SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JACQUES AZÉMA
CATHERINE RAINER
MARC YOR

Une propriété des martingales pures

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 30 (1996), p. 243-254
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1996__30__243_0>

Une propriété des martingales pures.

J. Azéma, C. Rainer, M. Yor

Laboratoire de Probabilités, tour 56, 3ème étage, 4 place Jussieu,
75252 Paris cedex 05

1 Introduction, notations.

Soit (M_t) une martingale locale continue, nulle en zéro, vérifiant $<M,M>_\infty = +\infty$ (cette dernière condition sert à éviter des lourdeurs rédactionnelles). Soit $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration naturelle (on appelle 'filtration naturelle' la plus petite filtration vérifiant les conditions habituelles à laquelle (M_t) est adaptée).

On pose, pour tout $t \geq 0$,

$$C_t = \inf\{s \geq 0, <M,M>_s > t\},$$

et pour tout $t > 0$,

$$C_t^- = C_{t-}.$$

Le processus (C_t) est strictement croissant et continu à droite; de plus, pour tout $s \geq 0$, C_s est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt. On note $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ la filtration $(\mathcal{F}_{C_t})$.
Le processus $(B_t) = (M_{C_t})$ est un $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-mouvement brownien qui vérifie,

$$\forall t \geq 0,\ M_t = B_{<M,M>_t}.$$

Il est appelé le 'mouvement brownien de Dambis-Dubins-Schwarz' (de DDS) (voir [Da] ou [DuS1]). On note $(\mathcal{B}_t)$ sa filtration naturelle; il est clair que $(\mathcal{B}_t) \subset (\hat{\mathcal{F}}_t)$.
L'égalité $M_t = B_{<M,M>_t}$ montre que toute martingale locale est 'à un changement de temps près' un mouvement brownien. Mais cette phrase trop rapide cache une difficulté : il n'est en général pas vrai que, pour tout $s \geq 0$, $<M,M>_s$ soit un $(\mathcal{B}_t)$-temps d'arrêt (c'est seulement un $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-temps d'arrêt), de sorte qu'on ne peut pas reconstruire toute martingale locale continue à partir de la seule donnée $((B_t),(\mathcal{B}_t))$. Cela a conduit à la définition suivante :

Définition 1.1 *([DuS2]) On dit que (M_t) est pure si, pour tout $s \geq 0$, $<M,M>_s$ est un temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{B}_t)$.*

Il serait agréable de caractériser la pureté d'une martingale locale, sans faire référence au mouvement brownien de DDS associé. Sans aller jusque là, nous présentons ici une propriété des martingales pures, que ne possède pas toute martingale locale continue.

On pose, pour tout $t \geq 0$,

$$G_t = \sup\{s \leq t, M_s = 0\} \text{ et } \gamma_t = \sup\{s \leq t, B_s = 0\};$$

on notera simplement γ pour γ_1.
Pour tout $t \geq 0$, les variables G_t et γ_t sont des variables honnêtes pour $(\mathcal{F}_t)$ resp. $(\mathcal{B}_t)$.
Puis on pose, pour toute variable positive L et toute filtration $(\mathcal{G}_t)$,

$$\mathcal{G}_L^+ = \sigma\{Z_L, (Z_t)\ (\mathcal{G}_t)\text{-progressif}\},$$
$$\mathcal{G}_L^- = \sigma\{Z_L, (Z_t)\ (\mathcal{G}_t)\text{-prévisible}\},$$

et on note $(\mathcal{G}_t^L)$ la plus petite filtration continue à droite contenant $(\mathcal{G}_t)$ et faisant de L un temps d'arrêt. Rappelons que $(\mathcal{G}^L)_L^- = \mathcal{G}_L^-$ et que, si L est honnête, $\mathcal{G}_L^+ = (\mathcal{G}^L)_L$ (cf. Jeulin [J] p.77,78).

Il est montré dans [AY] p.269 que, si la martingale locale (M_t) est un mouvement brownien (ie : $<M,M>_t = t$), elle vérifie la propriété (*) suivante :

Propriété (*) : *Pour tout T $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt ps. fini tel que $P[M_T = 0] = 0$,*

$$\mathcal{F}_{G_T}^+ = \mathcal{F}_{G_T}^- \vee \sigma\{M_T > 0\}. \tag{1}$$

Nous montrons ici que

- cette propriété (*) est vraie pour toute martingale locale pure.

Ensuite, à l'aide d'une liste de contre-exemples, nous répondons par la négative aux questions suivantes :

- Est-ce que toutes les martingales locales continues vérifient (*) ?
- Les martingales locales pures sont-elles les seules à vérifier (*) ?
- L'ensemble des martingales locales continues vérifiant (*) contient-il (resp. est-il contenu dans) l'ensemble des martingales locales extrémales ?

