{M}}$.

Alors la loi $\tilde{\mu}$ donnée par :

$$\tilde{\mu}(\eta) = K\, \tilde{\pi}(\eta) \quad \text{pour } \eta \in \mathcal{M}$$

$$\tilde{\mu}(\Delta) = 1 - K$$

est invariante pour $\tilde{A}$.

Démonstration : C'est une simple vérification de la formule $\tilde{\mu}\,\tilde{A} = 0$. Ce lemme est général et ne suppose aucune forme particulière pour la matrice A. ▬

Notons $D(\infty) = \lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}(\eta_t \in \mathcal{M})$ et choisissons $K = \pi(\mathcal{M}) = D(\infty)$, alors $\tilde{\mu}(\mathcal{M}) = K = \pi(\mathcal{M})$ et la comparaison de $\tilde{\pi} = \frac{\tilde{\mu}}{\pi(\mathcal{M})}$ et $\frac{\pi}{\pi(\mathcal{M})}$ sur $\mathcal{M}$ se ramène à la comparaison de $\tilde{\mu}$ et π sur $\mathcal{M}$.

Afin de comparer les lois stationnaires associées à A et $\tilde{A}$, nous allons définir un couplage, c'est-à-dire que nous allons définir un processus markovien de saut sur $E \times (\mathcal{M} \cup \Delta)$ que nous notons (par abus) $(\eta_t, \tilde{\eta}_t)_{t \geqslant 0}$ tel que $(\eta_t)_{t \geqslant 0}$ soit un processus de Markov de matrice génératrice A et $(\tilde{\eta}_t)_{t \geqslant 0}$ un processus de Markov de matrice génératrice $\tilde{A}$.

Nous supposons maintenant que le générateur de $(\eta_t)_{t \geqslant 0}$ est de la forme (1). Lorsque η est dans $\mathcal{M}$, nous notons $\mathcal{C}(\eta)$ l'ensemble des composants qui sont critiques pour η, c'est-à-dire les composants tels que leur défaillance entraine la défaillance du système :

$$\mathcal{C}(\eta) = \{c; \eta(c) = 1, \eta^{c,0} \in \mathcal{P}\}$$

Nous définissons le couplage de telle sorte que les processus $(\eta_t)_{t \geqslant 0}$ et $(\tilde{\eta}_t)_{t \geqslant 0}$ se comportent le plus possible de la même manière. Plus précisément si $\tilde{\eta}_t$ appartient à $\mathcal{M}$, et si c est en marche pour les configurations $\eta(t)$ et $\tilde{\eta}(t)$, il aura tendance à tomber en panne simultanément pour $\eta(t)$ et $\tilde{\eta}(t)$, si c est en panne dans les configurations $\eta(t)$ et $\tilde{\eta}(t)$, il aura tendance à être réparé simultanément pour $\eta(t)$ et $\tilde{\eta}(t)$. Lorsque $\tilde{\eta}(t) = \Delta$, les deux processus se comportent indépendamment.

Nous définissons donc le générateur $\underline{A}$ du processus couplé de la manière suivante.
Lorsque $\tilde{\eta}$ appartient à $\mathcal{M}$,

$$\underline{A}f(\eta, \tilde{\eta}) =$$

$$\sum_c \lambda(c)\, 1_{\{c \in \eta \cap \tilde{\eta},\, c \notin \mathcal{C}(\tilde{\eta})\}} [f(\eta^{c,0}, \tilde{\eta}^{c,0}) - f(\eta, \tilde{\eta})]$$

$$+ \sum_c \lambda(c)\, 1_{\{c \in \eta \cap \tilde{\eta},\, c \in \mathcal{C}(\tilde{\eta})\}} [f(\eta^{c,0}, \Delta) - f(\eta, \tilde{\eta})]$$

$$+ \sum_c \lambda(c)\, 1_{\{c \in \eta,\, c \notin \tilde{\eta}\}} [f(\eta^{c,0}, \tilde{\eta}) - f(\eta, \tilde{\eta})]$$

$$+ \sum_c \lambda(c)\, 1_{\{c \notin \eta,\, c \in \tilde{\eta},\, c \notin \mathcal{C}(\tilde{\eta})\}} [f(\eta, \tilde{\eta}^{c,0}) - f(\eta, \tilde{\eta})]$$

$$+ \sum_c \lambda(c)\, 1_{\{c \notin \eta,\, c \in \tilde{\eta},\, c \in \mathcal{C}(\tilde{\eta})\}} [f(\eta, \Delta) - f(\eta, \tilde{\eta})]$$

$$+ \sum_{c} \mu(c)\, 1_{\{ c \notin \eta,\, c \notin \tilde\eta \}} \, [\, f(\eta^{c,1}, \tilde\eta^{c,1}) - f(\eta, \tilde\eta)\,]$$

$$+ \sum_{c} \mu(c)\, 1_{\{ c \notin \eta,\, c \in \tilde\eta \}} \, [\, f(\eta^{c,1}, \tilde\eta) - f(\eta, \tilde\eta)\,]$$

