SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DOMINIQUE BAKRY
MIREILLE ECHERBAULT

Sur les inégalités GKS

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 30 (1996), p. 178-206
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1996__30__178_0>

Sur les inégalités GKS.

Dominique Bakry et Mireille Echerbault

Laboratoire de Statistique et Probabilités, Université PAUL SABATIER,
118, route de Narbonne, 31062, TOULOUSE Cedex.

RÉSUMÉ

Nous décrivons des bases orthonormées sur l'espace L^2 d'un ensemble fini dans lequel des inégalités de la forme GKS1 prennent une forme simple. Ceci s'applique en particulier aux classes de conjugaison d'un groupe fini quelconque. Dans tous les exemples que nous considérons, l'inégalité GKS2 en est une conséquence, sans que nous ayons une interprétation générale de ce phénomène.

ABSTRACT

We describe some orthonormal basis of the L^2 space of a finite set in which the GKS1 inequality take a simple form. This applies to the conjugacy classes of any finite group. In all the examples that we examine, the GKS2 inequality is a consequence of the GKS1 one, but we do not have any explanation of this phenomenon.

1— Introduction.

En mécanique statistique, et à la base de l'étude des systèmes de spins, il y a un ensemble d'inégalités de corrélation qui permettent de caractériser aisément l'unicité de la mesure de GIBBS associée à un potentiel ferromagnétique. Parmi les plus importantes, citons l'inégalité FKG, nommée d'après FORTUIN, KASTELYN et GINIBRE, et les inégalités GKS, d'après GRIFFITH, KELLY et SHERMAN. Nous allons dans cet exposé parler uniquement des secondes, mais, dans un souci de complétude, nous allons tout d'abord dans cette introduction rappeler la première, qui a déjà fait l'objet d'un exposé dans un des volumes précédents de ce séminaire [BM].

Dans le cadre classique, toutes ces inégalités sont des inégalités de corrélation sur l'ensemble $\Omega = \{-1,1\}^S$, où S est un ensemble fini. Dénotons $\omega = (\omega_i)_{i\in S}$ l'élément générique de Ω : nous mettons sur Ω un ordre partiel en posant

$$\omega \leq \omega' \Leftrightarrow \forall i \in S, \omega_i \leq \omega'_i.$$

Ceci fait de Ω un treillis: pour chaque couple (ω, ω'), il y a un unique sup noté $\omega \vee \omega'$, et un unique inf, noté $\omega \wedge \omega'$. Une mesure de probabilité μ sur Ω est alors appelée attractive si et seulement si

$$\forall(\omega,\omega') \in S^2,\ \mu(\omega \wedge \omega')\mu(\omega \vee \omega') \geq \mu(\omega)\mu(\omega').$$

L'inégalité FKG s'énonce alors ainsi : sous une probabilité attractive, la corrélation de deux fonctions croissantes pour l'ordre ainsi décrit est positive. Cette inégalité est en fait valable sur tout ensemble réticulé [FKG], et permet donc d'obtenir un résultat analogue lorsqu'on remplace $\{-1,+1\}$ par un ensemble totalement ordonné E quelconque. Malheureusement, dans les situations intéressantes en mécanique statistique, lorsque la fibre E n'est pas $\{-1,+1\}$, et pour les mesures que l'on considère en général, il n'y a pas d'ordre canonique sur E pour lequel la mesure soit attractive. Cet inconvénient n'a pas lieu pour les inégalités GKS dont nous allons parler ci-dessous.

Considérons tout d'abord la mesure uniforme sur Ω, que nous appelons μ_0 :

$$\mu_0 = \otimes_{i\in S}\{\frac{\delta_{-1}+\delta_1}{2}\},$$

et notons ω_i les applications coordonnées $\Omega \to \mathbb{R} : \omega = (\omega_i) \to \omega_i$. Pour une partie A de S, nous notons $\omega_A = \Pi_{i\in A}\omega_i$, avec comme d'habitude la convention $\omega_\emptyset = 1$.

Nous désignerons par $\langle f\rangle_0$ l'intégrale $\int_\Omega f(\omega)\, d\mu_0(\omega)$. Puisque, pour la mesure μ_0, les variables aléatoires ω_i sont indépendantes, il est aisé de voir que $\langle\omega_A\rangle_0 = 0$ si $A \neq \emptyset$. D'autre part, remarquons la formule importante de multiplication

$$\omega_A\omega_B = \omega_{A\Delta B}, \tag{1.1}$$

où Δ désigne la différence symétrique.

Cette formule nous permet de voir que les fonctions ω_A sont orthogonales et de norme 1 dans $L^2(\Omega,\mu_0)$. Il suffit alors de les compter pour voir qu'elles forment une base orthonormée de $L^2(\Omega,\mu_0)$. Toute fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ s'écrit alors de façon unique

$$f(\omega) = \sum_{A\subset S} \lambda_A\omega_A, \text{ avec } \lambda_A = \langle\omega_A f\rangle_0. \tag{1.2}$$

Nous dirons alors qu'une fonction f est GKS1 si elle satisfait

$$\forall A \subset S,\ \lambda_A \geq 0.$$

Remarquons tout de suite qu'en vertu de la formule de multiplication (1.1), le produit de deux fonctions GKS1 est une fonction GKS1.

Nous considérons alors un Hamiltonien H, c'est-à-dire une fonction $H : \Omega \to \mathbb{R}$, et la mesure associée

$$d\mu_H(\omega) = \exp(H(\omega))\, d\mu_0(\omega)/Z,$$

où Z est une constante de normalisation qui fait de μ_H une mesure de probabilité. Nous noterons alors $\langle f\rangle_H$ l'intégrale de f pour μ_H.

Quoique très utiles, les deux inégalités suivantes sont alors très faciles à démontrer :

Proposition 1.1.—*(Inégalité GKS1) Si H et f sont deux fonctions GKS1, alors*

$$\langle f\rangle_H \geq 0. \tag{1.3}$$

Proposition 1.2.—*(Inégalité GKS2) Si f, g et H sont trois fonctions GKS1, alors*

$$\langle fg\rangle_H \geq \langle f\rangle_H\langle g\rangle_H. \tag{1.4}$$

Pour convaincre le lecteur du caractère élémentaire de ces inégalités, nous allons ci-dessous en donner une démonstration complète, inspirée de [L]

Preuve. Commençons par l'inégalité GKS1 : on peut tout d'abord se ramener par linéarité au cas où $f = \omega_A$. Alors, d'après l'identité (1.2), tout revient à démontrer que, si H est GKS1, il en va de même de e^H. Nous écrivons alors, pour $H = \sum_B \lambda_B\omega_B$,

$$e^H = \prod_B e^{\lambda_B\omega_B}.$$

D'autre part, puisque $\omega_B^2 = 1$, nous avons

$$e^{\lambda_B\omega_B} = \mathrm{ch}(\lambda_B) + \mathrm{sh}(\lambda_B)\omega_B,$$

et donc, puisque H est GKS1, il en va de même de $e^{\lambda_B\omega_B}$. Nous avons déjà remarqué plus haut que le produit de deux fonctions GKS1 est une fonction GKS1, et il s'ensuit donc que e^H est GKS1.

Passons à l'inégalité GKS2. La façon la plus simple de l'établir est d'utiliser une astuce classique de duplication. Une fois de plus, et en utilisant cette fois-ci la bilinéarité de la covariance, il suffit d'établir le résultat pour $f = \omega_A$ et $g = \omega_B$. Ensuite, nous pouvons écrire la covariance de f et g en considérant deux copies indépendantes de Ω, Ω et Ω^1, et en écrivant

$$2(\langle fg\rangle_H - \langle f\rangle_H\langle g\rangle_H) = \int\int_{\Omega\times\Omega^1} (f(\omega) - f(\omega^1))(g(\omega) - g(\omega^1))\mu_H(d\omega)\mu_H(d\omega^1). \tag{1.5}$$

Écrivons $\omega^1 = (\omega_i^1)_{i\in S}$, et appelons $\omega_A^1 = \Pi_{i\in A}\omega_i^1$: si H s'écrit $\sum_C \lambda_C\omega_C$, en utilisant l'identité (1.5),tout revient donc à établir que

$$\int\int_{\Omega\times\Omega^1} (\omega_A - \omega_A^1)(\omega_B - \omega_B^1)\exp(\sum_C \lambda_C(\omega_C + \omega_C^1))\,\mu_0(d\omega)\mu_0(d\omega^1) \geq 0. \tag{1.6}$$

Or, souvenons nous que, pour la mesure μ_0, les variables ω_i sont des variables de BERNOULLI indépendantes. Nous pouvons donc réaliser le couple (ω, ω^1) en choisissant deux copies indépendantes $(\omega_i)_{i\in S}$ et $(\omega_i^2)_{i\in S}$ et en posant $\omega_i^1 = \omega_i\omega_i^2$. Nous avons alors $\omega_A^1 = \omega_A \omega_A^2$, et nous pouvons alors réécrire le membre de gauche de la formule (1.6) sous la forme

$$\int\int_{\Omega\times\Omega^2} \omega_{A\Delta B}(1-\omega_A^2)(1-\omega_B^2)\exp\{\sum_C \lambda_C(1+\omega_C^2)\omega_C\}\,\mu_0(d\omega)\mu_0(d\omega^2). \quad (1.7)$$

Dans cette dernière intégrale, nous intégrons d'abord par rapport à la mesure $\mu_0(d\omega)$: l'expression que nous obtenons est alors positive en vertu de l'inégalité GKS1, puisque $\lambda_C(1-\omega_C^2) \geq 0$ et $(1-\omega_A^2)(1-\omega_B^2) \geq 0$. Il est alors clair que le résultat final est positif. $\square$

2– L'inégalité GKS1 sur un ensemble fini.

Contrairement à l'inégalité FKG, nous allons voir que l'inégalité GKS1 s'étend aisément à de nombreuses situations intéressantes du point de vue de la mécanique statistique, où la fibre n'admet pas d'ordre naturel.

Nous considérons ici un ensemble E fini, muni d'une mesure de probabilité μ_0 qui charge tous les points. La finitude de E n'est pas essentielle dans ce qui suit, mais elle nous permettra d'éviter tous les problèmes de nature analytique, et est suffisante pour les applications que nous avons en tête. Nous supposerons que le cardinal de E est $n+1$. Nous noterons comme plus haut $\langle f\rangle_0$ la moyenne $\sum_E f(a)\mu_0(a)$. De plus, si $H : E \to \mathbb{R}$ est donnée, nous noterons μ_H la mesure de probabilité $\mu_H(a) = \exp(H(a))\mu_0(a)/Z$, où Z est une constante de normalisation, et $\langle f\rangle_H$ désignera la moyenne de f pour μ_H. Dans tout ce qui suit, $\mathbb{R}_+$ désignera l'ensemble des réels positifs.

Nous appelerons **système** sur E une base orthonormée Ξ de l'espace hermitien complexe $L^2_{\mathbb{C}}(E,\mu_0)$, formée de vecteurs $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$, ayant la propriété suivante : si $x \in \Xi$, il en va de même de son conjugué $\overline{x}$. Si $p \in \{0, \cdot, n\}$, nous noterons $\overline{p}$ l'unique $q \in \{0, \cdot, n\}$ tel que $\overline{x_p} = x_q$.

Nous dirons que ce système est réel si tous les éléments de Ξ le sont, et qu'il est unitaire si $x_0 \equiv 1$. (Nous réserverons toujours l'indice 0 pour désigner le vecteur 1, lorsque le système est unitaire.)

