MIREILLE ECHERBAULT

Sur le modèle d'Heisenberg

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 30 (1996), p. 162-177
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1996__30__162_0>

Sur Le Modèle D'Heisenberg

Mireille Echerbault

Laboratoire de Statistique et Probabilités, Université Paul Sabatier,
31062 Toulouse cedex

A la mémoire d'Etienne Laroche.

1 Introduction

Sur un système de spins à valeurs dans M (variété compacte) sur le réseau $\mathbb{Z}^\nu$, la donnée d'un potentiel d'interaction permet de définir d'une part un ensemble de mesures de Gibbs, d'autre part une classe de semi-groupes markoviens $(P_t)_{t\geq 0}$ et leurs générateurs L sur les fonctions continues de $M^{\mathbb{Z}^\nu}$ dans $\mathbb{R}$.
μ étant une mesure de Gibbs, on peut aussi considérer ces semi-groupes comme des opérateurs contractants de $L^2(\mu)$; leurs générateurs se prolongeant en des opérateurs auto-adjoints sur $L^2(\mu)$.

Carlen et Stroock ont montré que dans le cas d'une variété riemanienne compacte, on obtient une inégalité de Sobolev logarithmique pour des interactions assez petites. De plus, l'existence d'une telle inégalité permet de montrer l'unicité de la mesure de Gibbs ([L], reprenant les travaux de [SZ], vient de montrer qu'en fait il suffit de contrôler les trous spectraux).

Le but de ce papier est d'expliciter ces résultats dans le cadre du modèle d'Heisenberg pour obtenir ainsi une borne inférieure explicite des températures pour lesquelles il y a hypercontractivité, donc en particulier unicité de la mesure de Gibbs.

Dans une première partie, nous introduirons les notations et rappellerons les principaux résultats cités ci-dessus. Ensuite, nous passerons au cas du modèle d'Heisenberg et au calcul explicite de la température critique.

2 Définitions et notations générales

Nous commençons par décrire un système de spins: il est défini par la donnée d'une fibre (espace où les spins prennent leurs valeurs) et d'un ensemble de sites S (ensemble des points où se situent les spins; ici $S = \mathbb{Z}^\nu$).

système de spins

- la fibre:

  M est une variété riemanienne de classe $\mathcal{C}^\infty$, compacte, connexe, de dimension d. Nous notons g_{kl} le tenseur métrique, ∇ la connexion de Lévi-Civita associée, Δ l'opérateur de Laplace Beltrami ($\Delta f = g^{kl}\nabla_k\nabla_l f$). Ric est l'opérateur de Ricci de cette structure et λ une mesure de probabilité sur M. En un point x de M , T_x désigne l'espace tangent au dessus de x et $T(M)$ la variété tangente.

- les configurations:

  $\mathbb{M} = M^{\mathbb{Z}^\nu}$ est l'ensemble des configurations d'un système de spins sur le réseau $\mathbb{Z}^\nu$ à valeurs dans M. $x := (x^i, i \in \mathbb{Z}^\nu)$ est une configuration.
  $\mathbb{M}$ est muni de la topologie produit et de sa tribu borélienne notée $\mathcal{B}_{\mathbb{M}}$.
  L'ensemble des parties finies de $\mathbb{Z}^\nu$ est noté $\mathcal{F}$.

  Pour Λdans $\mathcal{F}$, nous notons $\mathcal{B}_\Lambda = \sigma(x_k, k \in \Lambda)$ la sous-tribu des évènements qui

  ne dépendent que des spins dans Λ et Π_Λ la projection $\begin{array}{lll} \mathbb{M} & \to & M^\Lambda \\ x & \mapsto & x^\Lambda = (x^i)_{i \in \Lambda}. \end{array}$

  Remarque: On considèrera souvent les ensembles $\Lambda = \{k\}$ pour $k \in \mathbb{Z}^\nu$et Π_k sera la projection de $\mathbb{M}$ sur la variété M se trouvant au site k. Cette kième composante de $\mathbb{M}$ sera toujours notée M^k.

- Notons maintenant $\mathcal{D}_\Lambda$ l'ensemble des fonctions ne dépendant que des coordonnées dans $\Lambda \in \mathcal{F}$ c'est-à-dire $\mathcal{D}_\Lambda = \{f \circ \Pi_\Lambda, f \in \mathcal{C}^\infty(M^\Lambda)\}$.

  Nous notons $\mathcal{D} = \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{F}} \mathcal{D}_\Lambda$.

- Appelons d_k la différentielle dans la coordonnée du site k
  et notons $\|d_k f\| = \sup_{x \in \mathbb{M}} |d_k f|(x)$ pour $f \in \mathcal{D}, |d_k f|$ étant la longueur de la forme calculée dans la métrique de M^k (c'est-à-dire de M).

Potentiel et mesures de Gibbs.

- Un potentiel sur $\mathbb{M}$ est une famille $\mathcal{J} = \{J_\Lambda, \Lambda \in \mathcal{F}\}$ de fonctions telles que $\forall \Lambda \in \mathcal{F}, J_\Lambda \in \mathcal{D}_\Lambda$.