$$+ \sum_{c} \mu(c)\, 1_{\{ c \in \eta,\, c \notin \tilde\eta \}} \, [\, f(\eta, \tilde\eta^{c,1}) - f(\eta, \tilde\eta)\,]$$

$$+ \Lambda \sum_{A \subset \eta \cup \tilde\eta} \prod_{c \in A} p(c) \prod_{c \in \eta \cup \tilde\eta, c \notin A} (1 - p(c))\, 1_{\{\tilde\eta^{A,0} \in \mathcal{M}\}} [\, f(\eta^{A,0}, \tilde\eta^{A,0}) - f(\eta, \tilde\eta)\,]$$

$$+ \Lambda \sum_{A \subset \eta \cup \tilde\eta} \prod_{c \in A} p(c) \prod_{c \in \eta \cup \tilde\eta, c \notin A} (1 - p(c))\, 1_{\{\tilde\eta^{A,0} \in \mathcal{P}\}} [\, f(\eta^{A,0}, \Delta) - f(\eta, \tilde\eta)\,]$$

Lorsque $\tilde\eta = \Delta$:

$$\underline{A}f(\eta, \Delta) =$$

$$\sum_{c \in \eta} \lambda(c)\, [\, f(\eta^{c,0}, \Delta) - f(\eta, \Delta)\,] \;+\; \sum_{c \notin \eta} \mu(c)\, [\, f(\eta^{c,1}, \Delta) - f(\eta, \Delta)\,]$$

$$+ \Lambda \sum_{A \subset \eta} \prod_{c \in A} p(c) \prod_{c \in \eta, c \notin A} (1 - p(c))\, [\, f(\eta^{A,0}, \Delta) - f(\eta, \Delta)\,]$$

$$+ \sum_{\zeta \in \mathcal{M}} \frac{|s|\, D(\infty)}{1 - D(\infty)}\, \tilde\pi(\zeta)\, [\, f(\eta, \zeta) - f(\eta, \Delta)\,]$$

Pour vérifier que le générateur ci-dessus constitue bien un couplage entre A et $\tilde{A}$, il suffit de vérifier que si $f(\eta, \tilde\eta) = g(\eta)$ (resp. $f(\eta, \tilde\eta) = h(\tilde\eta)$), alors $\underline{A} f(\eta, \tilde\eta) = Ag(\eta)$ (resp. $\underline{A}f(\eta, \tilde\eta) = \tilde{A}h(\tilde\eta)$), ce qui se fait sans difficulté.

Pour évaluer la ressemblance des deux processus lorsqu'ils appartiennent tous deux à $\mathcal{M}$, nous considérons la "fonction-test" suivante :

$$f(\eta, \tilde\eta) = |\, d(\eta, \tilde\eta)\,|\, 1_{\eta \in \mathcal{M},\, \tilde\eta \in \mathcal{M}}$$

où $d(\eta, \tilde\eta)$ est la différence symétrique entre η et $\tilde\eta$:

$$d(\eta, \tilde\eta) = \{c;\, \eta(c) = 1, \tilde\eta(c) = 0\} \cup \{c;\, \eta(c) = 0, \tilde\eta(c) = 1\}$$

et $|\, d(\eta, \tilde\eta)\,|$ le cardinal de $d(\eta, \tilde\eta)$.

Lemme II.2 *: Soit f la fonction-test définie ci-dessus. Alors :*
a) pour $\eta \in \mathcal{M}$ et $\tilde\eta \in \mathcal{M}$:

$$\underline{A}f(\eta, \tilde\eta) \leqslant - \sum_{c \in d(\eta, \tilde\eta)} [\, \lambda(c) + \mu(c) + \Lambda\, p(c)\,]$$

b) pour $\tilde{\eta} = \Delta$:

$$\underline{A}f(\eta, \Delta) = \sum_{\zeta \in \mathcal{M}} \frac{|s|\, D(\infty)}{\bar{D}(\infty)} \bar{\pi}(\zeta)\, |d(\eta, \zeta)|\, 1_{\eta \in \mathcal{M}}$$

c) pour $\eta \in \mathcal{P}$, $\tilde{\eta} \in \mathcal{M}$:

$$\underline{A}f(\eta, \tilde{\eta}) = \sum_c \mu(c)\, 1_{\{c \notin \eta,\, c \notin \tilde{\eta},\, \eta^{c,1} \in \mathcal{M}\}} |d(\eta, \tilde{\eta})|$$

$$+ \sum_c \mu(c)\, 1_{\{c \notin \eta,\, c \in \tilde{\eta},\, \eta^{c,1} \in \mathcal{M}\}} [\,|d(\eta, \tilde{\eta})| - 1\,]$$