Définition.—*2.1. Nous dirons que le système Ξ est GKS1 s'il vérifie les deux propriétés suivantes :*
(i) $\forall i \in \{0, \cdots, n\}$, $\langle x_i\rangle_0 \in \mathbb{R}_+$.
(ii) $\forall (i,j,k) \in \{0, \cdots, n\}^3$, $a_{ijk} := \langle x_i x_j x_k\rangle_0 \in \mathbb{R}_+$.

Remarquons tout de suite que, pour les systèmes unitaires, la condition (i) est inutile, car $\langle x_i\rangle_0 = \langle x_i x_0\rangle_0 = 0$ si $i \neq 0$, et $\langle x_0\rangle_0 = 1$. Si le besoin s'en fait sentir, nous préciserons a^{Ξ}_{ijk} pour dénoter la dépendance en Ξ des coefficients a_{ijk}.

Définition.—*2.2. Si le système Ξ est GKS1, nous dirons qu'une fonction $f : E \to \mathbb{C}$ est GKS1 si elle s'écrit $f = \sum_i \lambda_i x_i$, avec $\lambda_i \geq 0$.*

Comme plus haut, et puisque Ξ est une base orthonormée, nous avons

$$\lambda_k = \langle f\overline{x_k}\rangle_0 = \langle f x_{\overline{k}}\rangle_0.$$

La première remarque est que les paramètres a_{ijk} de la définition 2.1. (ii) permettent d'écrire la formule de multiplication analogue à (1.1):

Lemme 2.3.—*Pour tout couple (i,j) de $\{0,\cdots,n\}^2$,*

$$x_i x_j = \sum_k a_{ij\overline{k}} x_k. \tag{2.1}$$

Preuve. Puisque Ξ est une base orthonormée de $L^2(E,\mu_0)$, la fonction $x_i x_j$ s'écrit de manière unique $\sum_k \lambda_k x_k$, avec

$$\lambda_k = \langle x_i x_j \overline{x_k}\rangle = a_{ij\overline{k}}.$$

□

Corollaire 2.4.—*La somme et le produit de deux fonctions GKS1 sont GKS1.*

Preuve. Le résultat est trivial pour la somme. Pour le produit, on se ramène par bilinéarité au cas où ces deux fonctions sont des éléments de Ξ, et on est alors ramené au lemme 2.3. C'est alors une conséquence de la propriété (ii) des systèmes GKS1.□

De ce qui précède, nous déduisons le

Corollaire 2.5.—*Si H est une fonction GKS1, la fonction e^H est GKS1.*

Preuve. En écrivant $H = \sum_k \lambda_k x_k$, nous décomposons comme plus haut

$$e^H = \Pi_k \exp(\lambda_k x_k),$$

et il suffit de démontrer que $\exp(\lambda_k x_k)$ est GKS1. Nous écrivons alors

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} x^p/p! = \lim_n f_n.$$

Chacune des fonctions f_n est GKS1 d'après le corollaire précédent. Il ne reste qu'à remarquer qu'une limite de fonctions GKS1 est GKS1. □

Remarque.—

Dans le corollaire 2.5., on peut bien évidemment remplacer la fonction exponentielle par n'importe quelle fonction entière définie par une série à coefficients positifs.

Nous pouvons alors énoncer le

Théorème 2.6.—*Si H est une fonction réelle GKS1, et si f est GKS1, alors* $\langle f\rangle_H \in \mathbb{R}_+$.

Preuve. Il suffit d'appliquer les corollaires 2.5. et 2.4. Remarquons que le résultat précédent ne demande pas que f soit réelle. D'autre part, nous ne nous sommes restreints aux fonctions H réelles que parce que nous ne voulions traiter que des probabilités, et non pas des mesures à valeurs complexes ou négatives. $\square$

Tout ceci ne serait qu'un ramassis de trivialités s'il n'y avait des exemples intéressants de systèmes GKS1. La proposition suivante montre comment construire des systèmes GKS1 compliqués à partir de systèmes plus simples (propriété de tensorisation) :

Théorème 2.7.—*Si (E,μ_0) et (F,ν_0) sont des ensembles munis de deux systèmes GKS1 $\Xi = (x_0,\cdots,x_n)$ et $\Psi = (y_0,\cdots,y_p)$ respectivement, le produit $(E\times F,\mu_0\otimes\nu_0)$ admet le système GKS1 $\Xi\otimes\Psi = \{(x_i\otimes y_j),\ (i,j)\in\{0,\cdots,n\}\times\{0,\cdots,p\}\}$. Celui-ci est réel (respectivement unitaire) si Ξ et Ψ le sont.*

Preuve. Rappelons tout d'abord que, par définition, et pour (a,b) dans $E\times F$, $x_i\otimes y_j(a,b) = x_i(a)y_j(b)$. Il est alors clair que $\Xi\otimes\Psi$ est un système sur $E\times F$. Pour voir qu'il est GKS1, il suffit de considérer les produits

$$\langle (x_i\otimes y_j)(x_k\otimes y_l)(x_m\otimes y_n)\rangle_0 = \langle x_ix_kx_m\rangle_0\langle y_jy_ly_n\rangle_0.$$

Remarquons qu'ainsi

$$a^{\Xi\otimes\Psi}_{(ij)(kl)(mn)} = a^{\Xi}_{ikm}a^{\Psi}_{jln}.$$

$\square$

Nous retrouvons ainsi les inégalités GKS1 de $\{-1,1\}^S$ de l'introduction en partant de l'espace $\Omega_0 = \{-1,1\}$, muni de la mesure uniforme et du système réel unitaire $\Xi = (1,\omega)$, qui est bien évidemment GKS1. Sur $\{-1,1\}^S$, le système $(\omega_A, A\subset S)$ n'est rien d'autre que $\Xi^{\otimes S}$, et l'inégalité GKS1 de l'introduction est alors un cas particulier du théorème 2.6.

De la même façon, si E est un espace fini probabilisé muni d'une base GKS1 $\Xi = \{x_0,\cdots,x_n\}$, on pourra considérer sur $\Omega = E^S$ les fonctions x_A définies pour toute application $A : S\to\{0,\cdots,n\}$ par

$$x_A = \otimes_{s\in S}x_{A(s)}.$$

On dira qu'un hamiltonien ou qu'une fonction sont GKS1 s'ils s'écrivent $\sum_A \lambda_A x_A$ avec $\lambda_A \geq 0$. On retrouve ainsi une inégalité GKS1 analogue à celle de la première partie.

En mécanique statistique, on s'intéresse à des mesures sur E^S, où S et E sont des ensembles finis. (C'est en général plus compliqué que celà car on s'intéresse à des propriétés asymptotiques lorsque S croit vers un graphe ayant une structure raisonnable, en général $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^d$.) Mais on ne peut rien faire de sérieux s'il n'y a pas un groupe G qui opère transitivement sur E, et tel que la mesure sur E^S ait des propriétés de stabilité, par exemple: $\mu(a_i, i \in S) = \mu(ga_i, i \in S)$, $\forall g \in G$. Moyennant ceci, et si du moins ce groupe opère proprement, on ne perd en général rien à supposer que E lui même est un groupe. (Cette restriction est beaucoup moins évidente lorsque le groupe n'opère pas proprement.) Or, pour certaines fonctions H particulières sur G^S (celles qui ne dépendent que des classes de conjugaison dans le groupe G), il y a des systèmes GKS1 naturels. C'est ce que nous allons exposer ci-dessous. Pour les lecteurs qui, comme les auteurs de cet exposé, ne sont pas très familiers avec les groupes finis, nous commençons par faire quelques rappels.

Soit donc G un groupe fini, que nous munissons de sa mesure uniforme μ_0. Une représentation de G est un homomorphisme $X : G \to U(E)$, où E est un espace hermitien de dimension finie, et $U(E)$ désigne le groupe des opérateurs unitaires de E. (On dira que X est à valeurs dans E). Une représentation est dite irréductible s'il n'y a pas de sous espace invariant de E sous l'action de tous les $X(g)$ autres que E lui même et $\{0\}$. Toute représentation se décompose en somme de représentations irréductibles. Deux représentations X et X_1 dans E et E_1 sont équivalentes s'il existe un isomorphisme $A : E \to E_1$ tel que

$$\forall g \in G,\ X_1(g) = AX(g)A^{-1}.$$

Le fait remarquable est qu'il n'y a à équivalence près qu'un nombre fini de représentations irréductibles. On note $\Sigma = \{0, 1, \cdots, n\}$ un ensemble qui paramétrise ces représentations irréductibles à équivalence près, c'est-à-dire que, pour tout $i = 0, \cdots, n$, on dispose d'une représentation irréductible X_i, à valeurs dans un espace E_i, et que toute représentation irréductible est équivalente à l'une des représentations X_i.

Lorsque X est une représentation, sa trace $\mathrm{tr}(X(g))$ est une fonction f_X de G dans $\mathbb{C}$, qui a la propriété suivante

$$\forall (g,h) \in G^2,\ f_X(h^{-1}gh) = f_X(g),$$

comme cela se voit immédiatement sur les formules

- $X(h^{-1}gh) = X(h)^{-1}X(g)X(h)$ (car X est un homomorphisme);
- $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Les traces des représentations irréductibles s'appellent les caractères du groupe G. Lorsque X_i est l'une des représentations irréductibles de notre liste précédente, nous noterons χ_i le caractère associé: il est bien évidemment indépendant du choix de la représentation irréductible parmi sa classe d'équivalence. Nous appelerons Ξ l'ensemble de ces fonctions. Remarquons que Ξ contient la fonction constante 1 (qui est la trace de la représentation triviale Ξ_0 sur $\mathbb{C}$: $\Xi_0(g)(z) = z, \forall z \in \mathbb{C}$). C'est aussi un ensemble de fonctions stable par conjugaison, car si $g \to X(g)$ est une représentation irréductible, alors il en va de même de $g \to \overline{X(g)}$.