  On s'intéresse dans la suite aux potentiels qui vérifient les deux propriétés suivantes:

  1. $\mathcal{J}$ est de rang fini R i.e. $J_\Lambda = 0$ pour tout Λ tel que
  $$\max\{\|k - \ell\| \,; k, \ell \in \Lambda\} \geq R.$$
  2. $\mathcal{J}$ est un potentiel d'interaction sommable i.e.
  $$\forall k \in \mathbb{Z}^\nu, \sum_{\Lambda \ni k} \|d_k J_\Lambda\| \leq \infty.$$

  Remarque: les J_Λ ne sont définis qu'à une constante additive près et donc l'hypothèse précédente permet de choisir J_Λ tel que
  $$\forall k, \sum_{\Lambda \ni k} J_\Lambda < \infty.$$

  Exemple: Dans le modèle d'Heisenberg, $J_\Lambda(x^i, i \in \Lambda)$ représente l'énergie d'interaction produite par les spins x^i aux sites i de Λ. Nous nous restreindrons dans la suite à l'étude des potentiels d'interaction de paires, c'est-à-dire aux potentiels qui ne prennent en compte que l'énergie produite par des couples de spins: $J_\Lambda = 0$ si $|\Lambda| > 2$.

- Le potentiel $\mathcal{J}$ permet de définir un hamitonien sur $\mathbb{M}$ par la donnée d'une famille d'applications $(H_k)_{k\in\mathbb{Z}^\nu}$ de $\mathbb{M}$ dans $\mathbb{R}$: $H_k = \sum\limits_{\Lambda\ni k} J_\Lambda$. Or, les problèmes qui nous intéressent en mécanique statistique concernent l'étude de la sensibilité de différentes grandeurs macroscopiques aux conditions extérieures.
  Pour cela, Λ étant fixé dans $\mathcal{F}$, il est nécessaire d'introduire des hamiltoniens sur M^Λ lorsque la valeur des spins est fixée à l'extérieur de Λ ; celà se fait de la façon suivante :
  Pour $\Lambda \in \mathcal{F}, x \in \mathbb{M}, y \in \mathbb{M}$, on définit une nouvelle configuration

$$x_\Lambda y \in \mathbb{M} \text{ par } \begin{aligned}(x_\Lambda y)^k &= x^k \text{ si } k \in \Lambda \\ &= y^k \text{ si } k \in \Lambda^c.\end{aligned}$$

  Un hamiltonien sur $\mathbb{M}$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} H_\Lambda^y \ : \ & \mathbb{M} \to \mathbb{R} \qquad \textit{avec} \ \ H_\Lambda(x|y) = \sum_{A\cap\Lambda\neq\emptyset} J_A \circ (x_\Lambda y) \\ & x \mapsto H_\Lambda(x|y) \end{aligned} \tag{1}$$

  (y fixée joue le rôle de la configuration extérieure à Λ).

  Remarque: Selon le contexte, on considèrera H_Λ^y défini sur $\mathbb{M}$ ou sur M^Λ.

- Nous pouvons maintenant introduire une famille de mesures de probabilités $(\mu_\Lambda(.|y))_{\substack{\Lambda\in\mathcal{F}\\ y\in\mathbb{M}}}$ sur les configurations de M^Λ avec y fixée à l'extérieur de Λ :

$$\mu_\Lambda^\beta(dx|y) = \frac{1}{Z_\Lambda} \exp \beta H_\Lambda(x|y) d\lambda_\Lambda(x) \tag{2}$$

  où β représente l'inverse de la température
  λ_Λ est la mesure produit (induite par la mesure uniforme λ) sur M^Λ
  et Z_Λ la constante de normalisation.

  Dans le formalisme introduit par Gibbs [G], μ_Λ représente la mesure d'équilibre du système de spins dans Λ, à température $T = \frac{1}{\beta}$, la configuration étant fixée égale à y à l'extérieur de Λ. $\mu_\Lambda(.|y)$ est appelée mesure de Gibbs en volume fini Λ avec condition extérieure y.
  Dans la suite, nous prendrons $\beta = 1$ quitte à faire rentrer cette constante dans la définition de J_Λ. Définissont une mesure sur $\mathbb{M}$ tout entier en posant $\pi_\Lambda^y = \mu_\Lambda(.|y) \otimes \delta_{y_{\Lambda^c}}$ où $\delta_{y_{\Lambda^c}}$ est une mesure sur Λ^c désignant la masse de Dirac en y.

- Formalisme DLR :

  On dit que la mesure de probabilité μ sur $\mathbb{M}$ est une mesure de Gibbs, et on note $\mu \in \mathcal{G}$, si $\forall\Lambda \in \mathcal{F}, \pi_\Lambda^y$ est une version de la loi conditionnelle de μ sachant $\mathcal{B}_{\Lambda^c}$.

  Notons que $\mathcal{G}$ est non vide, convexe et compact ; $\mathcal{G}$ est donc l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux (d'après le théorème de Choquet).