Démonstration : a) Supposons η et $\tilde{\eta}$ dans $\mathcal{M}$. Pour $f(\eta, \tilde{\eta}) = |d(\eta, \tilde{\eta})|\, 1_{\eta \in \mathcal{M},\, \tilde{\eta} \in \mathcal{M}}$, nous obtenons :

$$\underline{A}f(\eta, \tilde{\eta}) = - \sum_c \lambda(c)\, 1_{\{c \in \eta \cap \tilde{\eta},\, c \notin \mathcal{C}(\tilde{\eta}),\, c \in \mathcal{C}(\eta)\}} |d(\eta, \tilde{\eta})|$$

$$- \sum_c \lambda(c)\, 1_{\{c \in \eta \cap \tilde{\eta},\, c \in \mathcal{C}(\tilde{\eta})\}} |d(\eta, \tilde{\eta})| - \sum_c \lambda(c)\, 1_{\{c \in \eta,\, c \notin \tilde{\eta},\, c \notin \mathcal{C}(\eta)\}}$$

$$- \sum_c \lambda(c)\, 1_{\{c \in \eta,\, c \notin \tilde{\eta},\, c \in \mathcal{C}(\eta)\}} |d(\eta, \tilde{\eta})| - \sum_c \lambda(c)\, 1_{\{c \notin \eta,\, c \in \tilde{\eta},\, c \notin \mathcal{C}(\tilde{\eta})\}}$$

$$- \sum_c \lambda(c)\, 1_{\{c \notin \eta,\, c \in \tilde{\eta},\, c \in \mathcal{C}(\tilde{\eta})\}} |d(\eta, \tilde{\eta})| - \sum_c \mu(c)\, 1_{\{c \notin \eta,\, c \in \tilde{\eta}\}}$$

$$- \sum_c \mu(c)\, 1_{\{c \in \eta,\, c \notin \tilde{\eta}\}}$$

$$- \Lambda \sum_{A \subset \eta \cup \tilde{\eta}} \prod_{c \in A} p(c) \prod_{c \in \eta \cup \tilde{\eta},\, c \notin A} (1 - p(c))\, 1_{\{\eta^{A,0} \in \mathcal{P}\} \cup \{\tilde{\eta}^{A,0} \in \mathcal{P}\}} |d(\eta, \tilde{\eta})|$$

$$- \Lambda \sum_{A \subset \eta \cup \tilde{\eta}} \prod_{c \in A} p(c) \prod_{c \in \eta \cup \tilde{\eta},\, c \notin A} (1 - p(c))\, 1_{\{\eta^{A,0} \in \mathcal{M},\, \tilde{\eta}^{A,0} \in \mathcal{M}\}} |A \cap d(\eta, \tilde{\eta})|.$$

En majorant les deux premiers termes par 0, en majorant $-|d(\eta, \tilde{\eta})|$ par -1 dans les quatre termes suivants et par $-|A \cap d(\eta, \tilde{\eta})|$ dans l'avant dernier terme, nous obtenons :

$$\underline{A}f(\eta, \tilde{\eta}) \leqslant - \sum_{c \in d(\eta, \tilde{\eta})} [\lambda(c) + \mu(c)]$$

$$- \sum_{A \subset \eta \cup \tilde{\eta}} \Lambda \prod_{c \in A} p(c) \prod_{c \in \eta \cup \tilde{\eta},\, c \notin A} (1 - p(c))\, |A \cap d(\eta, \tilde{\eta})|$$

Or, nous avons :

$$\sum_{A \subset \eta \cup \tilde{\eta}} \prod_{c \in A} p(c) \prod_{c \in \eta \cup \tilde{\eta}, c \notin A} (1 - p(c)) \, |A \cap d(\eta, \tilde{\eta})| =$$

$$\sum_{A_1 \subset \eta \cap \tilde{\eta}^c} \prod_{c \in A_1} p(c) \prod_{c \in \eta \cap \tilde{\eta}^c, c \notin A_1} (1 - p(c)) \, |A_1|$$

$$+ \sum_{A_2 \subset \eta^c \cap \tilde{\eta}} \prod_{c \in A_2} p(c) \prod_{c \in \eta^c \cap \tilde{\eta}, c \notin A_2} (1 - p(c)) \, |A_2|$$

Etant donnés deux ensembles A et B, $A \subset B$, nous pouvons écrire :

$$\sum_{A \subset B} \prod_{c \in A} p(c) \prod_{c \in B, c \notin A} (1 - p(c)) \, |A| = \mathbb{E}\Big(\sum_{c \in B} Y_c \Big)$$

les variables aléatoires Y_c étant indépendantes, de loi de Bernouilli de paramètres respectifs p(c) : $\mathbb{P}(Y_c = 1) = p(c)$, $\mathbb{P}(Y_c = 0) = 1 - p(c)$.

Nous en déduisons :

$$\sum_{A \subset B} \prod_{c \in A} p(c) \prod_{c \in B, c \notin A} (1 - p(c)) \, |A| = \sum_{c \in B} p(c),$$

et finalement :

$$\underline{A}f(\eta, \tilde{\eta}) \leqslant - \sum_{c \in d(\eta, \tilde{\eta})} [\, \lambda(c) + \mu(c) + \Lambda \, p(c) \,]$$

Dans les cas b) et c), les calculs ne présentent pas de difficulté. ▬

Soit $\underline{m}$ la loi stationnaire du processus couplé, ses marginales sont π et $\tilde{\mu}$.