D'autre part, sur le groupe G, la relation $g \sim k \Leftrightarrow \exists h,\ g = h^{-1}kh$ est une relation d'équivalence, pour laquelle les classes d'équivalence s'appellent les classes de conjugaison. Nous appelerons $\hat{G}$ l'ensemble quotient, π la projection de G sur $\hat{G}$ et $\hat{\mu}_0$ la mesure image de μ_0 par π : si $\hat{g}$ désigne la classe de $g \in G$, $\mu_0(\hat{g}) = |\hat{g}|/|G|$, où $|A|$ désigne le cardinal de l'ensemble A. D'après ce qu'on vient de voir, les traces des représentations sont constantes sur les classes, et définissent en fait des fonctions sur $\hat{G}$. Le théorème suivant est alors fondamental :

Théorème 2.8.—*L'ensemble Ξ est un système unitaire sur $L^2(\hat{G}, \hat{\mu}_0)$.*

Nous renvoyons au chapitre 1 du livre de DIACONIS [D] pour un exposé élémentaire de la preuve de ce théorème, que l'on trouve dans tous les ouvrages de base traitant des représentations linéaires des groupes finis. Ce qui nous intéresse ici est en fait le résultat suivant :

Théorème 2.9.—*Le système Ξ est GKS1.*

Preuve. Il suffit de démontrer que, si χ_1 et χ_2 sont deux caractères, le produit $\chi_1\chi_2$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs des χ_i. Nous allons voir qu'en fait ces coefficients λ_i sont entiers. En effet, soient X_1 et X_2 les représentations irréductibles, à valeurs dans E_1 et E_2, dont ces caractères sont les traces. Nous avons

$$\chi_1\chi_2(g) = \mathrm{tr}(X_1 \otimes X_2(g)),$$

et il ne reste plus qu'à décomposer la représentation $X_1 \otimes X_2$, à valeurs dans $E_1 \otimes E_2$, en somme de représentations irréductibles : le coefficient λ_k est alors le nombre de fois que, dans la décomposition de $X_1 \otimes X_2$, apparaît une représentation équivalente à X_k. $\square$

Nous voyons maintenant pourquoi il est important de ne pas se limiter aux systèmes GKS1 réels. Néanmoins, nous allons voir qu'on peut le faire si l'on accepte un peu plus de symétrie dans le hamiltonien. En effet, il est tout d'abord clair sur la définition de la conjugaison qu'elle est préservée par la transformation $g \to g^{-1}$, si bien que l'on peut parler de la classe $\hat{g}^{-1}$. Or, il découle immédiatement de cette même définition que, si χ est un caractère, $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi}(g)$. En particulier, les parties réelles de caractères $c_i(g)$ forment une base de $L^2(\hat{G}_s, \hat{\mu}_s)$, où $\hat{G}_s$ désigne le quotient de $\hat{G}$ par la relation $g \sim g^{-1}$, et $\hat{\mu}_s$ la mesure image. Puisque $c_i(g)$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs de χ_i et $\chi_{\bar{i}}$, il découle de la propriété de multiplication que le système formé des c_i satisfait les conditions (i) et (ii) des systèmes GKS1.

Les groupes finis ont une autre propriété remarquable de dualité que nous allons détailler ci-dessous.

De façon générale, considérons un ensemble probabilisé fini $\{E, \mu\}$ à $n+1$ points tel que $\mu(a) > 0$ pour tout a de E, muni d'une base $\Xi = \{x_0, \cdots, x_n\}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(E, \mu)$. Appelons E^* l'ensemble $\{0, \cdots, n\}$, que nous munissons d'une mesure ν chargeant tous les points. Alors, pour tout $a \in E$, les fonctions $y_a : E^* \to \mathbb{C}$ définies par $y_a(i) = x_i(a)\sqrt{\mu(a)}/\sqrt{\nu(i)}$ forment une base de $L^2_{\mathbb{C}}(E^*, \nu)$. Pour s'en convaincre, il suffit d'écrire les relations disant que Ξ est une base sous forme matricielle $XX^* =$

Id, avec $X_i^a = x_i(a)\sqrt{\mu(a)}$, et de remarquer que cette relation implique la relation inverse $X^*X = Id$, qui peut se voir de même comme le fait que le système Ξ^* formé des fonctions y_a est une base de $L^2_C(E^*, \nu)$.

Rien ne nous dit en général que, si Ξ est un système non réel, Ξ^* soit un système. Dans le cas des groupes, c'est automatique car si χ est un caractère, $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$. De plus, si e désigne l'élément neutre de G, appelons n_i la valeur de $\chi_i(e)$. Si E_i est un espace dans lequel se représente le caractère χ_i, nous avons $\dim(E_i) = n_i$. D'autre part, il est bien connu que $\sum_i n_i^2 = |G|$. En particulier, si l'on choisit pour ν la mesure $\nu(i) = n_i^2/|G|$, on fait de Ξ^* un système unitaire, l'unité correspondant à l'élément neutre du groupe. Nous avons alors

$$\varphi_{\hat{g}}(i) = \chi_i(g)\sqrt{|\hat{g}|}/n_i.$$

La propriété remarquable est que Ξ^* est encore un système GKS1 unitaire sur $\hat{G}^*$. En effet, nous avons

Proposition 2.10.—*Pour tous $\{g, h, k\}$ dans G,*

$$\sum_i \varphi_{\hat{g}}(i)\varphi_{\hat{h}}(i)\overline{\varphi_{\hat{k}}(i)}\nu(i) = a_{\hat{g}\hat{h}\hat{k}}\sqrt{\frac{|\hat{k}|}{|\hat{g}||\hat{h}|}},$$

où les coefficients $a_{\hat{g}\hat{h}\hat{k}}$ sont des entiers qui sont définis de la manière suivante : si $k \in \hat{k}$, $a_{\hat{g}\hat{h}\hat{k}}$ est le nombre d'éléments de $\hat{g} \times \hat{h}$ dont le produit vaut k.

Nous ne donnerons pas de démonstration de ce résultat (qui en fait est facile) : le lecteur intéressé pourra par exemple le déduire aisément de la formule donnée dans [I , exer (3.9)].

À titre d'exemple, nous décrivons ci-dessous les systèmes GKS1 unitaires sur les ensembles à 2 ou 3 points.

Sur deux points, c'est très facile. Tout système unitaire est nécessairement réel, et s'écrit $\{1, x\}$, où la variable x ne prend que deux valeurs. En écrivant $\langle f \rangle$ pour la moyenne de la fonction f, on doit avoir $\langle x \rangle = 0$ et $\langle x^2 \rangle = 1$. La seule condition pour que ce système soit GKS1 est que l'intégrale $\langle x^3 \rangle = X$ soit positive. En écrivant que x^2 est combinaison linéaire des fonctions 1 et x, on obtient

$$x^2 = a + bx.$$

En prenant l'espérance des deux membres, on voit que $a = 1$, et, en multipliant par x et en prenant la moyenne, on obtient $b = X$. Les deux valeurs de x sont donc

$$x_1 = \frac{X + \sqrt{X^2 + 4}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{X - \sqrt{X^2 + 4}}{2}.$$

Les valeurs correspondantes prises par la mesure μ sont déterminées par la condition $\langle x\rangle = 0$, ce qui donne

$$\mu(1) = \frac{X^2+2-X\sqrt{X^2+4}}{X^2+4-X\sqrt{X^2+4}} \quad \text{et} \quad \mu(2) = \frac{2}{X^2+4-X\sqrt{X^2+4}}.$$

Le lecteur vérifiera sans peine que ceci donne bien un système GKS1 pour toutes les valeurs positives de X.

Sur un espace à trois points, les choses sont beaucoup plus simples pour les systèmes non réels que pour les autres. Commençons par les systèmes unitaires non réels. Ils s'écrivent $\{1, x, \overline{x}\}$. Les conditions d'orthogonalité s'écrivent

$$\langle x\rangle = \langle \overline{x}\rangle = \langle x^2\rangle = \langle \overline{x}^2\rangle = 0;\ \langle x\overline{x}\rangle = 1.$$

Posons

$$\langle x^3\rangle = \langle \overline{x}^3\rangle = X \geq 0\,;\ \langle x^2\overline{x}\rangle = \langle x\overline{x}^2\rangle = Z \geq 0.$$

En écrivant x^2 et $x\overline{x}$ comme combinaisons linéaires de $1, x$ et $\overline{x}$, et en identifiant comme plus haut les coefficients de ces combinaisons, nous obtenons

$$x^2 = Zx + X\overline{x}\,; \tag{2.1}$$

$$x\overline{x} = 1 + Z(x+\overline{x}). \tag{2.2}$$

Observons tout d'abord que x ne prend pas les valeurs 0 et Z, car celà donne une impossibilité dans l'équation (2.2). On peut donc tirer de (2.2) la valeur de $\overline{x} = (1+Zx)/(x-Z)$, et la reporter dans (2.1), ce qui nous donne $P(x) = 0$, avec

$$P(x) = x^3 - 2Zx^2 + Z(X-Z)x - X.$$

On en déduit que x prend ses valeurs parmi les trois racines de P, dont l'une au moins est réelle (puisque P est un polynôme du troisième degré à coefficients réels). Si x n'a pas de valeurs réelles, c'est donc qu'elle ne prend que deux valeurs distinctes, x_1 et x_2. Éliminons cette possibilité: en écrivant $(x-x_1)(x-x_2) = 0$, on trouve une relation $x^2 = ax + b$. En prenant les espérances, on trouve $b = 0$, et, en multipliant par $\overline{x}$, on obtient $a = Z$. Ceci montre que les deux seules valeurs possibles sont 0 et Z, ce qui est exclu comme nous venons de le voir. Donc, x prend au moins une fois la valeur réelle x_1 : en reportant cette valeur dans (2.1), puisque x ne s'annule pas, on voit que $x_1 = Z + X$, et, en reportant cette valeur dans (2.2), on obtient $X^2 = 1 + Z^2$. Les deux autres valeurs (distinctes), sont solutions de $P_1(x) = 0$, avec $P_1 = P/(x-X-Z)$, c'est-à-dire

$$P_1(x) = x^2 - (X-Z)x - X(X-Z) = 0.$$

On obtient finalement les deux autres valeurs de x, x_2 et x_3, et les valeurs correspondantes $\mu(1)$, $\mu(2)$ et $\mu(3)$ de la mesure sont obtenues en écrivant $\langle x\rangle = 0$, $\langle x\overline{x}\rangle = 1$. Ceci donne, en posant $Z = \mathrm{sh}(\theta)$,

$$x_1 = e^{\theta};\ \mu(1) = (1+2e^{2\theta})^{-1};\ x_2 = \overline{x}_3 = -e^{-\theta}(1+i\sqrt{1+2e^{2\theta}})/2;$$
$$\mu(2) = \mu(3) = e^{2\theta}(1+2e^{2\theta})^{-1}.$$

Le lecteur pourra vérifier que tout ceci donne bien un système GKS1 complexe. Le cas $\theta = 0$ correspond aux caractères du groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Les systèmes réels sur trois points ont plus de degré de liberté. Ils s'écrivent $\{1, x, y\}$, avec les relations

$$\langle x \rangle = \langle y \rangle = \langle xy \rangle = 0;\ \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = 1.$$

Nous introduisons les quatre paramètres $X = \langle x^3 \rangle, Y = \langle y^3 \rangle, Z = \langle x^2 y \rangle, T = \langle xy^2 \rangle$. Puis nous écrivons comme plus haut x^2, y^2, et xy comme combinaisons linéaires de 1, x et y. En identifiant les coefficients, il vient

$$x^2 = 1 + Xx + Zy, \tag{2.3}$$

$$xy = Zx + Ty, \tag{2.4}$$

$$y^2 = 1 + Tx + Yy. \tag{2.5}$$

Maintenant, en écrivant l'identité des produits scalaires $\langle x^2 y^2 \rangle = \langle (xy)^2 \rangle$, on obtient la relation

$$Z^2 + T^2 = 1 + XT + ZY. \tag{2.6}$$

Commençons par étudier le cas où ni Z ni T ne sont nuls.

Remarquons qu'alors les variables x et y prennent trois valeurs distinctes. Pour le voir, il suffit de faire le même raisonnement que plus haut. Faisons le pour x par exemple: si x ne prend que deux valeurs, alors il existe une relation $x^2 = a + bx$, et l'identification des espérances donne $a = 1$, $b = X$, ce qui comparé à (2.3) donne $Zy = 0$, d'où $y = 0$, ce qui est impossible.