Ce développement permet aussi de tester la conjecture suivante faite par Barlow :
Si $(\mathcal{G}_t)$ est la filtration naturelle d'un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ et, si α est la fin d'un ensemble prévisible qui évite les temps d'arrêt (i.e. $P[\alpha = T] = 0$ pour tout T $(\mathcal{G}_t)$-temps d'arrêt), alors on a

$$\mathcal{G}_\alpha^+ = \mathcal{G}_\alpha^- \vee \sigma\{A\},$$

pour un événement $A \in \mathcal{G}_\alpha^+$, A pouvant éventuellement être vide.

Rappelons encore une propriété connue des martingales locales pures ([Y] et [ReY] p.200), dont nous proposons une démonstration élémentaire :

Propriété : 1.2 *(M_t) est pure si et seulement si $(\mathcal{B}_t) = (\hat{\mathcal{F}}_t)$.*

DÉMONSTRATION: Il est clair que l'égalité $(\mathcal{B}_t) = (\hat{\mathcal{F}}_t)$ entraîne la pureté de (M_t). De même, l'inclusion $(\mathcal{B}_t) \subset (\hat{\mathcal{F}}_t)$ est triviale. Il reste à montrer que, si (M_t) est pure, alors, pour $t > 0$ fixé, $\mathcal{F}_{C_t-} \subset \mathcal{B}_t$; la proposition s'en suivra par régularisation à droite.
Or la tribu $\mathcal{F}_{C_t-}$ est engendrée par les événements

$$A = \{M_{s_1} \in \Gamma_1\} \cap \ldots \{M_{s_n} \in \Gamma_n\} \cap \{s < C_t\},$$

avec $s_1 < \ldots < s_n < s$, et $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ boréliens de $I\!R$.
Ces événements s'écrivent également

$$\begin{aligned} A &= \cup_{k\in N^*}(\cap_{i=1}^n\{M_{s_i} \in \Gamma_i\} \cap \{s + \tfrac{1}{k} \leq C_t\}) \\ &= \cup_{k\in N^*}(\cap_{i=1}^n\{B_{<M,M>_{s_i}} \in \Gamma\} \cap \{<M,M>_{s_i} \leq t\} \cap \{<M,M>_{s+1/k} \leq t\}). \end{aligned}$$

Par définition de la pureté, les événements $\{B_{<M,M>_{s_i}} \in \Gamma\} \cap \{<M,M>_{s_i} \leq t\}$ et $\{<M,M>_{s+1/k} \leq t\}$ sont $\mathcal{B}_t$-mesurables, d'où le résultat. □

2 Préliminaires.

Ce paragraphe contient plusieurs lemmes techniques. Les deux premiers permettent, dans l'étude de la propriété (*) de ne considérer la relation (1) que pour des temps d'arrêt choisis, puis de se ramener à la filtration brownienne. Les deux derniers lemmes concernent les tribus.

Voici le premier argument de réduction :

Proposition 2.1 *([AY] p.269) Supposons qu'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $(T_n)_{n\in N}$ ps. finis tels que*
- $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$,
- $\forall n \in I\!N$, $P[M_{T_n} = 0] = 0$,
$(M_{t\wedge T_n})$ est uniformement intégrable,
$\mathcal{F}^+_{G_{T_n}} = \mathcal{F}^-_{G_{T_n}} \vee \sigma\{M_{T_n} > 0\}$.
Alors, (M_t) vérifie la propriété (*).

Dans les exemples traités dans la suite, il suffit, grâce à cette proposition, de vérifier (1) pour $T = t_0$ déterministe, ce qui se ramène finalement à l'étude de (1) en $T = 1$.

Nous préparons maintenant un deuxième argument de réduction.

Lemme 2.2 *Soit T un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt ps. fini tel que $P[M_T = 0] = 0$. La variable $U = <M,M>_T$ est un $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-temps d'arrêt ps. fini tel que $P[B_U = 0] = 0$.*
On a les relations suivantes :

$$\hat{\mathcal{F}}^-_{\gamma_U} \subset \mathcal{F}^-_{G_T} \subset \mathcal{F}^+_{G_T} \subset \hat{\mathcal{F}}^+_{\gamma_U}.$$