  En fait, le problème qui nous intéresse est de savoir s'il y a une seule mesure de Gibbs. Plus généralement, à l'étude des transitions de phase correspond l'étude du changement de la structure de $\mathcal{G}$ lorsque les différents paramètres intervenant

dans la définition de J_Λ varient. Nous verrons en particulier qu'en dessous d'une certaine température $T_c(= 1/\beta_c)$ il n' y a qu'une mesure d'équilibre.
Avant d'introduire les processus de diffusions markoviens associés au potentiel $\mathcal{J}$, nous allons définir un peu plus précisément le gradient et la hessienne associés à la variété produit $\mathbb{M}$.

- Gradient au site k:
  Soient $k \in \mathbb{Z}^\nu, x \in \mathbb{M}, y \in \mathbb{M}$ et $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$. Si l'application $f \circ (x_{\{k\}}y) : M^k \to \mathbb{R}$ est différentiable en x^k , nous notons $\nabla_{(k)}f(x)$ son gradient en x^k.

- Hessienne:
  Soient $f \in \mathcal{D}, k \neq l \in \mathbb{Z}^\nu, x \in \mathbb{M}, y \in \mathbb{M}$ et posons
  $f^y_{\{k,l\}} := f \circ (x_{\{k,l\}}y) : M^{\{k,l\}} \to \mathbb{R}$.
  Nous notons $\left[\nabla_{(k)}\nabla_{(l)}f(x)\right]$ le bloc (k,l) de la hessienne de $f^y_{\{k,l\}}$ en (x^k, x^l): c'est une forme bilinéaire sur $T_{x^k} \times T_{x^l}$.
  De même $[\nabla_{(k)}\nabla_{(k)}f(x)]$ est le bloc (k,k): c'est une forme quadratique sur T_{x^k}.
  $[[\nabla\nabla f(x)]]_{(k,l)}$ représente dans la suite la forme quadratique $\left([\nabla_{(i)}\nabla_{(j)}f(x)]\right)_{\left(\substack{i \in \{k,l\} \\ j \in \{k,l\}}\right)}$ qui agit sur $(T_{x^k} \times T_{x^l}, T_{x^k} \times T_{x^l})$.

Diffusions sur les systèmes de spins. Dynamique de Glauber.

Etant donnés un potentiel J et son hamiltonien associé H^y_Λ, $\Lambda \in \mathcal{F}$ et $y \in \mathbb{M}$ fixés, on définit l'opérateur différentiel L^y_Λ sur $\mathcal{D}_\Lambda$ par:

$$\mathrm{L}^y_\Lambda f = \sum_{k \in \Lambda} (\Delta_{(k)}f + \nabla_{(k)}H^y_\Lambda . \nabla_{(k)}f).$$

Par construction, l'ensemble des mesures réversibles de $(L^y_\Lambda)_{\Lambda\in\mathcal{F}}$ est l'ensemble $(\mu_\Lambda(dx|y))_{\Lambda\in\mathcal{F}}$ défini précédement.
Sur Λ et à y fixée, on peut également construire le semi-groupe de Markov $P^y_{t,\Lambda}$ de mesure réversible $\mu_\Lambda(dx|y)$. C'est le semi-groupe de générateur L^y_Λ sur $\mathcal{D}_\Lambda$ et on l'appelle dynamique de Glauber en volume fini Λ avec condition extérieure y.

Inégalité de Sobolev logarithmique et trou spectral.

Définition 1 *: On dit que $\mu_\Lambda(.|y)$ vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique de constante $\alpha_\Lambda(y)$ si, $\forall f \in \mathcal{D}_\Lambda$, $\alpha_\Lambda(y) > 0$ optimise l'inégalité suivante:*
$(Slog(\alpha_\Lambda, y)$:

$$\int f^2 \log f^2 d\mu_\Lambda(.|y) - \|f\|^2_{L^2(\mu_\Lambda(.|y))} \log \|f\|^2_{L^2(\mu_\Lambda(.|y))} \leq \frac{1}{\alpha_\Lambda(y)} \int -fL^y_\Lambda f d\mu_\Lambda(.|y)$$

-lien avec les mesures de Gibbs:

Théorème 1 *[SZ]*
Si $\inf_{(\Lambda\in\mathcal{F}, y\in E)} \alpha_\Lambda(y) > 0$ (i.e. il y a contrôle de la constante de Sobolev logarithmique)
Alors la mesure de Gibbs est unique.

Remarques:

1. influence de la structure riemannienne:
   seul le choix de la mesure riemannienne intervient dans tout ce qui précède. En effet, elle seule apparait dans le formalisme DLR. Quand à l'hypothèse d'interaction sommable faite sur le potentiel (qui fait intervenir la métrique), elle n'est que technique et invariante par choix de la structure riemannienne (tant que la variété est compacte).

2. La construction de l'opérateur différentiel et du semi-groupe de Markov, ainsi que la définition des inégalités de Sobolev logarithmiques auraient pu être conçues sur $\mathbb{Z}^\nu$ plutôt que sur Λ mais cela aurait été inutile dans la suite.