D'autre part, x ne prend pas la valeur T, sinon, en reportant cette valeur dans (2.4), on obtiendrait une contradiction. On peut alors tirer la valeur de y de (2.4), ce qui donne

$$y = Zx/(x - T). \tag{2.7}$$

On reporte alors cette valeur dans (2.3) et on obtient $P(x) = 0$, avec

$$P(x) = x^3 - (X + T)x^2 - (1 + Z^2 - XT)x + T. \tag{2.8}$$

Les racines de ce polynôme sont les seules valeurs possibles pour x, et ce polynôme doit donc avoir trois racines réelles distinctes. Cette condition (compliquée) s'écrit

$$\begin{aligned}[(X+T)^2 + 4(1+Z^2)][(1+Z^2-XT)2 + 54T(X+T)] \\ \leq 27T[T^2X + T(X^2 - Z^2) - X(1+Z^2)]\end{aligned} \tag{2.9}$$

Si cette condition est réalisée, alors les valeurs de μ sont caractérisées par les conditions $\langle x \rangle = 0$, $\langle x^2 \rangle = 1$. Réciproquement, donnons nous des coefficients réels positifs X, Y, Z et T satisfaisant aux conditions (2.6) et (2.9), prenons pour valeurs de x les trois racines distinctes de l'équation (2.8), et définissons y par la relation (2.7). Définissons la mesure μ par les relations $\langle x \rangle = 0$ et $\langle x^2 \rangle = 1$: on peut voir (en faisant le calcul) que ceci donne bien une mesure de probabilité (i.e. que les solutions sont des réels de l'intervalle $[0, 1]$), que la variable y satisfait l'équation (2.5) (c'est à celà que sert la relation (2.6)) et que les relations (2.3) et (2.4) sont automatiquement vérifiées. Il ne reste plus alors qu'à calculer les espérances pour voir qu'on a bien un système GKS1.

Évidemment, il est bien plus difficile dans ce cas de donner une relation algébrique entre les paramètres X, Y, Z, T et les valeurs des variables, dans la mesure où on ne peut pas, bien que réelles, exprimer ces valeurs sans utiliser des nombres complexes. Il est beaucoup plus facile d'exprimer les valeurs de X, Y, Z et T comme fonctions symétriques des valeurs de x, et de traduire ainsi en conditions sur les valeurs des variables les conditions GKS1. On peut ainsi voir que les variables x et y ont chacune deux valeurs positives et une négative, que le maximum est atteint sur le même point, et que l'ordre est inversé sur les deux autres points.

Remarquons enfin que $X+T$ est la somme des valeurs de x, et de même $Z+Y$ pour y. Ceci permet de voir qu'il n'y a pas de système GKS1 réel sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, car les conditions d'intégrale nulle pour x et y donneraient $X=Y=Z=T=0$, ce qui est impossible. Cette obstruction n'a pas lieu pour la mesure uniforme sur un ensemble à 4 points: les caractères du groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ nous en fournissent un exemple.

Il nous reste à étudier le cas où $ZT=0$. L'identité (2.6) nous montre que ces deux constantes ne peuvent pas s'annuler ensemble. Donc, quitte à échanger les rôles de x et y, on peut toujours supposer que $Z=0$. Alors, l'égalité (2.3) nous montre que x ne prend que deux valeurs, et on peut voir grâce à (2.6) que ce sont T et $-1/T$. D'autre part, (2.4) nous montre que $y=0$ si $x \neq T$. Comme y est de moyenne nulle et non constante, elle doit prendre deux valeurs distinctes autres que 0: ceci montre que x prend les valeurs $(T,T,-1/T)$, lorsque y prend les valeurs $(y_1,y_2,0)$, où y_1 et y_2 sont les deux racines de l'équation $y^2=Yy+1+T^2$ (identité (2.5)). Les valeurs de la mesure sont établies en écrivant que $\langle x\rangle=\langle y\rangle=0$. Ce sont les équations satisfaites par x et y qui assurent qu'alors $\langle x^2\rangle=\langle y^2\rangle=1$.

3— L'inégalité GKS2.

Alors que les conditions qui assurent l'inégalité GKS1 sont plutôt claires et faciles à établir, nous allons voir qu'il n'en est pas de même pour l'inégalité GKS2. Dans tout ce qui suit, nous considèrerons un ensemble fini E, muni d'une mesure de probabilité μ chargeant tous les points, et d'un système $\Xi=\{1,x_1,\cdots,x_n\}$ unitaire réel et GKS1.

Pour tout i de $\{1,\cdots,n\}$, nous considèrerons sur l'ensemble $E\times E$ les deux fonctions suivantes

$$s_i(a,b)=\frac{x_i(a)+x_i(b)}{2}\ ;\ d_i(a,b)=\frac{x_1(a)-x_i(b)}{2}.$$

En d'autres termes, $s_i=x_i\odot 1$, et $d_i=x_i\wedge 1$, où la première opération désigne le produit tensoriel symétrique et la seconde le produit extérieur.

Définition.—

3.1.– *Soit $A=\{m_1,\cdots,m_n\}$ et $B=\{n_1,\cdots,n_n\}$ deux ensembles d'entiers. Nous appelerons monômes toutes les fonctions s_Ad_B sur $E\times E$ de la forme*

$$s_Ad_B=\prod_{i=1}^{n} s_i^{m_i}d_i^{n_i}.$$

Si tous les n_i sont nuls, on dira que c'est un monôme en s. Son degré est $\sum n_i + m_i$ et sa parité sera celle de $\sum n_i$.

3.2.– *Nous dirons que le système Ξ vérifie la propriété GKS2 si, pour tout couple $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$, et tout monôme s_A en s, on a*

$$\int\int_{E\times E} \{d_i d_j s_A\}(a,b)\,\mu(da)\mu(db) \geq 0.$$

3.3. – *Nous dirons que le système vérifie la propriété GKS2* si, pour tout monôme $s_A d_B$, on a*

$$m_{A,B} := \int\int_{E\times E} \{s_A d_B\}(a,b)\,\mu(da)\mu(db) \geq 0.$$

Remarques.—

3.4. – La propriété GKS2* est plus forte que la propriété GKS2.

3.5. – Puisque d_i est une fonction antisymétrique sur $E \times E$ et que s_i est symétrique, il est clair que les nombres $m_{A,B}$ apparaissant dans la propriété GKS2* sont nuls pour tous les monômes impairs.

3.6. – Les fonctions s_i sont des fonctions GKS1 sur $E \times E$, pour le système GKS1 $\Xi \otimes \Xi$. Il en va donc de même pour les fonctions s_A, d'après la propriété de multiplication. On en déduit donc que les nombres $m_{A,0}$ sont tous positifs.

3.7. – Si $i \in \{1,\cdots,n\}$, le produit $s_i d_i(a,b)$ vaut $x_i^2(a) - x_i^2(b)$. Or, nous avons vu dans la première partie que $x_i^2 = \sum_j a_{iij} x_j$, où les a_{ijk} sont des coefficients positifs. Ceci donne $s_i d_i = \sum_j a_{iij} d_j$. On voit donc que, si l'un des produits $m_i n_i$ est non nul, la quantité $m_{A,B}$ s'exprime comme combinaison linéaire à coefficients positifs de quantités $m_{C,D}$, où le degré de $s_C d_D$ est strictement inférieur à celui de $s_A d_B$. En répétant le procédé, on voit qu'il suffit pour vérifier la propriété GKS2* de la vérifier pour des A et B à supports disjoints.

3.8.– Si des fonctions y_i sont GKS1, alors toute expression de la forme

$$\prod_i (y_i \odot 1)^{m_i} (y_i \wedge 1)^{n_i}$$

est combinaison linéaire à coefficients positifs de monômes. Elle a donc aussi une intégrale positive sur $E \times E$.

L'intérêt de la propriété GKS2 réside dans le résultat suivant, analogue à l'inégalité GKS2 de la première partie :

Proposition 3.9.—*Si le système Ξ vérifie la propriété GKS2, et si le Hamiltonien H est GKS1, deux fonctions GKS1 sont positivement corrélées pour la mesure μ_H.*

Preuve. Comme dans la démonstration de la même proposition dans la première partie, on se ramène au cas de la corrélation de x_i et x_j. Posons

$$H(\omega) = \sum_i \lambda_i x_i(\omega), \text{ avec } \lambda_i \geq 0.$$

En se rappelant que $\mu_H(d\omega) = \exp(H(\omega))\,\mu_0(d\omega)/Z$, où Z est une constante de normalisation, on écrit

$$\begin{aligned} 2[\langle x_i x_j\rangle_H - \langle x_i\rangle_H \langle x_j\rangle_H] = \\ \frac{1}{Z^2}\int\int_{E\times E} [x_i(\omega) - x_i(\omega')][x_j(\omega) - x_j(\omega')]\times \\ \times \exp[\sum_k \lambda_k(x_k(\omega) + x_k(\omega'))]\,\mu_0(d\omega)\mu_0(d\omega') \\ = \frac{4}{Z^2}\int\int_{E\times E} d_i d_j \exp[\sum_k 2\lambda_k s_k]\,\mu_0(d\omega)\mu_0(d\omega'). \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à approcher l'exponentielle par des sommes finies $\sum_0^n(\sum_k 2\lambda_k s_k)^p/p!$ (il n'y a aucun problème de convergence puisque, travaillant sur un ensemble fini, toutes les variables qui apparaissent sont bornées), à développer cette approximation en combinaisons linéaires finies de la forme $\sum_A \mu_A s_A$, avec $\mu_A \geq O$, et à appliquer la propriété GKS2. $\square$

Le problème qui surgit est de savoir comment vérifier la propriété GKS2 sur des ensembles de la forme E^S, pour le système $\Xi^{\otimes S}$: il n'est pas certain que cette propriété soit stable par tensorisation. C'est à cela que sert la propriété GKS2* : en effet, nous avons la

Proposition 3.10.—*Soient E_1 et E_2 deux ensembles mesurés finis munis de systèmes GKS1 unitaires réels Ξ_1 et Ξ_2 vérifiant la propriété GKS2*. Sur le produit $E_1 \times E_2$, le système $\Xi_1 \otimes \Xi_2$ vérifie la propriété GKS2*.*

Preuve. Rappelons que $s_i = x_i \odot 1$ et $d_i = x_i \wedge 1$. Nous noterons s_i^1 et d_i^1 les fonctions sur $E_1 \times E_1$ relatives au système Ξ_1 et s_j^2 et d_j^2 celles relatives au système Ξ_2. Sur le produit $(E_1 \times E_2) \times (E_1 \times E_2)$, et avec l'identification évidente de $(E_1 \times E_2) \times (E_1 \times E_2)$ avec $(E_1 \times E_1) \times (E_2 \times E_2)$, écrivons

$$(x\otimes y) \odot (1\otimes 1) = (x \odot 1)\otimes(y \odot 1) + (x \wedge 1)\otimes(y \wedge 1), \text{ et}$$

$$(x\otimes y) \wedge (1\otimes 1) = (x \wedge 1)\otimes(y \odot 1) + (x \odot 1)\otimes(y \wedge 1).$$

Cela donne

$$s_{(ij)} = s_i\otimes s_j + d_i\otimes d_j \;;\; d_{(ij)} = s_i\otimes d_j + d_i\otimes s_j.$$

On voit donc que les fonctions $s_A d_B$ calculées pour le système $\Xi_1 \otimes \Xi_2$ s'écrivent comme combinaisons linéaires à coefficients positifs de fonctions $(s^1_{A_1} d^1_{B_1})\otimes(s^2_{A_2} d^2_{B_2})$. On en déduit immédiatement la propriété GKS2* pour $E_1 \times E_2$. $\square$

Désormais, nous appelerons système GKS2* tout système GKS1 unitaire réel satisfaisant la propriété GKS2*.