Lemme II.3 : *Notons* $N = |\, C \,|$ *le nombre de composants du système et posons :*

$$\underline{\lambda} = \min_c \lambda(c), \quad \underline{\mu} = \min_c \mu(c), \quad \bar{\mu} = \max_c \mu(c), \quad \underline{p} = \min_c p(c)$$

Alors :

$$\sum_{\eta, \tilde{\eta}} \underline{m}(\eta, \tilde{\eta}) \, | \, d(\eta, \tilde{\eta}) \, | \, 1_{\{ \eta \in \mathcal{M}, \tilde{\eta} \in \mathcal{M} \}}$$

$$\leqslant \frac{N}{\underline{\lambda} + \underline{\mu} + \Lambda \underline{p}} \; [\; \lambda(\infty) D(\infty) + \bar{\mu} \, N \, \bar{D}(\infty) \,]$$

Démonstration : En écrivant que $\underline{m} \; \underline{A} \; f = 0$, et en utilisant le lemme II.2, nous obtenons :

$$\sum_{\eta \in \mathcal{M}, \tilde{\eta} \in \mathcal{M}} \underline{m}(\eta, \tilde{\eta}) \sum_{c \in d(\eta, \tilde{\eta})} [\, \lambda(c) + \mu(c) + \Lambda \, p(c) \,]$$

$$\leqslant \sum_{\eta \in \mathcal{M}} \underline{m}(\eta, \Delta) \sum_{\xi \in \mathcal{M}} \frac{|\, s \,| \, D(\infty)}{\bar{D}(\infty)} \, \tilde{\pi}(\xi) \, | \, d(\eta, \xi) \, | + \sum_{\eta \in \mathcal{P}, \tilde{\eta} \in \mathcal{M}} \underline{m}(\eta, \tilde{\eta}) \times$$

$$\Big\{ \sum_c \mu(c) \, 1_{\{ c \notin \eta, \, c \notin \tilde{\eta}, \, \eta^{c,1} \in \mathcal{M} \}} \, | \, d(\eta, \tilde{\eta}) \, | + \sum_c \mu(c) \, 1_{\{ c \notin \eta, \, c \in \tilde{\eta} \}} \, [\, | \, d(\eta, \tilde{\eta}) \, | - 1 \,] \Big\}$$

Une majoration grossière nous donne :

$$\sum_{\eta,\,\tilde{\eta}} \underline{m}(\eta,\tilde{\eta})\, \mathrm{I}\, d(\eta,\tilde{\eta})\, \mathrm{I}\, 1_{\{\eta\in\mathcal{M},\tilde{\eta}\in\mathcal{M}\}}$$

$$\leqslant \frac{N}{\underline{\lambda} + \underline{\mu} + \Lambda\, \underline{p}} \left\{ \lambda(\infty)\, D(\infty) + \bar{\mu}\, N\, \overline{D}(\infty) \right\}. \blacksquare$$

Nous sommes maintenant en mesure de comparer les mesures π et $\tilde{\mu}$ sur $\mathcal{M}$.

Proposition II.4

Posons $\overline{D}(\infty) = 1 - D(\infty) = \pi(\mathcal{P})$ Alors, pour un processus dont le générateur est donné par (1), nous avons :

$$\sum_{\eta\in\mathcal{M}} |\pi(\eta) - \tilde{\mu}(\eta)| \leqslant \frac{2\,N\,D(\infty)}{\underline{\lambda} + \underline{\mu} + \Lambda\, \underline{p}}\, \lambda(\infty) + 2\,\overline{D}(\infty) \left\{ \frac{\bar{\mu} N^2}{\underline{\lambda} + \underline{\mu} + \Lambda\, \underline{p}} + 1 \right\}$$

Démonstration : Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{\eta\in\mathcal{M}} |\pi(\eta) - \tilde{\mu}(\eta)| &\leqslant \sum_{\eta\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_{\underline{m}} \left(| 1_{\eta(t)=\eta} - 1_{\tilde{\eta}(t)=\eta} | \right) \\
&\leqslant \underline{m}(\eta\neq\tilde{\eta}, \eta\in\mathcal{M}) + \underline{m}(\eta\neq\tilde{\eta}, \tilde{\eta}\in\mathcal{M}) \\
&\leqslant 2\,\underline{m}(\eta\neq\tilde{\eta}, \eta\in\mathcal{M}, \tilde{\eta}\in\mathcal{M}) + \pi(\mathcal{P}) + \tilde{\mu}(\mathcal{P}) \\
&\leqslant 2\,\underline{m}(\eta\neq\tilde{\eta}, \eta\in\mathcal{M}, \tilde{\eta}\in\mathcal{M}) + 2\,[\,1 - D(\infty)\,] \\
&\leqslant 2 \sum_{\eta,\,\tilde{\eta}} \underline{m}(\eta,\tilde{\eta})\, \mathrm{I}\, d(\eta,\tilde{\eta})\, \mathrm{I}\, 1_{\{\eta\in\mathcal{M},\tilde{\eta}\in\mathcal{M}\}} + 2\,\overline{D}(\infty)
\end{aligned}$$

La proposition II.4 découle alors du lemme II.3. ▬

III. Approximation de Vésely

Nous souhaitons obtenir une majoration de l'erreur relative entre le taux de défaillance asymptotique du système, $\lambda(\infty)$, et le taux de Vésely asymptotique, $\lambda_V(\infty)$. Pour cela, nous commençons par exprimer ces taux à l'aide des lois stationnaire et quasi-stationnaires.