Définition 2 : *On dit que $\mu_\Lambda(.|y)$ vérifie une inégalité de trou spectral de constante $\lambda_\Lambda(y)$ si, $\forall f \in \mathcal{D}_\Lambda, \lambda_\Lambda(y) > 0$ optimise l'inégalité*

$$(TS(\lambda_\Lambda, y)) \quad : \|f - \int f d\mu_\Lambda(.|y)\|^2_{L^2(\mu_\Lambda(\cdot|y))} \leq \frac{1}{\lambda_\Lambda(y)} \int -f L^y_\Lambda f d\mu_\Lambda(.|y).$$

Remarques:

1. Cette inégalité est équivalente à l'inégalité suivante:
   $\forall t \geq 0,\ \forall f \in \mathcal{D}_\Lambda$,
   $$\|P^y_{t,\Lambda} f - \int f d\mu_\Lambda(.|y)\|^2_{L^2(\mu_\Lambda(\cdot|y))} \leq e^{-\lambda_\Lambda(y)t} \|f - \int f d\mu_\Lambda(.|y)\|^2_{L^2(\mu_\Lambda(\cdot|y))}$$

2. Ici encore, on aurait pu définir l'inégalité du trou spectral sur $\mathbb{Z}^\nu$ tout entier à partir de P_t et de L construit sur $\mathcal{D}$.

- lien avec les inégalités de Sobolev logarithmiques et les mesures de Gibbs:

  - Pour toute mesure de probabilité, on peut montrer ([B_1]) que $Slog(\alpha_\Lambda) \Rightarrow TS(2\alpha_\Lambda)$.
  - Les articles [SZ] (dans le cas d'interaction de rang fini) et [L] nous montrent qu'en fait il suffit de contrôler le trou spectral
    (i.e. $\inf_{(\Lambda \in \mathcal{F}, y \in E)} \lambda_\Lambda(y) > 0$) pour obtenir l'unicité de la mesure de Gibbs.

Ayant en vue l'utilisation du critère Γ_2, il ne sera pas plus facile, dans notre cas, de contrôler le trou spectral que de contrôler la constante de Sobolev logarithmique.

- Critère Γ_2

Carlen et Stroock [CS] puis Holley et Stroock [HS] ont montré que dans le cas d'un produit infini de variétés compactes, le critère Γ_2 permet, avec des hypothèses supplémentaires, d'obtenir une inégalité de Sobolev logarithmique pour la mesure de Gibbs sur l'espace produit.
Donnons tout d'abord l'énoncé de ce critère:

Théorème 2 *[BE] Soit (M, g) une variété riemanienne de classe C^∞, compacte de dimension d. λ une mesure de probabilité sur M.*

Notons $\nabla\nabla\phi$ la hessienne d'une fonction ϕ de M, C^∞ et Ric le tenseur de Ricci de (M,g).
Si, en tant que forme quadratique, $Ric - \nabla\nabla\phi \geq ag$ avec $a > 0$, alors la mesure $m(dx) = \dfrac{exp\phi(x)}{\int exp\phi(x)\lambda(dx)}\lambda(dx)$ vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique de constante $a/4$ (et donc $TS(a/2)$) pour toute fonction de $L^2(m)$.

Citons également le théorème de Holley-Stroock :

Théorème 3 *[HS] Soit (M,g) une variété riemannienne compacte et Ric le tenseur de Ricci associé. Supposons que $Ric \geq bg$ (en tant que forme quadratique) avec $0 < b < \infty$. Considérons $\mathbb{M} = M^{\mathbb{Z}^\nu}$, J un potentiel d'interaction, H_Λ^y et μ_Λ associés à J et définis par les expressions (1) et (2). Supposons de plus qu'il existe $\gamma : \mathbb{Z}^\nu \to [0,\infty)$ et $\varepsilon \in]O,1[$ tels que*

1. $\sum_{k\in\mathbb{Z}^\nu} \gamma(k) \leq (1-\varepsilon)b$
2. $\sum_{A\supseteq\{i,j\}} |\,[[\nabla\nabla J_A]]_{(i,j)}(t,t)| \leq \gamma(i-j)\|t^i\|\;\|t^j\|$ *pour tout* $(i,j) \in \mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu$ *et* $t = (t^i,t^j) \in T(M^{\{i,j\}})$.

Alors $\mathcal{G}$ contient un unique élément μ.

Remarques:

1. Si on définit le générateur L par extension sur $\mathbb{Z}^\nu$ alors ce théorème nous dit aussi que cette unique mesure μ vérifie l'inégalité suivante:

$$\int f^2 \log f^2 d\mu - \|f\|^2_{L^2(\mu)} \log \|f\|^2_{L^2(\mu)} \leq \frac{4}{\varepsilon b}\int -fLfd\mu.$$

Et en particulier $\|f - \int fd\mu\|^2_{L^2(\mu)} \leq \dfrac{2}{\varepsilon b}\int -fLfd\mu.$

2. Dans la suite nous nous intéressons uniquement aux potentiels d'intéraction de paires c'est-à-dire aux $J_A = J_{\{k,l\}}$. Par conséquent, $\nabla\nabla J_A$ peut être considérée comme une forme quadratique sur $T(M^{\{k,l\}}) \times T(M^{\{k,l\}})$ (Tous les blocs (i,j) pour (i,j) $\notin \{k,l\}^2$ de cette matrice sont nuls).