DÉMONSTRATION: Pour prouver ces inclusions, commençons par deux remarques de changement de temps.
On a d'abord la relation suivante :

$$\gamma_U = <M,M>_{G_T};$$

en effet, le processus $(B_{<M,M>_t}) = (M_t)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $]G_T, T[$; $(<M,M>_t)$ étant croissant et continu, ceci implique que (B_t) ne s'annule pas sur $] <M,M>_{G_T}, U[$. Donc $\gamma_U \leq <M,M>_{G_T}$. Reste à remarquer que $B_{<M,M>_{G_T}} = M_{G_T} = 0$.
Ensuite, il est connu que (M_t) et $(<M,M>_t)$ ont les mêmes paliers; on en déduit que G_T est un point de croissance à droite de $(<M,M>_t)$; donc

$$C_{<M,M>_{G_T}} = G_T.$$

Par contre, (M_t) peut avoir un palier à gauche de G_T, d'où une deuxième relation plus faible :

$$C^-_{<M,M>_{G_T}} = \alpha_T, \text{ avec } \alpha_T = \sup\{s < G_T, M_s \neq 0\}.$$

Considérons maintenant une variable v $\mathcal{F}^+_{G_T}$-mesurable et (V_t) un processus $(\mathcal{F}_t)$-progressif tel que $V_{G_T} = v$. Le processus $(V'_t) = (V_{C_t})$ est $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-progressif et vérifie

$$V_{G_T} = V'_{<M,M>_{G_T}} = V'_{\gamma_U}.$$

Donc v est $\hat{\mathcal{F}}^+_{\gamma_U}$-mesurable.
De la même façon soit y une variable $\hat{\mathcal{F}}^-_U$-mesurable et (Y_t) un processus $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-prévisible tel que $Y_{\gamma_U} = y$. Il existe alors, d'après El Karoui-Meyer [EM] p.74, un processus $(\mathcal{F}_t)$-prévisible (Y'_t) tel que $(Y_t) = (Y'_{C^-_t})$. On a alors la relation

$$y = Y_{\gamma_U} = Y'_{C^-_{<M,M>_{G_T}}} = Y'_{\alpha_T} = Z_{G_T},$$

où (Z_t) est le processus $(\mathcal{F}_t)$-prévisible $(Z_t) = (Y'_{\alpha_t})$. La variable y est alors $\mathcal{F}^-_{G_T}$-mesurable.□

Il en découle la proposition suivante :

Proposition 2.3 (deuxième argument de réduction) *Supposons que, pour tout U $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-temps d'arrêt ps. fini tel $P[B_U = 0] = 0$, on ait la relation*

•

$$\hat{\mathcal{F}}^+_{\gamma_U} = \hat{\mathcal{F}}^-_{\gamma_U} \vee \{B_U > 0\}.$$

Alors (M_t) vérifie la propriété (*).

Le résultat suivant porte sur l'échange des opérations 'suprémum' et 'intersection' dont une démonstration simple se trouve dans [BPY] p.289.

Proposition 2.4 *(Lindvall-Rogers [LR] p.860)*
1. Soit $\mathcal{C}$ une tribu et $(\mathcal{D}_t, t \leq 1)$ une famille croissante de tribus telles que $\mathcal{D}_1$ soit indépendante de $\mathcal{C}$. On a alors

$$\bigcap_{t\leq 1}(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}_t) = \mathcal{C} \vee (\bigcap_{t\leq 1} \mathcal{D}_t),$$

aux ensembles négligeables près; en particulier, si $\bigcap_{t\leq 1} \mathcal{D}_t$ est triviale, on a alors

$$\bigcap_{t\leq 1}(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}_t) = \mathcal{C},$$

aux ensembles négligeables près.
2. (Variante) Si $(\mathcal{D}^1_t, t \leq 1)$ et $(\mathcal{D}^2_t, t \leq 1)$ sont deux familles croissantes de tribus telles que $\mathcal{D}^1_1$ et $\mathcal{D}^2_1$ sont indépendantes, alors

$$\bigcap_{t\leq 1}(\mathcal{D}^1_t \vee \mathcal{D}^2_t) = (\bigcap_{t\leq 1} \mathcal{D}^1_t) \vee (\bigcap_{t\leq 1} \mathcal{D}^2_t),$$

aux ensembles négligeables près.

Proposition 2.5 *Soit (X_t) un processus et $(\mathcal{G}_t)$ sa filtration naturelle. Soit L une variable honnête ps. finie et (L_n) une suite de $(\mathcal{G}^L_t)$-temps d'arrêt décroissant strictement vers L. Alors*

a) $\mathcal{G}^+_L = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{G}^L)^-_{L_n}$,
b) $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{G}^L)^-_{L_n} = \sigma\{L_n\} \vee \mathcal{G}^-_L \vee \sigma\{X_t 1_{\{L\leq t<L_n\}}, t \geq 0\}$.