Proposition III.1

$$\lambda_V(\infty) = \sum_{\eta\in\mathcal{M}} \sum_{\xi\in\mathcal{P}} \frac{\pi(\eta)}{\sum_{\zeta\in\mathcal{M}} \pi(\zeta)}\, A(\eta,\xi)$$

$$\lambda(\infty) = \sum_{\eta\in\mathcal{M}} \sum_{\xi\in\mathcal{P}} \tilde{\pi}(\eta)\, A(\eta,\xi)$$

Démonstration : Les taux λ_v et λ peuvent s'écrire :

$$\lambda_v(t) = \sum_{\eta \in \mathcal{M}} \sum_{\xi \in \mathcal{P}} \mathbb{P}(\eta_t = \eta \; / \; \eta_t \in \mathcal{M}) \; A(\eta, \xi)$$

et $$\lambda(t) = \sum_{\eta \in \mathcal{M}} \sum_{\xi \in \mathcal{P}} \mathbb{P}(\eta_t = \eta \; / \; \eta_s \in \mathcal{M} \;\; \forall s \leqslant t) \; A(\eta, \xi)$$

La proposition en découle immédiatement. ▬

La proposition suivante est une conséquence des propositions II.4 et III.1.

Proposition III.2

Pour un processus dont le générateur est donné par (1), nous avons :

$$\frac{|\lambda(\infty) - \lambda_v(\infty)|}{\lambda(\infty)} \leqslant 2 \max_{\eta \in \mathcal{M}} \sum_{\xi \in \mathcal{P}} A(\eta, \xi) \times$$

$$\left\{ \frac{N}{\underline{\lambda} + \underline{\mu} + \Lambda \underline{p}} + \frac{\overline{D}(\infty)}{\lambda(\infty)} \frac{1}{D(\infty)} \left[\frac{\overline{\mu} N^2}{\underline{\lambda} + \underline{\mu} + \Lambda \underline{p}} + 1 \right] \right\}$$

Cette proposition va nous permettre de justifier l'approximation de Vésely pour les temps grands.

Lorsque le système considéré devient "de plus en plus fiable", les taux défaillance et de Vésely tendent vers 0, il est donc important, pour se convaincre que l'approximation de Vésely est bonne, de montrer que l'erreur relative entre les taux tend vers 0.
Nous pouvons penser que si nous donnons une définition correcte de ce que signifie qu'un système devient "de plus en plus fiable", nous aurons $\max_{\eta \in \mathcal{M}} \sum_{\xi \in \mathcal{P}} A(\eta, \xi)$ qui tend vers 0. La proposition III.2 montrera donc que l'erreur relative tend vers 0 si nous savons prouver que le quotient $\frac{\overline{D}(\infty)}{\lambda(\infty)}$ reste borné.

Pour $A \subset E$, notons $\tau_A = \inf(t \, ; \, \eta_t \in A)$ le premier temps d'entrée dans A.

Pour η dans $\mathcal{M}$, soit $MTTF(\eta) = \mathbb{E}(\tau_{\mathcal{P}} / \eta_0 = \eta) = \mathbb{E}_\eta(\tau_{\mathcal{P}})$ le "MTTF" (Mean Time To Failure) ou temps moyen de première défaillance du système, lorsque l'état initial est η.
Le résultat suivant est un résultat général relatif aux processus markoviens irréductibles.

Proposition III.3

$$\frac{1}{\lambda(\infty)} = \sum_{\eta \in \mathcal{M}} \tilde{\pi}(\eta) \, MTTF(\eta)$$

Démonstration : On montre ([PG]) que, dans le cas irréductible, $A_{\mathcal{M}}$ est inversible et que :

$$\mathrm{MTTF}(\eta) = - \sum_{\xi \in \mathcal{M}} A_{\mathcal{M}}^{-1}(\eta, \xi)$$

Par conséquent :

$$\sum_{\eta \in \mathcal{M}} \tilde{\pi}(\eta)\,\mathrm{MTTF}(\eta) = - \sum_{\xi \in \mathcal{M}} \tilde{\pi} A_{\mathcal{M}}^{-1}(\xi)$$

Or $\tilde{\pi}$ est un vecteur propre à gauche de $A_{\mathcal{M}}$ associé à la valeur propre s : $\tilde{\pi}A_{\mathcal{M}} = s\,\tilde{\pi}$, donc :

$$\tilde{\pi} A_{\mathcal{M}}^{-1} = \frac{1}{s}\tilde{\pi}$$

Nous en déduisons :

$$\sum_{\eta \in \mathcal{M}} \tilde{\pi}(\eta)\,\mathrm{MTTF}(\eta) = - \frac{1}{s} \sum_{\xi \in \mathcal{M}} \tilde{\pi}(\xi) = \frac{1}{|s|} = \frac{1}{\lambda(\infty)} . \blacksquare$$