Nous obtenons donc le résultat analogue à la proposition (3.9), mais sur E^S au lieu de E. Comme plus haut, étant donné un système GKS2* Ξ sur E, on considère le système GKS2* $\Xi^{\otimes S}$ sur E^S, et la notion de fonction GKS1 est relative à ce système. Nous avons alors le

Corollaire 3.11.—*Soit E un ensemble probabilisé fini muni d'un système GKS2* Ξ ; si H est un hamiltonien GKS1 sur E^S, la corrélation pour μ_H de deux fonctions GKS1 est positive.*

Preuve. Il suffit d'appliquer les deux propositions précédentes. □

Le principal avantage de la formulation précédente est qu'il suffit de vérifier la propriété GKS2* sur E, qui en général est un ensemble simple et bien connu, pour l'avoir sur E^S, qui est a priori de plus en plus compliqué à mesure que $|S|$ croît vers l'infini.

Jusqu'à présent, nous n'avons pas réussi à mettre en évidence un seul système GKS1 unitaire réel qui ne vérifie pas la propriété GKS2* ; cette situation semble suggérer que la propriété GKS1 pourrait entraîner la propriété GKS2* et donc la propriété GKS2. Si tel était le cas, la propriété GKS2* deviendrait inutile au vu de la proposition 3.9 et du théorème 2.7.

Nous donnons ci-dessous quelques exemples de systèmes vérifiant la propriété GKS2* :

Proposition 3.12.—*Sur un ensemble à deux points, tout système GKS1 unitaire satisfait la propriété GKS2*.*

Preuve. Considérons un système GKS1 unitaire $\{1, x\}$. Il n'y a qu'une seule fonction s et une seule fonction d. Compte tenu de la remarque 3.7, les seules conditions à vérifier sont que, pour tout entier n, les quantités $\langle s^n \rangle$ et $\langle d^n \rangle$ sont positives. La remarque 3.6 règle le cas des premières. Pour les secondes, on peut se ramener au cas n pair par la remarque 3.5, auquel cas il n'y a rien à dire. □

Ensuite, nous recopions de [Gi] le résultat suivant :

Théorème 3.13.—*Soit G un groupe commutatif fini et G_s son quotient par la relation $g \sim g^{-1}$. Les parties réelles des caractères des représentations irréductibles forment un système GKS2*.*

Preuve. Nous avons déjà vu que, pour tous les groupes finis, les parties réelles des caractères forment un système GKS1 unitaire réel. Il nous reste à voir le plus difficile, c'est à dire que l'inégalité GKS2* est satisfaite.

Dans tout ce qui suit, nous noterons $\mathbb{Z}_p$ le groupe additif $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Rappelons tout d'abord qu'un groupe fini est un produit de groupes $\mathbb{Z}_{p_i}$: posons donc $G = \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_{p_i}$. (Attention, il ne faut pas confondre l'ensemble quotient G_s avec le produit des ensembles quotients : il y a beaucoup plus d'éléments dans le premier que dans le second.) Les caractères de $\mathbb{Z}_p$ s'écrivent $g \to \exp(2i\pi\theta g)$, avec $\theta = k/p$, $k = 0, \cdots, p-1$. Les caractères du produit (qui sont les produits des caractères) peuvent donc se paramétrer par l'ensemble

$$\Theta = \{(k_i/p_i)_{i=1,\cdots,n},\ k_i = 0, \cdots, p_i - 1.\}$$

Pour tout $\theta \in \Theta$, nous noterons $\exp_\theta(g) = \exp(2i\pi \sum_i \theta_i g_i)$ la valeur du caractère correspondant sur $g = (g_i)_{i=1,\cdots,n}$; sa partie réelle sera notée $\cos_\theta(g)$ et sa partie imaginaire $\sin_\theta(g)$. Sur $G \times G$, nous considérons les sommes s_θ et les différences d_θ correspondant aux fonctions $\cos_\theta$, et nous avons à démontrer que les quantités

$$m_{A,B} = \sum_{(g,h)\in G\times G} \prod_{\theta\in\Theta} s_\theta^{A(\theta)} d_\theta^{B(\theta)}$$

sont positives, où $A(\theta)$ et $B(\theta)$ prennent des valeurs entières.

Introduisons alors le groupe $\hat{G} = \Pi_{i=1}^n \mathbb{Z}_{2p_i}$, et considérons le sous groupe G_0 à 2^n points formé des éléments g tels que $2g = 0$. (Pour tout i, $g_i = 0$ ou p_i). Le groupe G s'identifie alors au quotient $\hat{G}/G_0$: si $\hat{g}_i$ est dans $\mathbb{Z}_{2p_i}$, $\hat{g}_i$ et $\hat{g}_i + p_i$ ont la même valeur dans $\mathbb{Z}_{p_i}$. Appelons ρ la projection de $\hat{G}/G_0$ sur G. Tout caractère θ de G se remonte en un caractère sur $\hat{G}$, avec la formule $\exp_\theta(\hat{g}) = \exp_\theta(\rho(\hat{g}))$. (Ceci revient à dire que, pour $\theta \in \Theta$, la fonction $\exp_\theta(\hat{g})$ prend la même valeur sur tous les antécédents d'un point donné de G.) Si $\hat{\Theta}$ désigne l'ensemble des caractères de $\hat{G}$, on plonge ainsi Θ dans $\hat{\Theta}$ par la formule évidente $(k_i/p_i) \to (2k_i/2p_i)$. Remarquons qu'ainsi, si $\theta \in \Theta$, $\theta/2 \in \hat{\Theta}$.

On remonte de même les fonctions $\prod_{\theta\in\Theta} s_\theta^{A(\theta)} d_\theta^{B(\theta)}$ en des fonctions $f_{A,B}$ sur $\hat{G} \times \hat{G}$, et il nous reste à voir que

$$\sum_{\hat{G}\times\hat{G}} f_{A,B}(\hat{g}, \hat{h}) \geq 0.$$

Écrivons maintenant les formules d'addition des cosinus:

$$\frac{\cos(a) + \cos(b)}{2} = \cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{b-a}{2})\ ;\ \frac{\cos(a) - \cos(b)}{2} = \sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{b-a}{2}).$$

Elles se traduisent par

$$\begin{aligned} s_\theta(\hat{g}, \hat{h}) &= \cos_{\theta/2}(\hat{g} + \hat{h}) \cos_{\theta/2}(\hat{h} - \hat{g}), \text{ et} \\ d_\theta(\hat{g}, \hat{h}) &= \sin_{\theta/2}(\hat{g} + \hat{h}) \sin_{\theta/2}(\hat{h} - \hat{g}). \end{aligned}$$

C'est pour donner un sens à ces formules que nous avons introduit $\hat{G}$. Si on appelle maintenant $g_{A,B}(\hat{g})$ la fonction

$$\prod_{\theta\in\Theta} \cos_{\theta/2}^{A(\theta)}(\hat{g}) \sin_{\theta/2}^{B(\theta)}(\hat{g}),$$

nous voyons que $f_{A,B}(\hat{g}, \hat{h}) = g_{A,B}(\hat{g} + \hat{h}) g_{A,B}(\hat{h} - \hat{g})$.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que, pour toute fonction f réelle définie sur

$\hat{G}$, la quantité

$$m_f = \sum_{\hat{G}\times\hat{G}} f(\hat{g}+\hat{h})f(\hat{h}-\hat{g})$$

est positive. Pour celà, considérons l'application $\varphi\ :\ \hat{G}\times\hat{G}\to\hat{G}\times\hat{G}$ définie par

$$\varphi(\hat{g},\hat{h}) = (\hat{g}+\hat{h},\hat{g}-\hat{h}).$$

C'est un homomorphisme de groupe dont il est aisé de déterminer le noyau et l'image. Commençons par le noyau: c'est l'ensemble des $(\hat{g},\hat{h}) = (g_i,g_i)$ avec pour tout i, $g_i = 0$ ou $g_i = p_i$. (Ce n'est pas $G_0\times G_0$!) Il a 2^n éléments.

Pour décrire l'image, appelons $\mathbb{Z}_i^{(0)}$ le sous groupe de $\mathbb{Z}_{2p_i}$ formé des éléments de la forme $2g$, et $\mathbb{Z}_i^{(1)}$ son complémentaire. Pour tout $\varepsilon\in\{0,1\}^n$, posons $G_\varepsilon = \prod_i \mathbb{Z}_i^{(\varepsilon_i)}$. Alors, l'image s'écrit $\bigcup_\varepsilon G_\varepsilon\times G_\varepsilon$: pour s'en convaincre, il suffit de remarquer qu'un couple (z_i,t_i) dans $\mathbb{Z}^2_{2p_i}$ s'écrit (g_i+h_i,g_i-h_i) si et seulement si z_i+t_i et z_i-t_i sont dans $\mathbb{Z}_i^{(0)}$, ce qui est encore équivalent à dire que g_i et h_i sont tous les deux dans la même classe $\mathbb{Z}_i^{(0)}$ ou $\mathbb{Z}_i^{(1)}$.

Une fois ceci fait, φ étant un homomorphisme de groupe, tous les points de l'image ont le même nombre 2^n d'antécédents, et on peut écrire

$$\sum_{\hat{G}\times\hat{G}} f(\hat{g}+\hat{h})f(\hat{g}-\hat{h}) = 2^n \sum_{(z,z')\in\mathrm{Im}(\varphi)} f(z)f(z') =$$
$$= 2^n\sum_\varepsilon \sum_{(z,z')\in G_\varepsilon\times G_\varepsilon} f(z)f(z') = 2^n\sum_\varepsilon(\sum_{G_\varepsilon} f(z))^2 \geq 0.$$

$\square$

La propriété GKS2* établie pour les groupes commutatifs peut nous permettre d'établir une propriété analogue pour certains groupes non commutatifs. À titre d'exemple, nous allons traiter le cas du groupe D_n des symétries d'un polygone régulier à n côtés, pour n impair. Pour celà, nous commençons par un petit lemme technique.

Considérons un ensemble probabilisé fini muni d'un système GKS2* (E,μ,Ξ). Supposons pour fixer les idées que E a $(n+1)$ points et que $\Xi = \{1,x_1,\cdots,x_n\}$. Nous nous proposons de rajouter à E un point supplémentaire s, ayant au moins la moitié de la masse totale, et de construire sur ce nouvel ensemble un système GKS1 unitaire réel possédant la propriété GKS2*.