3 Le modèle d'Heisenberg généralisé.

Notations:

On se place sur $\mathbb{Z}^\nu$. Chaque noeud du réseau $\mathbb{Z}^\nu$ est occupé par un spin qui prend ses valeurs sur la sphère unité de dimension $d(>0)$ notée S^d.

$\mathbb{M} := (S^d)^{\mathbb{Z}^\nu}$. Les sphères sont plongées de façon canonique dans $\mathbb{R}^{d+1}$ et nous notons $x = (x^i, x^i \in S^d \subset \mathbb{R}^{d+1})_{i\in\mathbb{Z}^\nu}$ une configuration sur $\mathbb{Z}^\nu$.

Le potentiel qui représente la force d'intéraction entre sphères est dans la suite supposé borné, de rang fini R.

On prend, pour tout couple (i,j) de $(\mathbb{Z}^\nu)^2$ tel que $\|i-j\| < R$,
" $J_{\{i,j\}}(x) = J_{ij}F(x^i.x^j)$ " où $J_{ij} \in [O,M]$ avec $O < M < \infty$, "."représente le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^{d+1}$ (il représentera indifférement tous les produits scalaires canoniques dans $\mathbb{R}, \mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{R}^{d+1}$)
et $F \in \mathcal{C} =\{f : [-1,1] \to [-1,1]$, croissante , $\mathcal{C}^2(]$-1,1$[)$ et telle que f(1)=1, f(-1)=-1 $\}$.
Remarque: Si $F = Id$, on retrouve le modèle d'Heisenberg "classique".

Nous supposerons de plus que J est invariant par translation c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{Z}^\nu, J_{i+k,j+k} = J_{ij}$ et que $\forall (i,j) \in (\mathbb{Z}^\nu)^2$ tel que $\|i-j\| = \ell < R$, $J_{ij} = Cte := \beta J_\ell$ où β représente l'inverse de la température.

Nous posons $J_0 = \sum_{l=1}^{R-1} J_l$.

Avec un tel potentiel, l'énergie d'une configuration x sur Λ connaissant la configuration y sur le complémentaire de Λ est définie, au signe près, par la fonction

$$\begin{aligned} H_\Lambda(x|y) &= \sum_{(i,j)\cap\Lambda\neq\emptyset} J_{\{i,j\}} \circ (x_\Lambda y) \\ &= \sum_{(i,j)\in A_\Lambda} J_{ij}F(x^i.x^j) + \sum_{(i,j)\in A^c_\Lambda} J_{ij}F(x^i.y^j) := H^F_\Lambda(x|y). \end{aligned}$$

où $A_\Lambda = \{(i,j) \in \Lambda \times \Lambda$ tels que $i < j$ et $\|i-j\| < R\}$ et
$A^c_\Lambda = \{(i,j) \in \Lambda \times \Lambda^c$ tels que$\|i-j\| < R\}$.

La mesure qui servira de référence ici est la mesure du produit des sphères induite par la mesure de Lebesgue sur une sphère (i.e. la mesure d'équilibre du système à température infinie).
Notons ${}_{(i)}g$ la métrique associée à M^i (sphère au site i) et ${}_\Lambda g$ la métrique induite sur $M^\Lambda = (S^d)^\Lambda$.

Commentaires: Contrairement au modèle d'Ising (d=0, F=Id)), le modèle d'Heisenberg ne possède pas d'inégalités de corrélations de type FKG [FKG]. Ces inégalités qui s'appuient sur l'ordre de l'espace des configurations et font intervenir des fonctions monotones, permettent de montrer la convergence ou l'unicité des mesures de Gibbs. Elles n'ont pas d'équivalent sur le modèle d'Heisenberg, celui-ci étant non ordonné. Par conséquent, afin d'obtenir un critère d'unicité des mesures de Gibbs, nous utilisons des techniques plus sophistiquées ce qui justifie l'introduction de la structure riemannienne de la sphère.

Structure riemannienne et calculs en coordonnées

$\nabla_{(i)}$ représente la connexion de Levi-Civita de $(M^i,{}_{(i)}g)$ et $\nabla = (\nabla_{(i)})_{i\in\Lambda}$ la connexion de $(M^\Lambda,{}_\Lambda g)$.

L'opérateur de Laplace-Beltrami sur M^Λ est défini partir des laplaciens des sphères $(\Delta_{(i)} = trace_{(i)}g.\nabla_{(i)}\nabla_{(i)})$ et on a $\Delta_\Lambda = \sum_{i\in\Lambda} \Delta_{(i)}$.