Dans un premier temps, supposons que les composants fonctionnent indépendamment et sans mode commun. Supposons qu'il existe un élément η de $\mathcal{P}$ pour lequel k composants sont en panne ($\sum_c 1_{\{\eta(c)=0\}} = k$) et que tout état correspondant à au plus k-1 composants en panne soit un état de marche ($\{\eta\,;\sum_c 1_{\{\eta(c)=0\}} = k-1\} \subset \mathcal{M}$), en termes "fiabilistes" k est l'ordre de la plus petite coupe. On vérifie facilement que si les taux de défaillance sont d'ordre ε par rapport aux taux de réparation, alors $\overline{D}(\infty)$ est d'ordre ε^k, car , pour tout η dans E, $\pi(\eta) = \prod_{c \in \eta} \frac{\mu(c)}{\lambda(c)+\mu(c)} \prod_{c \notin \eta} \frac{\lambda(c)}{\lambda(c)+\mu(c)}$. D'autre part, le corollaire 6.3 de [CR] et la proposition II.3 ci-dessus permettent de voir que $\frac{1}{\lambda(\infty)}$ est d'ordre $\frac{1}{\varepsilon^k}$. Nous voyons donc que dans ce cas, le quotient $\frac{\overline{D}(\infty)}{\lambda(\infty)}$ reste borné lorsque ε tend vers 0.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général d'un processus markovien irréductible. Le temps moyen de réparation ou "MTTR" (Mean Time To Repair) est défini de la même manière que le MTTF en échangeant les ensembles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{P}$:

$$\mathrm{MTTR}(\eta) = \mathbb{E}(\tau_{\mathcal{M}} / \eta_0 = \eta) = \mathbb{E}_\eta(\tau_{\mathcal{P}}).$$

En fiabilité, on définit également le MUT (Mean Up Time) et le MDT (Mean Down Time) qui sont respectivement les durées moyennes de bon fonctionnement et de réparation à l'asymptotique et on montre que ([PG]) :

$$\overline{D}(\infty) = \frac{\mathrm{MDT}}{\mathrm{MUT} + \mathrm{MDT}}$$

avec : $$\text{MDT} = \sum_{\eta \in \mathcal{P}} \mu_1(\eta)\, \text{MTTR}(\eta)$$

$$\text{MUT} = \sum_{\eta \in \mathcal{M}} \mu_2(\eta)\, \text{MTTF}(\eta)$$

où μ_1 et μ_2 sont des probabilités portées respectivement par $\mathcal{P}$ et $\mathcal{M}$.

Nous obtenons finalement :

$$(2) \qquad \frac{\bar{D}(\infty)}{\lambda(\infty)} = \frac{\text{MDT}}{\sum_{\eta \in \mathcal{M}} \mu_2(\eta)\, \text{MTTF}(\eta) + \text{MDT}} \times \sum_{\eta \in \mathcal{M}} \tilde{\pi}(\eta)\, \text{MTTF}(\eta)$$

$$\leqslant \frac{\text{MDT} \sum_{\eta \in \mathcal{M}} \tilde{\pi}(\eta)\, \text{MTTF}(\eta)}{\sum_{\eta \in \mathcal{M}} \mu_2(\eta)\, \text{MTTF}(\eta)}$$

Un système est dit cohérent si pour tous η_1 et η_2 vérifiant $\eta_1 \subset \eta_2$, alors :

- $\eta_1 \in \mathcal{M} \Rightarrow \eta_2 \in \mathcal{M}$
- $\eta_2 \in \mathcal{P} \Rightarrow \eta_1 \in \mathcal{P}$

Nous avons montré dans [CR] que s'il existe un couplage croissant pour le processus considéré (au sens de la définition 3.1 de [CR]) et si le système est cohérent, alors MTTF(η) est une fonction croissante de η, et on vérifie de même que MTTR(η) est une fonction décroissante de η. Des conditions (bien naturelles !) pour l'existence d'un couplage croissant sont données dans la proposition 5.3 de [CR], elles sont trivialement vérifiées dans le cas du processus dont le générateur est donné par (1).

Lemme III.4 *: Soit η_{mp} l'état de marche parfaite ($\eta_{mp}(c) = 1,\ \forall c$) et η_{pt} l'état de panne totale ($\eta_{pt}(c) = 0,\ \forall c$). Dans le cas d'un système cohérent pour lequel il existe un couplage croissant, nous avons :*

$$\frac{\bar{D}(\infty)}{\lambda(\infty)} \leqslant \frac{MTTR(\eta_{pt})}{\sum_{\eta \in \mathcal{M}} \mu_2(\eta)\, \mathbf{P}_\eta(\tau_{\eta_{mp}} < \tau_{\mathcal{P}})}$$