Pour celà, appelons $\hat{E}$ l'ensemble $E\cup\{s\}$, et considérons un paramètre $\nu\in]0,1[$. Comme probabilité $\hat{\mu}$ sur $\hat{E}$, prenons $\hat{\mu}(s)=\nu$, $\hat{\mu}(a) = (1-\nu)\mu(a)$, pour $a\in E$. Nous allons prolonger les fonctions x_i à $\hat{E}$ en posant $x_i(s) = 0$, et nous les normalisons en posant $\hat{x}_i = x_i/\sqrt{1-\nu}$. Nous introduisons une nouvelle fonction $\hat{x}_\sigma$ sur $\hat{E}$ en posant

$$\hat{x}_\sigma(a) = \alpha > 0, \quad \text{si} \quad a\in E,\ \hat{x}_\sigma(s) = \beta, \quad \text{avec}$$

$\alpha(1-\nu)+\beta\nu = 0$, $\alpha^2(1-\nu)+\beta^2\nu = 1$. Ceci détermine uniquement les valeurs α et β (remarquons qu'alors $\beta\leq 0$), et nous permet de considérer le $(n+1)$-uplet de fonctions $\hat{\Xi} = \{1,\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_n,\hat{x}_\sigma\}$ sur $\hat{E}$. Nous avons alors le

Lemme 3.14.— *Si $\nu \geq 1/2$, $\hat{\Xi}$ est un système GKS2*.*

Preuve. Il nous faut tout d'abord vérifier que $\hat{\Xi}$ est une base orthonormée de $L^2(\hat{E}, \hat{\mu})$. Tous ses éléments étant de norme 1 par construction, il suffit de vérifier qu'ils sont orthogonaux. Le fait que les fonctions $\hat{x}_i$ prennent la valeur 0 sur s pour $i = 1, \cdots, n$ permet de prolonger l'orthogonalité des fonctions x_i sur E à $\hat{E}$. D'autre part, x_σ est orthogonale à 1 par construction, et étant constante sur $\hat{E}$, elle est orthogonale aux $\hat{x}_i$, pour $i = 1, \cdots, n$, car celles-ci sont de moyenne nulle sur E.

Pour vérifier que ce système est GKS1, il nous faut considérer les moyennes

$$\sum_{\hat{E}} \hat{x}_i(a)\hat{x}_j(a)\hat{x}_k(a)\hat{\mu}(a),$$

pour tous les triplets $(i, j, k) \in \{1, \cdots, n, \sigma\}^3$. Si $(i, j, k) \in \{1, \cdots, n\}^3$, celà provient de la propriété GKS1 de Ξ. Si un ou deux des éléments (i, j, k) vaut σ, le résultat est le même, à une constante positive près, que ce que nous obtiendrions sur E en remplaçant x_σ par 1, puisque $\hat{x}_i(s) = 0$ si $i \neq \sigma$, et x_σ est une constante positive sur E. C'est donc à nouveau positif par le fait que Ξ est une base. Il nous reste le cas $i = j = k = \sigma$, et c'est là qu'apparaît la condition $\nu \geq 1/2$. Remarquons que la condition $\nu \geq 1/2$ entraîne également que $\alpha + \beta \geq 0$, propriété dont nous allons nous servir un peu plus bas.

Il nous reste à vérifier la propriété GKS2*. Pour cela, appelons $\hat{d}_i$ et $\hat{s}_i$ les fonctions $\hat{x}_i \wedge 1$ et $\hat{x}_i \otimes 1$ sur $\hat{E} \times \hat{E}$. Il nous faut vérifier que, pour tous les choix d'entiers (m_i, n_i),

$$\sum_{\hat{E}\times\hat{E}} \{\hat{s}_\sigma^{m_\sigma} \hat{d}_\sigma^{n_\sigma} \prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} \hat{s}_i^{m_i} \hat{d}_i^{n_i}\}(a, a')\, \mu(a)\mu(a') \geq 0. \tag{3.1}$$

Appelons F la fonction $\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} \hat{s}_i^{m_i} \hat{d}_i^{n_i}$, et $\hat{F}$ la fonction $\hat{s}_\sigma^{m_\sigma} \hat{d}_\sigma^{n_\sigma} F$. D'après les remarques 3.3 à 3.7, nous pouvons supposer que la somme $\sum_{i\in\{1,\cdots,n,\sigma\}} n_i$ est paire et non nulle, et que $m_\sigma n_\sigma = 0$. Dans tous les cas, $\hat{F}(s, s) = 0$, et l'inégalité (3.1) s'écrit

$$(1-\nu)^2 \sum_{E\times E} [\hat{s}_\sigma^{m_\sigma} \hat{d}_\sigma^{n_\sigma}](a, a')F(a, a')\mu(a)\mu(a') +$$

$$2\nu(1-\nu) \sum_{E} [\hat{s}_\sigma^{m_\sigma} \hat{d}_\sigma^{n_\sigma}](a, s)F(a, s)\mu(a) \geq 0.$$

Nous allons voir que, si n_σ ou m_σ est nul, chacune de ces sommes est positive.

Commençons par le cas $m_\sigma = 0, n_\sigma \geq 0$. À une constante positive près, la première somme s'écrit,

$$1_{\{n_\sigma=0\}} \sum_{E\times E} s_i^{m_i} d_i^{n_i}(a, a')\mu(a)\mu(a'),$$

qui est positive par la propriété GKS2* du système Ξ. Pour la seconde somme, remarquons que $\hat{s}_i(a, s) = \hat{d}_i(a, s) = \hat{x}_i(a)$, et $d_i^{n_\sigma}(a, s) = (\alpha - \beta)^{n_\sigma}$. Cette dernière quantité est positive car $\alpha \geq 0$ et $\beta \leq 0$, et la somme se ramène (toujours à une constante positive près) à

$$\sum_E x_i^{n_i+m_i}(a)\mu(a),$$

qui est positive ou nulle par l'inégalité GKS1.

Le cas $n_\sigma = 0$ se traite de la même manière. Devant la somme sur $E \times E$ apparaît la valeur de $s_\sigma^{m_\sigma}$ sur $E \times E$, qui est $\alpha^{m_\sigma} \geq 0$, et on se ramène à l'inégalité GKS2* sur $E \times E$ pour le système Ξ; devant la somme sur E apparaît la valeur $s_\sigma^{m_\sigma}(a,s) = (\frac{\alpha+\beta}{2})^{m_\sigma}$, qui est positive. □

Remarque.—

3.15.– Lorsque nous avons un système GKS1 unitaire réel sur 3 points pour lequel l'un des facteurs Z ou T introduits à la fin du chapitre précédent est nul, nous sommes exactement dans le cas d'extension de 2 à 3 points que nous venons de décrire. Puisque tous les systèmes GKS1 unitaires sur deux points vérifient la propriété GKS2*, nous voyons qu'il en va de même des systèmes GKS1 unitaires réels sur trois points vérifiant $ZT = 0$.

Nous pouvons maintenant aborder les groupes diédraux D_n d'ordre impair. C'est un groupe réel (tous ses éléments sont conjugués à leur inverse), si bien que tous les caractères sont réels. Nous avons

Proposition 3.16.—*Pour n impair, les caractères des représentations irréductibles de D_n forment un système GKS2*.*

Preuve. Par définition, D_n est le groupe des isométries d'un polygone régulier à n côtés. Il est assez simple à décrire: si on représente le polygone dans le plan complexe par $\exp(2ik\pi/n)$, $k = 0, \cdots, n-1$, ce groupe est engendré par la rotation $r : z \to \exp(2i\pi/n)z$ et la symétrie $s : z \to \bar{z}$. Sachant que $r^n = 1$, que $s^2 = 1$ et que $sr = r^{-1}s$, on voit que ce groupe est formé des $2n$ éléments r^k et sr^k, $(0 \leq k \leq n-1)$. Lorsque n est impair, les classes pour la relation de congruence sont en nombre $\frac{n-1}{2} + 2$: ce sont

- Les classes à deux éléments $r_k = \{r^k, r^{-k}\}$, $1 \leq k \leq (n-1)/2$;
- La classe 1 de l'identité.
- La classe à n éléments $s = \{sr^k,\ k = 0, \cdots, n-1\}$.

Sa table de caractères est

$\hat{g}$	1	$r_k \ (1 \leq k \leq \frac{n-1}{2})$	s
$2n\mu(\hat{g})$	1	2	n
x_0	1	1	1
x_σ	1	1	-1
x_j $(1 \leq j \leq \frac{n-1}{2})$	2	$2cos(2\pi jk/n)$	0

On voit donc que nous sommes dans la situation du lemme, où l'espace E est l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par la relation $g \sim -g$. $\square$

Le même lemme 3.14. permet d'étendre le résultat de la proposition 3.16. au produit semidirect $\hat{G} = \mathbb{Z}_2 \propto G$, où G est un groupe commutatif de cardinal impair. Pour le définir, commençons par décrire l'action de $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ sur G par $\varphi(\varepsilon)g = g^\varepsilon$, pour $g \in G$ et $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2$. Le produit semidirect $\hat{G}$ est alors le produit ensembliste de $\mathbb{Z}_2$ par G, muni du produit $(\varepsilon, g)(\varepsilon', g') = (\varepsilon\varepsilon', gg'^\varepsilon)$. Comme nous allons le voir, ce groupe a tous ses éléments réels (i.e. conjugués à leur inverse), et donc tous ses caractères sont réels. En appelant $\hat{G}_s$ l'ensemble de ses classes, muni comme d'habitude de la mesure image, on peut alors étendre la proposition précédente à $\hat{G}_s$:

Proposition 3.17.—*Les caractères des représentations irréductibles de $\hat{G}$ forment un système GKS2* sur $\hat{G}_s$.*

Preuve. Posons $|G| = 2p + 1$ pour fixer les idées. Commençons par décrire $\hat{G}$ et ses classes : en appelant s l'élément $(-1, 1)$, on voit que tout élément s'écrit g ou sg, avec g dans G. (G se plonge naturellement dans $\hat{G}$ par $g \to (1, g)$). Comme dans D_n, on a $s^2 = 1$ et $sg = g^{-1}s$. Ces deux propriétés permettent de décrire les classes de congruence : la classe de $g \in G$ se réduit à (g, g^{-1}) ; il y a ainsi une seule classe de cette forme à 1 élément, et p à deux éléments. En effet, le cardinal de G étant impair, le seul élément g égal à son inverse est l'élément neutre. La classe de sg est l'ensemble des éléments de la forme sgh^2 ou $sg^{-1}h^2$, pour $h \in G$. Mais, le cardinal de G étant impair, l'application $g \to g^2$ est une bijection de G, et donc tous les éléments de la forme sg sont dans la même classe, qui est de cardinal $2p + 1$. En appelant G_s le quotient de G par $g \sim g^{-1}$, on voit que $\hat{G}_s$ s'identifie à $G_s \cup \{s\}$. De plus, en appelant ν la mesure de $\{s\}$ dans l'ensemble quotient, on voit que $\nu = 1/2$.

Pour appliquer le lemme, il nous faut identifier les représentations irréductibles. Il y en a $p + 2$ (autant que de classes). Nous allons voir qu'il y en a exactement 2 de dimension 1. En effet, le nombre de représentations irréductibles de dimension 1 non équivalentes est toujours égal au cardinal du groupe quotient $\hat{G}/\hat{G}_0$, où $\hat{G}_0$ est le groupe engendré par les commutateurs $ghg^{-1}h^{-1}$. Ici, il est facile de voir que $\hat{G}_0$ est le groupe engendré par les carrés d'éléments de G, c'est-à-dire G lui même comme nous venons de le voir. Le quotient est $\mathbb{Z}_2$, et donc il y a deux représentations de dimension 1.

En considérant l'équation aux dimensions $\sum_\rho n_\rho^2 = |\hat{G}|$, où n_ρ désigne la dimension des représentations irréductibles et où la somme porte sur toutes les représentations irréductibles non équivalentes, on voit que toutes les autres représentations sont de dimension 2.