DÉMONSTRATION: a) La première relation découle du fait que, si L est honnête, $\mathcal{G}^+_L = \mathcal{G}^L_L$.
b) Remarquons que, pour toute filtration naturelle $(\mathcal{H}_t)$ d'un processus (Y_t) et tout temps d'arrêt T, la tribu strictement antérieure à T peut s'écrire

$$\mathcal{H}^-_T = \sigma\{T\} \vee \sigma\{Y_t 1_{\{t<T\}}, t \geq 0\}.$$

On en déduit b) en remarquant que $(\mathcal{G}^L_t)$ (resp. $(\mathcal{G}^{L_n}_t)$) est la filtration naturelle engendrée par le couple de processus $(X_t, 1_{\{t<L\}})$ (resp. $(X_t, 1_{\{t<Ln\}})$). □

3 Les martingales locales pures vérifient la propriété (*).

Grâce aux deux arguments de réduction 2.1 et 2.3, il suffit maintenant d'établir que

$$\hat{\mathcal{F}}_\gamma^+ = \hat{\mathcal{F}}_\gamma^- \vee \{B_1 > 0\}.$$

Or, d'après la propriété des martingales pures 1.2, $(\hat{\mathcal{F}}_t) = (\mathcal{B}_t)$; la relation ci-dessus est donc équivalente à

$$\mathcal{B}_\gamma^+ = \mathcal{B}_\gamma^- \vee \{B_1 > 0\}.$$

Cette dernière relation est démontrée dans [BPY] p.289. □

Remarquons que ce résultat s'applique en particulier aux martingales locales qui sont des diffusions réelles (cf. Rogers-Williams [RoW] p.77).

4 Il existe des martingales locales extrémales qui ne vérifient pas (*).

L'exemple que nous allons développer fait appel au mouvement brownien de Walsh, et plus particulièrement aux résultats de Barlow-Pitman-Yor 'On Walsh's Brownian motion' [BPY]. Nous utilisons, en les rappelant, les notations et résultats de cet article.

Soit $(Z_t) = (R_t, \theta_t)$ un mouvement brownien de Walsh à valeurs dans n demi-droites du plan complexe issues de l'origine; soit $(\mathcal{F}_t^Z)$ sa filtration naturelle. On suppose que la loi des angles polaires est la loi uniforme sur $\mathcal{U} = \{\Theta^1, \dots, \Theta^n\}$. Le processus (R_t) est un mouvement brownien réfléchi; si on note (L_t) le temps local en zéro de (R_t), le processus $(W_t) = (R_t - \frac{1}{2}L_t)$ est un mouvement brownien. Soit h une fonction de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ vérifiant

- $|h(\Theta^i)| \neq |h(\Theta^j)|$ si $i \neq j$;
- $\sum_{i=1}^n h(\Theta^i) = 0$.

On pose $g(r, \theta) = rh(\theta)$ et $M_t = g(Z_t)$.
On montre comme dans [BPY] p.282 que (M_t) est une martingale vérifiant

$$M_t = M_0 + \int_0^t h(\theta_s) 1_{\{R_s > 0\}} dW_s, \tag{2}$$

$$<M, M>_t = \int_0^t h^2(\theta_s) ds = \sum_{i=1}^n h^2(\Theta^i) \int_0^t 1_{\{\theta_s = \Theta^i\}} ds. \tag{3}$$

On note toujours $(\mathcal{F}_t)$ la filtration engendrée par (M_t). Montrons que $(\mathcal{F}_t) = (\mathcal{F}_t^Z)$. Il est clair que (M_t) est $(\mathcal{F}_t^Z)$-mesurable. Inversement, $(< M, M >_t)$ étant $(\mathcal{F}_t)$-mesurable, il en est de même de $\sum_{i=1}^n h(\Theta^i)^2 1_{\{\theta_t = \Theta^i\}}$ puis de $1_{\{\theta_t = \Theta^i\}}$; il en résulte que les variables $R_t 1_{\{\theta_t = \Theta^i\}} = \frac{M_t}{h(\Theta^i)} 1_{\{\theta_t = \Theta^i\}}$ sont $(\mathcal{F}_t)$-mesurables, d'où le résultat.

Sachant que (W_t) a la PRP pour $(\mathcal{F}_t^Z)$, on déduit de (2) que (M_t) est extrémale.
Le fait que (M_t) ne vérifie pas (*) se déduit de l'égalité suivante (cf. [BPY] p.291) :

$$(\mathcal{F}^Z)_{G_1}^{+} = (\mathcal{F}^Z)_{G_1}^{-} \vee \sigma\{\{\theta_1 = \Theta^i\}, i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

□

5 Il existe des martingales locales extrémales impures qui satisfont (*).

Le contre-exemple suivant est bien connu, puisqu'il a déjà servi dans d'autres occasions (cf. [Y] ou [SY]).