L'opérateur de Ricci de la métrique sur une sphère (i) vérifiant la relation suivante: $Ric_{(i)} = (d-1)_{(i)}g$, notre problème est donc de trouver $\gamma : \mathbb{Z}^\nu \to [0,\infty)$ et $\varepsilon \in]0,1[$ avec $\sum_{i\in\mathbb{Z}^\nu} \gamma(i) \leq (1-\varepsilon)(d-1)$ tels que

$\forall \Lambda \in \mathcal{F}, \forall \{k,l\} \in (\mathbb{Z}^r)^2$ tel que $\{k,l\} \cap \Lambda \neq \emptyset, \forall t \in T(M^{\{k,l\}})$,

$$[[\nabla\nabla(J_{\{k,l\}} \circ (x_\Lambda y))]]_{(k,l)}(t,t) \leq \gamma(k-l)\|t^k\|\|t^l\|. \qquad (3)$$

La définition du potentiel $J_{\{k,l\}}$ nous permet d'écrire:

$$\begin{aligned}[[\nabla\nabla(J_{\{k,l\}} \circ (x_\Lambda y))]]_{(k,l)} &= \mathbb{I}_{(k,l)\in A_\Lambda} J_{kl}[[\nabla\nabla F(x^k.x^l)]]_{(k,l)} \\ &+ \mathbb{I}_{(k,l)\in A_\Lambda^c} J_{kl}[[\nabla\nabla F(x^k.y^l)]]_{(k,l)}\end{aligned}$$

Nous regarderons donc dans la suite la hessienne de F sur le produit de deux sphères.

Remarque:

Les propriétés des connexions agissant sur la composition de fonctions permettent de simplifier l'écriture de la hessienne de F de la manière suivante:

$$\begin{aligned}[\nabla_{(i)}\nabla_{(j)}F(x^k.x^l)] &= F''(x^k.x^l)[\nabla_{(i)}(x^k.x^l) \otimes \nabla_{(j)}(x^k.x^l)] \\ &+ F'(x^k.x^l)[\nabla_{(i)}\nabla_{(j)}(x^k.x^l)]\end{aligned}$$

Avant d'énoncer le lemme 1, donnons encore quelques notations: tout d'abord, nous identifions dans la suite le couple (x^k, x^l) de $M^k \times M^l$ pour $(k,l) \in A_\Lambda$, avec les points x^k et x^l de S^d (par exemple, S^d représente la sphère au site 0). Nous allons maintenant décrire une base de l'espace tangent $T_{x^k} \times T_{x^l}$.

Considérons sur S^d la géodésique passant par x^k et x^l et notons $e^{x_k x_l}$ le vecteur unitaire sur cette géodésique partant de x^k et pointé vers x^l. Soit F_{kl} le plan engendré par les vecteurs x^k et x^l de S^d(x^k et x^l étant considérés comme des vecteurs de $\mathbb{R}^{d+1}$).

$(x^k, e^{x_k x_l})$ forme une base de F_{kl}. De plus, $\mathbb{R}^{d+1}$ se décompose à l'aide de F_{kl} et de l'orthogonal de F_{kl} noté $F_{kl}^\perp$.

$\mathbb{R}^{d+1} = F_{kl} \oplus F_{kl}^\perp$. Notons que $F_{kl}^\perp$ est contenu dans l'intersection des espaces tangents T_{x^k} et T_{x^l}. On notera $e^\perp$ une base orthonormale de $F_{kl}^\perp$ ($e^\perp = (e_1^\perp, ..., e_{d-1}^\perp)$) . Avec ces notations, $(e^{x_k x_l}, e^\perp)$ et $(e^{x_l x_k}, e^\perp)$ représentent respectivement des bases orthonormales de T_{x^k} et de T_{x^l}.

Remarques:

1. L'ambiguité de la définition de $e^{x_k x_l}$ lorsque $x^k = x^l$ (pas de géodésique) ou lorsque $x^k = -x^l$ (plusieurs géodésiques) n'est pas gênante dans la suite car l'ensemble de tels couples est de mesure nulle dans M^Λ.

2. Lorsque $(k,l) \in A_\Lambda^c$, nous nous intéressons aux points x^k et y^l de S^d (avec y fixé) et nous introduisons les vecteurs unitaires $e^{x_k y_l}, (e_m^\perp)_{m=1}^{d-1}$ et les espaces $F_{kl}, F_{kl}^\perp$ de la même manière que précédement.

3. Lorsque $(k,l) \in A_\Lambda^c$, $\nabla\nabla F(x^k.y^l)$ sera considéré comme une forme quadratique opérant sur T_{x^k} puisque pour y fixé sur Λ^c , si i ou j est différent de k, la forme bilinéaire $[\nabla_{(i)}\nabla_{(j)}F(x^k.y^l)]$ est identiquement nulle.

Lemme 1 *1. Soient (k,l) fixé dans* A_Λ*,* $x \in I\!M$ *tel que* $x^k.x^l \neq \pm 1$ *et* $t = (t^k, t^l) \in T_{x^k} \times T_{x^l}$ *alors :*

$$[[\nabla(x^k.x^l) \otimes \nabla(x^k.x^l)]]_{(k,l)}((t^k,t^l),(t^k,t^l)) =$$

$$(1-(x^k.x^l)^2)(t^k.e^{x_k x_l} + t^l.e^{x_l x_k})^2$$

$$[[\nabla\nabla(x^k.x^l)]]_{(k,l)}((t^k,t^l),(t^k,t^l)) =$$

$$-x^k.x^l((t^k.e^{x_k x_l})^2 + (t^l.e^{x_l x_k})^2 + 2(t^k.e^{x_k x_l})(t^l.e^{x_l x_k}))$$

$$+\textstyle\sum_{m=1}^{d-1}(-x^k.x^l((t^k.e_m^\perp)^2 + (t^l.e_m^\perp)^2) + 2(t^k.e_m^\perp)(t^l.e_m^\perp))$$