Commençons par les deux représentations de dimension 1 : il y a comme toujours la représentation triviale, à caractère constant, et l'autre, que nous appelons x_σ. Comme G est un sous groupe de $\hat{G}$, la restriction à G d'une représentation est une représentation de G. Comme $\hat{G}$ est réel, cette représentation (identique au caractère puisque nous sommes en dimension 1) n'a que des valeurs réelles : or, il n'y a qu'une seule représentation réelle sur G : c'est la représentation triviale (cela provient du fait que sur G, le seul point réel soit l'élément neutre). On voit donc que x_σ est constant sur G.

Aucun caractère de $\hat{G}$ ne peut s'annuler sur G_s tout entier : en effet, étant orthogonal aux constantes, il devrait s'annuler sur $\{s\}$, ce qui est absurde. Remarquons aussi que nous disposons déjà de deux caractères constants sur G, et qu'il n'y en a pas d'autre, à cause des relations d'orthogonalité : si ce n'était pas le cas, nous disposerions sur l'espace $L^2(\hat{G}_s)$ muni de la tribu engendrée par $\{G_s\}$ et $\{s\}$, qui est un espace à deux points, de trois fonctions orthogonales et non nulles : c'est impossible.

Passons aux représentations de dimension 2 : comme plus haut, G étant un sous groupe de $\hat{G}$, la restriction d'une représentation irréductible se décompose en somme de représentations irréductibles sur G ; comme les caractères sont réels, on voit que, pour les p représentations irréductibles de $\hat{G}$ de dimension 2, le caractère correspondant ne peut prendre sur G que deux formes : soit $g \to 2 = 1 + 1$, soit $g \to 2\cos_\theta(g)$, où $\cos_\theta$ est la partie réelle d'une représentation irréductible sur G. Le premier cas est exclu par la remarque faite plus haut, et il nous reste que le second cas. Appelons C_θ ce caractère sur $\hat{G}$. Comme C_θ est orthogonal aux constantes sur $\hat{G}_s$, et que sa restriction l'est sur G_s, on voit que $C_\theta(s) = 0$. Il nous reste à remarquer que les C_θ étant tous distincts, on retrouve exactement sur G_s toutes les parties réelles des caractères de G (qui sont en nombre p).

Ce que nous venons de décrire sur les caractères de $\hat{G}$ montre que nous sommes à nouveau dans la situation du lemme, et donc que le système ainsi décrit sur $\hat{G}_s$ satisfait l'inégalité GKS2*. $\square$

Avant de passer à la démonstration de la propriété GKS2* pour les groupes diédraux d'ordre pair, nous allons donner une généralisation du lemme 3.14, qui va prendre une forme plus compliquée. Pour celà, étant donné un système GKS1 unitaire réel
$\{x_i, i = 0, \cdots, n\}$ sur $\{E, \mu\}$, et une partie A de $\{1, \cdots, n\}$, nous appelerons monôme de base A toute fonction sur $E \times E$ de la forme

$$\prod_{i \in A} (x_i \wedge 1)^{n_i} (x_i \odot 1)^{m_i}$$

avec, pour tout i, $m_i n_i = 0$, et la somme $\sum_i n_i$ paire et non nulle.

Lemme 3.18.—*Soit $(E, \mu, \Xi = \{x_i, i \in 0 \cup A\})$ un ensemble probabilisé fini muni d'un système GKS1 unitaire réel. On suppose que $E = E_1 \cup E_2$ et $A = A_1 \cup A_2$, avec*

$E_1 \bigcap E_2 = A_1 \bigcap A_2 = \emptyset$. On considère sur E_1 la probabilité μ_1 définie par $\mu_1(a) = \mu(a)/\mu(A_1)$, et on considère sur (E_1, μ_1) un système GKS2 Ξ_1. On suppose que :*

(i) Pour tout $i \in A_2$ et tout $a \in E_2$, $x_i(a) = 0$.
(ii) Toutes les restrictions des fonctions de Ξ à E_1 sont GKS1 pour Ξ_1.
(iii) Pour tout monôme $F(a,a')$ de Ξ de base A_1, la fonction $\int_{E_2} F(a,a')\,\mu(da')$ est GKS1 pour (E_1, μ_1, Ξ_1).
(iv) Les monômes de base A_1 ont une intégrale positive sur $E \times E$.

Alors, Ξ est un système GKS2.*

Les conditions du lemme pourront paraître moins obscures si l'on écrit le tableau des valeurs des fonctions de Ξ

	E_1	E_2
A_1	Ξ_1 et GKS2*	GKS2*
A_2	Ξ_1	0

Preuve. Considérons un monôme $F(a,a')$ de base A. C'est le produit d'un monôme F_1 de base A_1 et d'un monôme F_2 de base A_2. Le cas où F_2 est constant se traite aisément par la propriété (iii).

Il reste le cas où F_2 est non constant : puisque les fonctions x_i sont nulles sur E_2 pour $i \in A_2$, F_2 est nul sur $E_2 \times E_2$; sur $E_1 \times E_2$, $F_2(a,a') = G_2(a)$, où G_2 est un produit de fonctions x_i, avec $i \in A_2$. $G_2(a)$ est donc une fonction $GKS1$ pour le système Ξ_1. On écrit

$$\int_{E\times E} F(a,a')\,\mu(da)\mu(da') =$$
$$\int_{E_1\times E_1} F(a,a')\,\mu(da)\mu(da') + 2\int_{E_1\times E_2} G_2(a)F_1(a,a')\mu(da)\mu(da') =$$
$$\int_{E_1\times E_1} F(a,a')\,\mu(da)\mu(da') + \int_{E_1} G_2(a)\{\int_{E_2} F_1(a,a')\,\mu(da')\}\mu(da).$$

La première intégrale est positive car F est sur E_1 un monôme construit à partir de fonctions GKS1 pour le système GKS2* Ξ_1 (remarque 3.8.) ; pour la seconde, on intègre sur E_1 le produit de deux fonctions $GKS1$ pour Ξ_1, grâce à la remarque qui précède et à la propriété (iii). L'intégrale est donc également positive. $\square$

Remarques.—

3.19.– On voit d'après la démonstration qu'il suffit d'avoir la propriété (iv) pour les monômes qui ne s'annulent pas sur $E_2 \times E_2$.

3.20.– La condition (iii) sera automatiquement vérifiée dès qu'on aura la situation suivante : en désignant par E_3 l'ensemble quotient de E par la relation d'équivalence

$$a \sim b \Leftrightarrow \forall i \in A_1, x_i(a) = x_i(b)$$

et par μ_3 la mesure image de μ par la projection π de E sur E_3, il existe sur E_3 un système GKS2* Ξ_3 pour lequel les fonctions $\hat{x}_i$ obtenues par projection de x_i,($i \in A_1$) sont GKS1. En effet, si $F_1(a, a')$ est un produit de sommes et de différences de fonctions de $x_i(a)$ et $x_i(a')$ pour $i \in A_1$, cette fonction s'écrit $\hat{F}_1(\pi(a), \pi(a'))$, où $\hat{F}_1$ est le monôme correspondant construit avec les fonctions $\hat{x}_i$. On a

$$\int_{E\times E} F_1(a, a')\,\mu(da)\mu(da') = \int_{E_3\times E_3} \hat{F}_1(y, y')\,\mu_3(dy)\mu_3(dy').$$

Or, les fonctions $\hat{x}_i$ sont combinaisons linéaires à coefficients positifs des fonctions de Ξ_3, et $\hat{F}$ est donc elle même une combinaison linéaire à coefficients positifs de monômes de Ξ_3. Son intégrale est donc positive par la propriété GKS2* de Ξ_3. $\square$

Nous passons maintenant à l'étude des groupes diédraux D_n d'ordre pair : nous avons

Proposition 3.21.—*Pour n pair, les caractères des représentations irréductibles de D_n forment un système réel vérifiant la propriété GKS2*.*

Preuve. Comme dans le cas impair, D_n est l'union de $\mathbb{Z}_n$ et de $s\mathbb{Z}_n$. On peut aussi le voir comme le groupe engendré par les éléments s et r avec $r^n = s^2 = 1$, $sr = r^{-1}s$. Il a $2n$ éléments. Décrivons d'abord ses classes : en posant $n = 2m$, ses classes sont

- Les deux classes $1 = \{1\}$ et $m = \{r^m\}$ à 1 élément.
- Les $m-1$ classes $r_k = \{r^k, r^{-l}\}$, $k = 1, \cdots, m-1$.
- Les deux classes à m éléments $s = \{sr^{2k}\}$ et $sr = \{sr^{2k+1}\}$, $k = 0, \cdots, m-1$.

Il a 4 caractères de dimension 1, que nous notons $x_0 = 1$, x_1, x_2 et x_3, et $m-1$ caractères de dimension 2, que nous notons y_i, $i = 1, \cdots, m-1$. En remarquant que les classes 1, m et r_k sont en fait des classes de $\mathbb{Z}_n$, on voit que la restriction à $\mathbb{Z}_n$ des 4 caractères de dimension 1 sont en fait les 2 caractères réels de $\mathbb{Z}_n$, chacun d'eux répété 2 fois, et que la restriction des autres sont 2 fois les parties réelles des caractères non réels de $\mathbb{Z}_n$, répétés une fois chacun. On peut trouver la table de caractère de D_{2m} dans [JL, p. 183] par exemple. C'est

$\hat{g}$	1	m	r_k $(1 \leq k \leq m-1)$	s	s_r
$2n\mu(\hat{g})$	1	1	2	m	m
x_0	1	1	1	1	1
x_1	1	1	1	-1	-1
x_2	1	$(-1)^m$	$(-1)^r$	1	-1
x_3	1	$(-1)^m$	$(-1)^r$	-1	1
y_j $(1 \leq j \leq m-1)$	2	$2(-1)^j$	$2\cos(2i\pi rj/n)$	0	0

Nous sommes alors dans la situation du lemme 3.18. L'ensemble E des classes de D_n se décompose en deux parties
$E_1 = \{1, m, r_1, \cdots, r_{m-1}\}$ et $E_2 = \{s, sr\}$. E_1 s'identifie au quotient de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par la relation $g \sim g^{-1}$. Nous venons de voir que les restrictions des caractères à E_1 sont des parties réelles de caractères de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, qui forment donc le système Ξ_1.

La classe A_1 est formée des caractères $\{x_1, x_2, x_3\}$ et A_2 des caractères $\{y_j\}$

Pour la propriété (iii), nous appliquons la remarque 3.20. Les 4 premiers caractères ne prennent que les deux valeurs 1 et -1, et le quotient E_3 s'identifie à un ensemble à 4 points de même masse (ce n'est pas la même identification selon que m est pair ou impair). Les 4 premiers caractères ont après passage au quotient la table de valeurs suivante:

$\mu(\hat{g})$	1/4	1/4	1/4	1/4
x_0	1	1	1	1
x_1	1	1	-1	-1
x_2	1	-1	1	-1
x_3	1	-1	-1	1

On reconnaît la table de caractères de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Ce n'est pas étonnant, car $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ s'identifie au quotient $G/[G,G]$, où $[G,G]$ est le groupe engendré par les commutateurs. (C'est une propriété générale de la table des caractères de dimension 1.)