Soit (W_t) un mouvement brownien réel et $(\mathcal{W}_t)$ sa filtration naturelle. On pose

$$B_t = \int_0^t \mathrm{sgn} W_s dW_s.$$

Le processus (B_t) est un mouvement brownien, et sa filtration naturelle $(\mathcal{B}_t)$ est strictement incluse dans $(\mathcal{W}_t)$; (B_t) a la propriété de représentation prévisible (la PRP) pour $(\mathcal{W}_t)$.
Soit φ un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$. Posons,

$$\forall t \geq 0, A_t = \int_0^t \varphi(W_s) ds \text{ et } T_t = \inf\{s \geq 0, A_s > t\}.$$

Le processus (A_t) est $(\mathcal{W}_t)$-adapté, strictement croissant et continu. Donc (T_t) est continu et strictement croissant, et, pour tout $s \geq 0$, T_s est un $(\mathcal{W}_t)$-temps d'arrêt borné.

La martingale que l'on considère ici est $(M_t) = (B_{T_t})$. Elle a comme crochet $(<M, M>_t) = (T_t)$ et comme mouvement brownien de DDS (B_t).
Montrons que $(\hat{\mathcal{F}}_t) = (\mathcal{W}_t)$: $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ est engendrée par les deux processus $(C_t) = (A_t)$ et $(M_{C_t}) = (B_t)$, qui sont tous les deux $(\mathcal{W}_t)$-adaptés; inversement $(\mathcal{W}_t)$ est aussi la filtration engendrée par $(C_t) = (\int_0^t \varphi(W_s) ds)$, d'où l'inclusion inverse.
La martingale (M_t) n'est pas pure, puisque (C_t) n'est pas $(\mathcal{B}_t)$-adapté (d'après la proposition 1.2). (M_t) est extrémale, puisque son mouvement brownien de DDS a la PRP pour $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ (cf. Revuz-Yor [ReY] p.198).

Reste à montrer que (M_t) possède la propriété (*).
Grâce aux arguments de réduction 2.1 et 2.3 il suffit de montrer la relation

$$\mathcal{W}_\gamma^+ = \mathcal{W}_\gamma^- \vee \sigma\{B_1 > 0\}.$$

Pour cela, on pose

$$d = \inf\{s > \gamma, W_s = 0\} \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \gamma_n = (\gamma + \frac{1}{n}) \wedge d.$$

Les variables d et $\gamma_n, n \in \mathbb{N}^*$ sont des $(\mathcal{W}_t^\gamma)$-temps d'arrêt. On déduit de la formule de Tanaka que (B_t) et (W_t) ne peuvent s'annuler en même temps; donc d et $\gamma_n, n \in \mathbb{N}^*$ sont strictement supérieures à γ. On a $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = \gamma$.
D'après la proposition 2.5, on a

$$\mathcal{W}_\gamma^+ = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (\mathcal{W}^\gamma)_{\gamma_n}^-,$$

ce que nous préférons écrire

$$\mathcal{W}_\gamma^+ = \bigcap_{n\geq n_0} (\mathcal{W}^\gamma)_{\gamma_n}^-, \tag{4}$$

pour $n_0 \in \mathbb{N}^*$ fixé.
Il s'agit maintenant de décomposer la tribu $(\mathcal{W}^\gamma)_{\gamma_n}^-$. Pour cela, remarquons d'abord que

$$(\mathcal{W}_t) = (\mathcal{B}_t) \vee (\mathcal{S}_t),$$

où $(\mathcal{S}_t)$ est la filtration naturelle de $(\mathrm{sgn} W_t)$. On en déduit que

$$(\mathcal{W}_t^\gamma) = (\mathcal{B}_t^\gamma) \vee (\mathcal{S}_t^\gamma).$$

Par ailleurs, on montre aisement que la tribu prévisible du sup de deux filtrations est le sup des deux tribus prévisibles; ceci implique ici la relation

$$(\mathcal{W}^\gamma)_{\gamma_n}^- = (\mathcal{B}^\gamma)_{\gamma_n}^- \vee (\mathcal{S}^\gamma)_{\gamma_n}^-. \tag{5}$$