Démonstration : D'après les propriétés de monotonie en η de MTTR(η) et MTTF(η), nous avons :

$$\text{MDT} \leqslant \text{MTTR}(\eta_{pt}) \quad \text{et} \quad \sum_{\eta \in \mathcal{M}} \tilde{\pi}(\eta)\, \text{MTTF}(\eta) \leqslant \text{MTTF}(\eta_{mp})$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \text{MTTF}(\eta) &= \mathbb{E}_\eta(\tau_{\mathcal{P}}) \\ &\geqslant \mathbb{E}_\eta(\tau_{\mathcal{P}}\, 1_{\{\tau_{\eta_{mp}} < \tau_{\mathcal{P}}\}}) \end{aligned}$$

$$\geqslant \mathbb{P}_\eta(\tau_{\eta_{mp}} < \tau_{\mathcal{P}})\, \mathbb{E}_{\eta_{mp}}(\tau_{\mathcal{P}})$$
$$= \mathbb{P}_\eta(\tau_{\eta_{mp}} < \tau_{\mathcal{P}})\, \mathrm{MTTF}(\eta_{mp})$$

donc : $$\sum_{\eta \in \mathcal{M}} \mu_2(\eta)\, \mathrm{MTTF}(\eta) \geqslant \sum_{\eta \in \mathcal{M}} \mu_2(\eta)\, \mathbb{P}_\eta(\tau_{\eta_{mp}} < \tau_{\mathcal{P}})\, \mathrm{MTTF}(\eta_{mp})$$

En reportant ces inégalités dans la formule (2) , on obtient le résultat énoncé. ▬

Nous dirons que le système considéré est classique si le processus associé est irréductible et si le système se comporte selon la description ci-dessous (déjà donnée dans [CR], paragraphe 2) :
le système se compose de plusieurs types de composants : composants doublés par des composants de secours en redondance passive et composants "simples" c'est-à-dire non doublés. Lorsque la configuration du système vaut η, chaque composant c a un taux de défaillance égal à $\lambda(c, \eta)$ et un taux de réparation égal à $\mu(c, \eta)$. Le fait que le taux de défaillance de c puisse dépendre de la configuration η du système permet de tenir compte du fait que le composant c peut être plus ou moins sollicité suivant l'état des autres composants. La dépendance (éventuelle) en η du taux de réparation permet par exemple de tenir compte d'un nombre de réparateurs limité et d'une priorité que l'on s'est donnée dans l'ordre des réparations. Un composant de secours c refuse de démarrer à la sollicitation avec la probabilité $\gamma(c)$. Des défaillances de mode commun peuvent apparaître : lorsque la configuration du système vaut η, un événement arrive avec un taux $\Lambda(\eta)$ et entraîne la défaillance de chaque composant c en bon état avec une probabilité $m(c, \eta)$ et ceci indépendamment des autres composants.

Le système décrit par le générateur (1) est classique dès qu'il est irréductible, c'est-à-dire dès que les taux de défaillance $\lambda(c)$ et les taux de réparation $\mu(c)$ sont strictement positifs.

Lemme III.5 *: Supposons que le système soit cohérent et classique. Lorsque les taux de défaillance du système restent bornés supérieurement et les taux de réparation bornés inférieurement par des quantités strictement positives alors le quotient* $\dfrac{D(\infty)}{\lambda(\infty)}$ *reste borné.*

Démonstration : Si les taux de défaillance restent bornés supérieurement et les taux de réparation bornés inférieurement par des quantités strictement positives et si le système est classique, la proposition 5.3 de [CR] permet de construire une réalisation d'un système minorant le système initial, au sens où si, à l'instant $t = 0$, la configuration de ce nouveau système est inférieure à celle du système initial alors cela reste vrai pour tout instant t. Lorsque nous considérerons les quantités relatives au système minorant, nous les indexerons par "min". Si le système est de plus cohérent, nous obtenons ([CR]) :

$$MTTR(\eta_{pt}) \leqslant MTTR_{min}(\eta_{pt})$$
$$\mathbb{P}_{\eta}(\tau_{\eta_{mp}} < \tau_{\mathcal{P}}) \geqslant \mathbb{P}_{\eta, min}(\tau_{\eta_{mp}} < \tau_{\mathcal{P}}).$$

Et le lemme III.4 donne :

$$\frac{\overline{D}(\infty)}{\lambda(\infty)} \leqslant \frac{MTTR_{min}(\eta_{pt})}{\min\limits_{\eta \in \mathcal{M}} \mathbb{P}_{\eta, min}(\tau_{\eta_{mp}} < \tau_{\mathcal{P}})} < +\infty . \blacksquare$$

Définition III.6 *: Un composant c est critique s'il existe un état η de $\mathcal{M}$ tel que $\eta^{c,0}$ appartienne à $\mathcal{P}$.*

Proposition III.7

Plaçons-nous dans le cas du système dont le générateur est donné par (1) et supposons ce système cohérent. Lorsque les taux de défaillance des composants critiques et le taux de défaillance de mode commun tendent vers 0, les autres taux de défaillance restant bornés supérieurement et les taux de réparation bornés inférieurement par des quantités strictement positives, alors l'erreur relative entre le taux de défaillance asymptotique et le taux de Vésely asymptotique tend vers 0.