2. Soient (k,l) fixé dans A_Λ^c*,* $x_\Lambda y \in I\!M$ *tel que* $x^k.y^l \neq \pm 1$ *et* $t^k \in T_{x^k}$ *alors:*

$$[\nabla_{(k)}(x^k.y^l) \otimes \nabla_{(k)}(x^k.y^l)](t^k,t^k) = (1-(x^k.y^l)^2)(t^k.e^{x_k y_l})^2$$

$$[\nabla_{(k)}\nabla_{(k)}(x^k.y^l)](t^k,t^k) = -x^k.y^l(t^k.e^{x_k y_l})^2 - x^k y^l \sum_{m=1}^{d-1}(t^k.e_m^\perp)^2$$

Démonstration:

Nous allons choisir un système de coordonnées qui ramène les calculs sur la boule unité de $\mathbb{R}^d$. La sphère M^0 étant plongée dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{d+1}$, appelons p la projection de M^0 sur le sous-espace E^d de dimension d orthogonal au vecteur unitaire $e_{d+1} = (0,...,0,1)(e_{d+1}$ sera considéré indifférement comme un vecteur de $\mathbb{R}^{d+1}$ ou comme un point de la boule), et passant par le centre de S^d. Toutes les sphères du réseau sont projettées sur E^d; nous notons $p(x^i) = \bar{x}^i \in E^d \subset \mathbb{R}^d$ et par abus de notation $p(x) = \bar{x} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^r}$.

Les coordonnées d'un point x^i de M^i s'écrivent dans $\mathbb{R}^{d+1}$ $x^i = (\bar{x}^i, \varepsilon_i\sqrt{(1-|\bar{x}^i|^2)}$ avec $\varepsilon_i = signe(x^i.e_{d+1})$ et $|\bar{x}^i|^2 = \sum_{l=1}^d (\bar{x}_l^i)^2$.

Dans ce système de coordonnées, la métrique ${}_{(i)}g$ s'écrit :

$$({}_{(i)}g)_{k,\ell=1}^d = (\delta_{k\ell} + \frac{\bar{x}_k^i \bar{x}_\ell^i}{1-|\bar{x}^i|^2})_{k,\ell=1}^d$$

La connexion $\nabla_{(i)}$ se représente comme suit :

sur les fonctions $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\nabla_{(i)}f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial \bar{x}_k^i}\right)_{k=1}^d$

sur les covecteurs $T = (T_\ell)_{\ell=1}^d$,

$$\nabla_{(i)}T = \left(\nabla_{(i),k}T_\ell\right)_{k,\ell} = \left(\frac{\partial T_\ell}{\partial \bar{x}_k^i} - \sum_{m=1}^d {}_{(i)}\Gamma_{k,\ell}^m T_m\right)_{k,\ell}$$

où $\left({}_{(i)}\Gamma_{k,\ell}^m\right)$ représentent les cœfficients de Kristoffel de la connexion $\nabla_{(i)}$:
ici, en coordonnées locales ${}_{(i)}\Gamma_{k\ell}^m = \bar{x}_m^i \; {}_{(i)}g_{k,\ell}$.
Si l'on pose ${}^{(i)}g = ({}_{(i)}g)^{-1} = (Id_d - \bar{x}^i \otimes \bar{x}^i)$, le laplacien, quant lui, s'exprime de la façon suivante :

$$\Delta_{(i)} f = \sum_{k,\ell=1}^{d} \left({}^{(i)}g\right)^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i_k}\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i_\ell} - \sum_{m=1}^{d} {}_{(i)}\Gamma^m_{k\ell}\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i_m}\right]$$

Nous pouvons maintenant, avec ces formules explicites, démontrer le lemme.

Dans le système choisi, le produit scalaire $x^k.x^l$ s'écrit $\bar{x}^k.\bar{x}^l + \varepsilon_k\sqrt{1-|\bar{x}^k|^2}\varepsilon_l\sqrt{1-|\bar{x}^l|^2}$ et par conséquent, en utilisant les formules de dérivations, on obtient:

$$\nabla_{(i)}(x^k.x^l) = \delta_{i=k}(\bar{x}^l - \frac{\bar{x}^k\varepsilon_l\sqrt{1-|\bar{x}^l|^2}}{\varepsilon_k\sqrt{1-|\bar{x}^k|^2}}) + \delta_{i=l}(\bar{x}^k - \frac{\bar{x}^l\varepsilon_k\sqrt{1-|\bar{x}^k|^2}}{\varepsilon_l\sqrt{1-|\bar{x}^l|^2}})$$

Soit $t = (t^i, t^j)$ un vecteur de l'espace tangent $T_{x^i} \times T_{x^j}$ (i.e. $t^i.x^i = 0, t^j.x^j = 0$). Notons $(\bar{t^i}, t^i_{d+1})$ les coordonnées de t^i dans $\mathbb{R}^{d+1}$ avec $\bar{t^i} \in \mathbb{R}^d (\bar{t^i} = p(t^i))$ et $t^i_{d+1} = t^i.e_{d+1}$.