On a $(\mathcal{B}^\gamma)_{\gamma_n}^- \subset (\mathcal{B}^\gamma)_{\gamma+\frac{1}{n}}^-$. Or, d'après la proposition 2.5, cette dernière tribu peut se décomposer en

$$(\mathcal{B}^\gamma)_{\gamma+\frac{1}{n}}^- = \mathcal{B}_\gamma^- \vee \tilde{\mathcal{B}}_{\gamma,n}, \tag{6}$$

avec $\tilde{\mathcal{B}}_{\gamma,n} = \sigma\{B_{\gamma+s}, 0 < s < \frac{1}{n}\}$.
On remarque que $\tilde{\mathcal{B}}_{\gamma,n}$ est indépendante de $\mathcal{W}_\gamma$, et que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \tilde{\mathcal{B}}_{\gamma,n} = \sigma\{B_1 > 0\}.$$

Par ailleurs, cette même proposition 2.5 appliquée à $(\mathcal{S}^\gamma)_{\gamma_n}^-$ donne

$$(\mathcal{S}^\gamma)_{\gamma_n}^- = \mathcal{S}_\gamma^- \vee \sigma\{\gamma_n\}, \tag{7}$$

parce que $\mathrm{sgn} W_s 1_{\{\gamma\leq s<\gamma_n\}} = \mathrm{sgn} W_\gamma 1_{\{\gamma\leq s<\gamma_n\}}$ est $\mathcal{S}_\gamma^- \vee \sigma\{\gamma_n\}$-mesurable.
On peut remplacer les expressions (6) et (7) dans la formule (5). En remontant à la formule (4), on obtient alors

$$\mathcal{W}_\gamma^+ = \bigcap_{n\geq n_0} (\mathcal{W}_\gamma^- \vee \tilde{\mathcal{W}}_{\gamma,n} \vee \sigma\{\gamma_n\}). \tag{8}$$

Or, sur $\{\gamma + \frac{1}{n_0} \leq d\}$, $\forall n \geq n_0, \gamma_n = \gamma + \frac{1}{n}$ est $\mathcal{W}_\gamma^-$-mesurable. Appliquons le lemme de Lindvall-Rogers 2.4 à la relation (8) restreinte à l'ensemble $\{\gamma + \frac{1}{n} \leq d\}$. On obtient

$$\mathcal{W}_\gamma^+|_{\{\gamma+\frac{1}{n_0}\leq d\}} = (\mathcal{W}_\gamma^- \vee \{B_1 > 0\})|_{\{\gamma+\frac{1}{n_0}\leq d\}}.$$

Sachant que cette dernière relation est vraie pour tout n_0 et que $\bigcup_{n_0\in\mathbb{N}^*}\{\gamma + \frac{1}{n_0} \leq d\} = \Omega$, on en déduit le résultat. $\square$

Remarque 5.1 (Emery) La propriété (*) est une propriété locale : elle ne concerne le comportement de (M_t) que lors de ses passages en zéro. La propriété de pureté affectant toute la trajectoire de (M_t), il n'est donc pas étonnant que cette dernière ne découle pas de (*). On peut alors se poser une seconde question, qui ne souffre pas de ce déséquilibre :
Posons, pour tout $a \in \mathbb{R}, G_t^a = \sup\{s \leq t, M_s = a\}$, et supposons que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout T $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt ps. fini tel que $P[M_T = a] = 0$,

$$\mathcal{F}^+_{G_T^a} = \mathcal{F}^-_{G_T^a} \vee \sigma\{M_T > a\}.$$

Est-ce que (M_t) est alors pure?
Le contre-exemple ci-dessus permet aussi de répondre par la négative à cette question.

6 Il existe des martingales locales non extrémales qui vérifient (*).

Nous construisons ici une martingale (M_t), dont le mouvement brownien de DDS associé est la première coordonnée d'un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$ engendrant $(\hat{\mathcal{F}}_t)$.

Soit $(X_t + iY_t)$ un mouvement brownien plan issu de $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, et $\alpha \in]-\infty, 1/2[$.
Posons

$$M_t = \int_0^t \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{(X_s^2 + Y_s^2)^\alpha}.$$

Le processus (M_t) est une martingale réelle continue.

Explicitons la filtration $(\hat{\mathcal{F}}_t)$:
On déduit de l'égalité

$$< M, M >_t = \int_0^t \frac{ds}{(X_s^2 + Y_s^2)^{2\alpha - 1}} \tag{9}$$

que le processus $(X_t^2 + Y_t^2)$ est adapté à $(\mathcal{F}_t)$; et il en est de même pour la martingale