Il ne nous reste plus pour appliquer le lemme qu'à démontrer que la propriété (iii) est vérifiée. Appelons comme d'habitude s_i et d_i les fonctions $x_i \odot 1$ et $x_i \wedge 1$, pour i =1, 2, 3. On remarque que s_1 et d_1 sont constantes sur $E_1 \times E_2$ et valent 0 ou 1. On peut donc se ramener à étudier sur $E_1 \times E_2$ des monômes en s_2, d_2, s_3, d_3. Or, toujours sur $E_1 \times E_2$, on a $s_2 d_2 = s_3 d_3 = (\pm 1 - 1)(\pm 1 + 1) = 0$, et $s_2 = d_3$, $s_3 = d_2$. On peut donc toujours se restreindre pour la propriété (iii) aux monômes

s_2^p ou s_3^p, auquel cas nous avons

$$\int_{E_2} s_2^p(a,b)\,\mu(db) = (1/4)\{(x_2(a)+1)^p + (x_2(a)-1)^p\}.$$

En développant le deuxième membre de l'égalité précédente, on obtient un polynôme en x_2 à coefficients positifs: c'est donc une fonction $GKS1$ sur E_1.

Le même résultat a lieu pour s_3 car x_2 et x_3 ont même restriction à E_2. Ceci achève la démonstration. □

Enfin, pour compléter cette étude, nous considérons les différents groupes d'isométries des polyèdres réguliers de l'espace. Ceux-ci sont

- Tétraèdre: groupe S_4 ;
- Octaèdre et cube: groupe $S_4 \times \mathbb{Z}_2$;
- Isocaèdre et dodécaèdre: groupe $A_5 \times \mathbb{Z}_2$.

Grâce à la propriété de tensorisation, nous voyons que pour vérifier la propriété GKS2* pour le système des parties réelles des caractères sur chacun de ces groupes, il suffit de le faire sur les deux groupes S_4 et A_5. Nous en donnons ci-dessous les tables de caractères:

Table du groupe S_4.

Rappelons que, sur S_n, les classes de conjugaison sont données par la décomposition en cycles. Sur S_4, il y en a donc 5: 1 , (12), (123),(12)(34), (1234). Tous les points sont réels (conjugués à leurs inverses), donc les caractères sont réels. Il y a 5 caractères, que nous notons χ_i, $i = 0, \cdots, 4$. On trouve sa table de caractères dans [JL, p.180]:

$\hat{g}$	1	(12)(34)	(123)	(12)	(1234)
$24\mu(\hat{g})$	1	3	8	6	6
χ_0	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	-1	-1
χ_2	2	2	-1	0	0
χ_3	3	-1	0	1	-1
χ_4	3	-1	0	-1	1

Table du groupe A_5.

Les classes de conjugaison du groupe A_5 sont également au nombre de 5, et sont aussi réelles: on prendra comme représentants des classes les points 1, (123), (12)(34), (12345), (13452). Les caractères sont une fois de plus réels, et on les note χ_i, $i = 0, \cdots, 4$. On trouve la table dans [JL, p.220] :

$\hat{g}$	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(13452)
$60\mu(\hat{g})$	1	20	15	12	12
χ_0	1	1	1	1	1
χ_1	4	1	0	-1	-1
χ_2	5	-1	1	0	0
χ_3	3	0	-1	α	β
χ_4	3	0	-1	β	α

(Dans cette table $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$, $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$.)

Commençons par étudier le groupe $S4$. Nous avons

Proposition 3.22.—*Les caractères des représentations irréductibles de S_4 forment un système réel vérifiant la propriété GKS2*.*

Preuve. Nous décomposons les classes de S_4 en $E_1 = \{1, (123), (12)(34)\}$ et $E_2 = \{(12), (1234)\}$. De même, nous décomposons les caractères en $A_1 = \{\chi_1, \chi_3, \chi_4\}$ et $A_2 = \{\chi_2\}$. Sur E_1, les valeurs des caractères n'engendrent que 3 fonctions distinctes, dont les valeurs sont données par la table

$\hat{g}$	1	(12)(34)	(123)
$12\mu_1(\hat{g})$	1	3	8
χ_0	1	1	1
χ_2	2	2	-1
χ_3	3	-1	0

Il s'agit de la table des caractères du quotient de A_4 par la relation $g \sim g^{-1}$ (χ_2 n'y est pas normalisée, mais c'est sans importance). Nous allons voir plus bas qu'elle vérifie la propriété GKS2*.

Admettons pour l'instant cette propriété. Pour appliquer le lemme 3.18., commençons par vérifier la propriété (iii) pour les monômes de base $\{1, 3, 4\}$. Nous appelons comme d'habitude s_i et d_i les fonctions $x_i \odot 1$ et $x_i \wedge 1$. Nous remarquons tout d'abord que, sur $E_1 \times E_2$, nous avons $s_1 = 0$, $d_1 = 1$, $s_3 = d_4$, $d_3 = s_4$, si bien qu'on se ramène à vérifier la propriété (iii) pour les seuls monômes $s_3^p s_4^q$. D'autre part, les restrictions de χ_3 et χ_4 à E_1 sont égales. Au bout du compte, on a

$$a_{pq} := \int_{E_2} s_3^p s_4^q(a,b)\,\mu(db) = \frac{1}{4}\{(\chi_3 - 1)^p(\chi_3+1)^q + (\chi_3+1)^p(\chi_3-1)^q\}.$$

On peut supposer que $p \leq q$, et, en posant $r = q - p$, on obtient

$$a_{pq} = (\chi_3^2 - 1)^p\{(\chi_3+1)^r + (\chi_3-1)^r\}.$$

Le terme entre accolades est un polynôme à coefficients positifs en χ_3, et donc une fonction $GKS1$ sur E_1. D'autre part, $\int_{E_1} \chi_3^2(a)\,\mu_1(da) = 1$, et donc, toujours sur E_1,
$\chi_3^2 = 1 + A\chi_3 + B\chi_2$, où A et B sont des constantes positives. Donc, $\chi_3^2 - 1$ est GKS1 sur E_1, et il en va de même de $(\chi_3^2 - 1)^p$.

Il nous reste à démontrer la propriété (iv). En suivant la remarque 1 qui suit le lemme 3.18, il suffit d'établir l'inégalité GKS2* pour les monômes de base $\{1,3,4\}$ qui ne s'annulent pas sur $E_2 \times E_2$. Or, sur $E_2 \times E_2$, on a $s_3 = s_4 = d_1 = 0$, $d_3 = -d_4$, $s_1 = -1$. On voit qu'on se ramène à étudier les seuls monômes $s_1^n d_3^p d_4^q$, avec $p+q$ pair et non nul. On les divise en deux sous-cas :

1- $n > 0$: dans ce cas, s_1 étant nulle sur $E_1 \times E_2$, et égale à 1 sur $E_1 \times E_1$, d_3 et d_4 étant égales sur $E_1 \times E_1$, on est ramené à démontrer que, pour tout $k \geq 1$ et tout p,

$$\int_{E_1\times E_1} d_3^{2k} + (-1)^p \int_{E_2 \times E_2} d_3^{2k} \geq 0.$$

On le vérifie aisément à la main. (Remarquer que le résultat est nul pour $k = p = 1$).

2- $n = 0$: on se ramène au cas p et q impairs, et on fait le calcul à la main : une fois de plus, le résultat est nul pour $p = q = 1$, mais ce n'est pas surprenant. $\square$

Il nous reste à établir la

Proposition 3.23.—*Sur le quotient de A_4 par la relation $g \sim g^{-1}$ et la relation de conjugaison, les parties réelles des caractères des représentations irréductibles forment un système GKS2*.*

Preuve. La table de caractères a été donnée plus haut. Nous appliquons le lemme 3.13. La restriction à $E_1 = \{1, (12)(34)\}$ de la table de caractères nous donne la table de valeurs

x	1	(12)(34)
$4\mu_1(x)$	1	3
$\hat\chi_0$	1	1
$\hat\chi_3$	3	-1

Il s'agit d'un système GKS1 sur deux points (car $\int \hat\chi_3^3\,d\mu_1 > 0$). C'est donc un système GKS2* par la proposition 3.12. Il reste à remarquer que la table à étudier est construite à partir de la précédente par la méthode décrite dans le lemme 3.12. (On aurait pu tout aussi bien appliquer le lemme 3.18 et la remarque 3.20.) $\square$

Il nous reste à étudier le groupe A_5. C'est comme plus haut un groupe réel à 5 classes, mais, contrairement à S_4, A_5 est un groupe simple, ce qui en rend l'étude beaucoup plus compliquée. Nous n'allons pas décrire en détail comment prouver la propriété GKS2*, car celà serait très fastidieux, mais seulement donner les grandes lignes de la preuve. Il faut faire l'étude à la main, c'est-à-dire étudier séparément toutes les intégrales des expressions $\prod_i s_i^{m_i} d_i^{n_i}$. En utilisant la symétrie entre χ_3 et χ_4, et les remarques habituelles pour restreindre le nombre de cas à étudier ($n_i m_i = 0$, $\sum n_i$ pair et non nul), on se ramène à 11 types de formules différentes. En utilisant les encadrements $-1 < \beta < 0$ et $1 < \alpha < 2$, on peut voir pour chacune de ces expressions que, dès que l'un des exposants n_i ou m_i est assez grand (supérieur ou égal à 4, en fait), les intégrales considérées sont positives. Il reste un nombre fini de cas à étudier (de l'ordre de 2^{10}), et l'on confie ce travail à un programme de calcul formel. Il faut remarquer qu'un bon nombre d'expressions de degré trois ont une intégrale nulle, ce qui n'est pas évident à priori, et que la positivité de toutes ces expressions n'est vraie que pour les valeurs explicites de α et β données dans la table.

Conclusion.

Il est possible que la propriété GKS2* soit vraie pour tous les groupes, et même pour tous les systèmes GKS1 unitaires et réels. Une voie pour établir celà serait de trouver sur $E \times E$ une base GKS1 pour laquelle les fonctions s_i et d_i seraient GKS1. Un candidat naturel serait la base des $x_i \odot x_j$ $(i \leq j)$ et $x_i \wedge x_j$ $(i < j)$, pour un ordre raisonnable sur les x_i. Sur un groupe, un tel ordre peut être donné, au moins partiellement, en rangeant les $x_i(e)$ par ordre croissant ou décroissant. Il est aisé de se rendre compte que celà ne donne pas une base GKS1.

—Références

[BM] Bakry (D.), Michel (D.), — Sur les inégalités FKG, *Séminaire de Probablités XXVI*, Lecture Notes in Math. 1526, 1992, Springer, p.178-180.

[D] Diaconis (P.) — **Group Representations in Probability and Statistics** , Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1988.

[FKG] Fortuin, (C.), Kastelyn, (P.), Ginibre, (J.)— Correlation inequalities on some partially ordered sets, Comm. Math. Phys., vol. 22, 1971, p.89-103.

[Gi] Ginibre (J.), — General formulation of Griffiths' inequality, Comm. Math. Physics, vol. 16, 1970, p.310-328.

[Gr] Griffiths (R.B.), — Correlation in Ising ferromagnets I, II, J. Math. Physics, vol. 8, 1967, p.478-489.

[*I*] ISAACS (I.M.)— **Character Theory of Finite Groups** , Dover Publications, New-York, 1976.

[*JL*] JAMES (G.), LIEBECK (M.), — **Representations and Characters of Groups** , Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, 1993.

[*KS*] KELLY (D.G.), SHERMAN (S.) — General GRIFFITHS's inequality on correlation in ISING ferromagnets, J. Math. Physics, vol. 9, 1968, p.466-484.

[*L*] LAROCHE (E.), — Inégalités de corrélations sur $\{-1,1\}^n$ et dans $\mathbb{R}^n$, Ann. I.H.P., vol.29, n° 4, 1993, p.531-567.