Démonstration : Pour le système dont le générateur est donné par (1), lorsque les taux de défaillance des composants critiques et le taux de défaillance de mode commun tendent vers 0, la quantité $\max\limits_{\eta \in \mathcal{M}} \sum\limits_{\xi \in \mathcal{P}} A(\eta, \xi)$ tend vers 0. La proposition III.7 est donc une conséquence immédiate de la proposition III.2 et du lemme III.5. $\blacksquare$

IV. Commentaires

Nous avons justifié l'utilisation du taux de Vésely asymptotique (facile à calculer) à la place du taux de défaillance asymptotique beaucoup plus difficile (voire impossible) à obtenir pour des systèmes de grande taille dans le cas de systèmes formés de composants fonctionnant intrinsèquement indépendamment et soumis de plus à des défaillances de type mode commun. Nous pensons que le résultat reste vrai pour des systèmes plus généraux, du type système classique au sens de la définition III.5. Le point d'achoppement actuel est la proposition II.4 (et elle seule) que nous ne savons pas généraliser. Néanmoins, nous pensons qu'un résultat analogue reste vrai et que l'asymptotique dans laquelle il faut se placer est celle des systèmes qui deviennent "parfaitement fiables" au sens suivant :

un système devient parfaitement fiable si la quantité $\max\limits_{\eta \in \mathcal{M}} \sum\limits_{\xi \in \mathcal{P}} A(\eta, \xi)$ tend vers 0, les taux de défaillance du système restant bornés supérieurement et les taux de réparation bornés inférieurement par des quantités strictement positives.

Nous n'avons établi de résultat que pour les taux asymptotiques. Nous nous dédouanons de ce peu par le résultat suivant qui justifie l'utilisation du taux asymptotique.

Proposition IV.1

Considérons un système classique qui vérifie les hypothèses suivantes :

- le taux de réparation $\mu(c, \eta)$ du composant c lorsque le système est dans la configuration η est une fonction croissante de η,

- le taux de défaillance $\lambda(c, \eta)$ du composant c lorsque le système est dans la configuration η est une fonction décroissante de η,

- la probabilité $m(c, \eta)$ pour que le composant c soit affecté lors d'un mode commun survenant lorsque le système est dans la configuration η, est une fonction décroissante de η,

- le taux $A(\eta)$ d'arrivée du mode commun est une fonction décroissante de η.

Notons R(t) la fiabilité du système au temps t lorsque l'état initial est l'état de marche parfaite. Alors :

$$R(t + s) \leqslant R(t)\, R(s)$$

c'est-à-dire que le système (partant de l'état de marche parfaite) est NBU et :

$$R(t) \geqslant e^{-\lambda(\infty)t}$$

Démonstration : La propriété de Markov permet d'écrire :

$$R(t + s) = \mathbb{P}(\eta_u \in \mathcal{M}, \forall u \leqslant t + s \,/\eta_0 = \eta_{mp})$$

$$= \sum_{\eta \in \mathcal{M}} \mathbb{P}(\eta_u \in \mathcal{M}\ \forall u \leqslant s,\ \eta_s = \eta \,/\eta_0 = \eta_{mp})\, \mathbb{P}(\eta_u \in \mathcal{M}\ \forall u \leqslant t \,/\, \eta_0 = \eta)$$

Or, d'après [CR], sous les hypothèses de la proposition IV.1, la fiabilité à l'instant t, $\mathbb{P}(\eta_u \in \mathcal{M}\ \forall u \leqslant t \,/\, \eta_0 = \eta)$ est une fonction croissante de l'état initial η, donc :

$$\mathbb{P}(\eta_u \in \mathcal{M}\ \forall u \leqslant t \,/\, \eta_0 = \eta) \leqslant \mathbb{P}(\eta_u \in \mathcal{M}\ \forall u \leqslant t \,/\, \eta_0 = \eta_{mp}) = R(t),$$

et nous obtenons :

$$R(t + s) \leqslant \sum_{\eta \in \mathcal{M}} \mathbb{P}(\eta_u \in \mathcal{M}\ \forall u \leqslant s,\ \eta_s = \eta \,/\eta_0 = \eta_{mp})\, R(t) = R(s)\, R(t).$$

Nous en déduisons que, pour tout s :

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)\,du\right) \geqslant \exp\left(-\int_s^{s+t} \lambda(u)\,du\right) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s+u)\,du\right)$$

et en faisant tendre s vers l'infini, nous avons :

$R(t) \geqslant e^{-\lambda(\infty)t}$. ▬

Cette proposition montre donc que, pour les systèmes usuels, le calcul de $e^{-\lambda(\infty)t}$ fournit une valeur pessimiste de la fiabilité. Donc, si lors d'une étude de fiabilité prévisionnelle l'ingénieur montre que les objectifs sont atteints en calculant la fiabilité par la formule $e^{-\lambda(\infty)t}$, il ne commet pas d'erreur sur la conclusion. Le travail que nous avons mené justifie asymptotiquement l'approximation de $e^{-\lambda(\infty)t}$ par $e^{-\lambda_V(\infty)t}$, donc on peut penser que pour des systèmes "très fiables", $e^{-\lambda_V(\infty)t}$ fournit une approximation "raisonnable" de la fiabilité.

Bibliographie

[CR] C. Cocozza-Thivent, M. Roussignol : *Techniques de couplage en fiabilité,* Ann. I.H.P., 31 n°1, 119-141,1995.

[PG] A. Pages, M. Gondran : *Fiabilité des systèmes,* Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, Eyrolles, 1980.

[Sen] E. Seneta : *Non-negative Matrices and Markov Chains,* Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, 1981.