$$N_t = \int_0^t \frac{X_s dX_s + Y_s dY_s}{(X_s^2 + Y_s^2)^\alpha}.$$

Remarquons de plus que, pour tout $t \geq 0$, $< N, N >_t = < M, M >_t$ et $< M, N >_t = 0$. En d'autres termes, $(M_t + iN_t)$ est une martingale conforme de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$, et le processus $(W_t) = (B_t + iB'_t) \stackrel{def}{=} (M_{C_t} + iN_{C_t})$ est un mouvement brownien plan. Notons $(\mathcal{W}_t)$ la filtration naturelle de (W_t).
Montrons que $(\hat{\mathcal{F}}_t) = (\mathcal{W}_t)$: on montre comme dans la proposition 1.2 qu'il suffit pour cela que le processus (C_t) soit $(\mathcal{W}_t)$-adapté.
On a la formule d'Itô suivante :

$$(X_t^2 + Y_t^2)^{1-\alpha} = |z|^{2(1-\alpha)} + 2(1-\alpha)N_t + 2(1-\alpha)^2 \int_0^t \frac{ds}{(X_s^2 + Y_s^2)^\alpha}. \tag{10}$$

Si l'on pose

$$U_t = \frac{1}{2(1-\alpha)} (X^2 + Y^2)_{C_t}^{1-\alpha},$$

la formule (10) devient, après changement de temps,

$$U_t = \frac{1}{2(1-\alpha)}|z|^{2(1-\alpha)} + B'_t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{U_s}.$$

(U_t) est donc un processus de Bessel de dimension $\delta = 2$, et engendre la même filtration que (B'_t) (cf. [ReY]). En conséquence (U_t) est $(\mathcal{W}_t)$-adapté. Par ailleurs on déduit de la formule (9) que

$$C_t = \int_0^t (X_{C_s}^2 + Y_{C_s}^2)^{2\alpha-1} ds = \int_0^t [2(1-\alpha)U_s]^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} ds.$$

Donc (C_t) est également $(\mathcal{W}_t)$-adapté.

Il est clair que (M_t) n'est pas extrémale, puisque son mouvement brownien de DDS (B_t), n'a pas la PRP pour $(\mathcal{W}_t)$.

Montrons que (M_t) vérifie la propriété (*) :
Avec les deux arguments de réduction 2.1 et 2.3, on est amené à vérifier que

$$\mathcal{W}_\gamma^+ = \mathcal{W}_\gamma^- \vee \sigma\{B_1 > 0\}.$$

Posons, $\forall u > 0, \gamma^u = \gamma + u(1-\gamma)$. La famille $(\gamma^u)_{u>0}$ forme une suite de $(\mathcal{W}_t^\gamma)$-temps d'arrêt décroissant strictement vers γ. On a alors, d'après 2.5.1,

$$\mathcal{W}_\gamma^+ = \bigcap_{u>0} (\mathcal{W}^\gamma)_{\gamma^u}^-;$$

et on déduit de 2.5.2 la décomposition suivante :

$$(\mathcal{W}^\gamma)_{\gamma^u}^- = \mathcal{W}_\gamma^- \vee \sigma\{B_1 > 0\} \vee \sigma\{\mu_s, s < u\} \vee \sigma\{\tilde{B}_s, s < u\}, \tag{11}$$

avec $\tilde{B}_t = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma}}(B'_{\gamma+t(1-\gamma)} - B'_\gamma)$,
et où $(\mu_t = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma}}|B_{\gamma+t(1-\gamma)}|, t \leq 1)$ est le méandre brownien.
Les quatre termes du membre de droite de (11) sont tous indépendants. On peut donc appliquer d'abord le lemme de Lindvall-Rogers 2.4.1 à $\mathcal{C} = \mathcal{W}_\gamma^- \vee \{B_1 > 0\}$ et $\mathcal{D}_u = \sigma\{\mu_s, s \leq u\} \vee \sigma\{\tilde{B}_s, s \leq u\}$, puis 2.4.2 à $\mathcal{D}_u^1 = \sigma\{\mu_s, s \leq u\}$ et $\mathcal{D}_u^2 = \sigma\{\tilde{B}_s, s \leq u\}$. On obtient le résultat annoncé.

7 Il existe des martingales locales non extrémales qui ne vérifient pas (*).

Ce dernier exemple fait référence aux deux articles 'Martingales relatives' [AMY] et 'Sur l'équation de structure $d[X,X]_t = dt - X_{t-}^+ dX_t$' [AR].

On considère (B_t) un mouvement brownien réel issu de zéro. On note $(\mathcal{B}'_t)$ la filtration naturelle engendrée par sa partie positive (B_t^+). L'ensemble $\{t \geq 0, B_t^+ \neq 0\}$ est une réunion dénombrable d'intervalles stochastiques ouverts $]G^n, D^n[, n \in \mathbb{N}$. On peut choisir

$$D^1 = \inf\{s > T_1, B_s^+ = 0\} \text{ et } G^1 = \sup\{s < T_1, B_s^+ = 0\}, \text{ avec } T_1 = \inf\{s \geq 0, B_s = 1\}.$$

Soit (ξ_n) une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. indépendantes de $\mathcal{B}'_\infty$, dont la loi μ charge au moins trois points et admet zéro comme moment de premier ordre. Posons

$$U_t = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n 1_{[G^n, D^n[}(t) \text{ et } M_t = U_t B_t^+.$$

D'après [AMY], (M_t) est bien une martingale continue.

Montrons que (M_t) n'est pas extrémale :
Si (M_t) était extrémale, toutes les $(\mathcal{F}_t)$-martingales seraient continues. Il est montré dans [AR] que le processus suivant est une $(\mathcal{B}'_t)$-martingale (non continue) :

$$X_t = B_t^+ - 1_{\{B_t > 0\}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t - G_t},$$

(plus précisement, c'est la projection optionnelle de la martingale (B_t) sur la filtration $(\mathcal{B}'_t)$). Par ailleurs, d'après [AMY], pour $s \geq 0$ fixé, les tribus $\mathcal{F}_s$ et $\mathcal{B}'_\infty$ sont indépendantes sachant $\mathcal{B}'_s$. On en déduit que toute $(\mathcal{B}'_t)$-martingale est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale, donc en particulier (X_t).

(M_t) ne vérifie pas (*) :
Posons $G = G^1$. La tribu $\mathcal{F}_G^-$ est engendrée par les variables

$$G, B_s^+ 1_{\{s<G\}}, \sum_{m \in \mathbb{N}} \xi_m 1_{\{G^m < s < D^m\}} 1_{\{s<G\}}, s \geq 0.$$

Elle est donc contenue dans la tribu

$$\mathcal{B}'_\infty \vee \sigma\{\xi_m, m \neq 1\}.$$

Donc, la variable ξ_1 étant indépendante de $\mathcal{B}'_\infty$ et des autres variables $\xi_m, m \neq 1$, elle est indépendante de $\mathcal{F}_G^-$. Par contre, on montre comme au paragraphe 4, que ξ_1 est $\mathcal{F}_G^+$-mesurable. Puisque, par hypothèse, μ charge au moins trois points, le nombre minimal d'événements à ajouter à $\mathcal{F}_G^-$ pour construire $\mathcal{F}_G^+$ dépasse alors deux.

Références

[AMY] AZÉMA J., MEYER P.A., YOR M. (1992): Martingales relatives, Sém. Prob. XXVI, LNM 1526, p.307-321.

[AR] AZÉMA J., RAINER C. (1994): Sur l'Equation de Structure "$d[X,X]_t = dt - X_{t-}^+ dX_t$", Sém. Prob. XXVIII, LNM 1583, p.236-255.

[AY] AZÉMA J., YOR M. (1992): Sur les zéros des martingales continues, Sém. Prob. XXVI, LNM 1526, p.248-306.

[BPY] BARLOW M.T., PITMAN J.W., YOR M. (1980): On Walsh's Brownian Motion, Sém. Prob. XXIII, LNM 1372, p.275-293.

[Da] DAMBIS K.E. (1965): On the decomposition of continuous martingales, Theor.Prob.Appl. 10, p.401-410.

[DuS1] DUBINS L., SCHWARZ G. (1965): On continuous martingales, Proc.Nat.Acad.Sci. USA 53, p.913-916.

[DuS2] DUBINS L., SCHWARZ G. (1967): On extremal martingales distributions, Proc.Fifth Berkeley Symp. 2(1), p.295-297.

[EM] EL KAROUI N., MEYER P.A. (1977): Les changements de temps en théorie générale des processus, Sém. Prob. XI, LNM 581, p.65-78.

[J] JEULIN T. (1980): Semimartingales et grossissement de filtration, LNM 833, Springer .

[LR] LINDVALL T., ROGERS L.C.G. (1986): Coupling of multidimensional diffusions by reflection, Ann. Prob. 14, p. 860-872.

[ReY] REVUZ D., YOR M. (1991): Continuous Martingales and Brownian Motion, Grundlehren der math. Wiss. 293, Springer.

[RoW] ROGERS L.C.G., WILLIAMS D. (1987): Diffusions, Markov Processes and Martingales, vol.2, John Wiley and Sons.

[SY] STROOCK D.W., YOR M. (1980): On extremal solutions of martingale problems, Ann. Scient. E.N.S., 4ème série, t.13, p.95-164.

[Y] YOR M. (1979): Sur l'étude des martingales continues extrémales, Stochastics, vol.2.3. p.191-196