Dans ce système de coordonnées, écrivons l'action de la forme bilinéaire $[\nabla_{(i)}(x^k.x^l) \otimes \nabla_{(j)}(x^k.x^l)]$ sur $T_{x^i} \times T_{x^j}$:

$$[\nabla_{(i)}(x^k.x^l) \otimes \nabla_{(j)}(x^k.x^l)](t^i, t^j) =$$

$$(\delta_{i=k}(\bar{x}^l.\bar{t}^k - \bar{x}^k.\bar{t}^k\tfrac{\varepsilon_l\sqrt{1-|\bar{x}^l|^2}}{\varepsilon_k\sqrt{1-|\bar{x}^k|^2}}) + \delta_{i=l}(\bar{x}^k.\bar{t}^l - \bar{x}^l.\bar{t}^l\tfrac{\varepsilon_k\sqrt{1-|\bar{x}^k|^2}}{\varepsilon_l\sqrt{1-|\bar{x}^l|^2}}))$$

$$\times(\delta_{j=k}(\bar{x}^l.\bar{t}^k - \bar{x}^k.\bar{t}^k\tfrac{\varepsilon_l\sqrt{1-|\bar{x}^l|^2}}{\varepsilon_k\sqrt{1-|\bar{x}^k|^2}}) + \delta_{j=l}(\bar{x}^k.\bar{t}^l - \bar{x}^l.\bar{t}^l\tfrac{\varepsilon_k\sqrt{1-|\bar{x}^k|^2}}{\varepsilon_l\sqrt{1-|\bar{x}^l|^2}}))$$

$$= (\delta_{i=k}x^l.t^k + \delta_{i=l}x^k.t^l)(\delta_{j=k}x^l.t^k + \delta_{j=l}x^k.t^l)$$

Décomposons t^k (respectivement t^l) dans la base de T_{x^k} (respectivement de T_{x^l}). On obtient ainsi, en remplaçant $e^{x_k x_l}$ (respectivement $e^{x_l x_k}$) par e^{x_k} (respectivement e^{x_l}) dans les formules pour alléger les notations,

$$(\delta_{i=k}x^l.t^k + \delta_{i=l}x^k.t^l) = \delta_{i=k}x^l.(e^{x_k}(t^k.e^{x_k}) + \textstyle\sum_{m=1}^{d-1} e^\perp_m(t^k.e^\perp_m))$$

$$+ \ \delta_{i=l}x^k.(e^{x_l}(t^l.e^{x_l}) + \textstyle\sum_{m=1}^{d-1} e^\perp_m(t^l.e^\perp_m))$$

Par construction, x^l et x^k sont orthogonaux aux vecteurs de base $e^\perp_m$ et de plus,

$$|x^l.e^{x_k}| = \sqrt{1-(x^k.x^l)^2} = |x^k.e^{x_l}|$$

On a donc:

$$[\nabla_{(i)}(x^k.x^l) \otimes \nabla_{(j)}(x^k.x^l)](t^i, t^j) =$$
$$(1-(x^k.x^l)^2)(\delta_{i=k}t^k.e^{x_k} + \delta_{i=l}t^l.e^{x_l}) \times (\delta_{j=k}t^k.e^{x_k} + \delta_{j=l}t^l.e^{x_l})$$

et on trouve le résultat de la première partie du lemme 1.

Remarque: Lorsque $(k,l) \in A^c_\Lambda$ et donc que y^l est fixé, on a immédiatement $\nabla_{(i)}(x^k.y^l) = 0$ si $i \neq k$, et il suffit de suivre le même raisonnement que précédement pour obtenir le résultat annoncé.

La seconde partie du lemme se montre à partir du calcul de $\nabla_{(i)}(x^k.x^l)$ en coordonnées et en utilisant la formule de l'action d'une connexion sur un covecteur.
On obtient:

$$\begin{aligned}\nabla_{(i)}(\nabla_{(j)}(x^k.x^l)) &= -x^k.x^l(\delta_{(i=j=k)(k)}g + \delta_{(i=j=l)(l)}g) \\ &+(\delta_{i=k}\delta_{j=l} + \delta_{i=l}\delta_{j=k})(Id + \frac{\bar{x}^i \otimes \bar{x}^j}{\varepsilon_i\sqrt{1-|\bar{x}^i|^2}\varepsilon_j\sqrt{1-|\bar{x}^j|^2}})\end{aligned}$$

Par conséquent, si $(t^i, t^j) \in T_{x^i} \times T_{x^j}$,

$$\begin{aligned}&[\nabla_{(i)}(\nabla_{(j)}(x^k.x^l))](t^i,t^j) = \\ &\quad -x^k.x^l(\delta_{(i=j=k)}\|t^k\|^2 + \delta_{(i=j=l)}\|t^l\|^2) + (\delta_{i=k}\delta_{j=l} + \delta_{i=l}\delta_{j=k})t^k.t^l\end{aligned}$$

Ecrivons t^k et t^l à l'aide des vecteurs e^{x_k}, e^{x_l} et $(e^{\perp}_m)_{i=1}^{d-1}$.
Cela nous donne:

$$[\nabla_{(i)}(\nabla_{(j)}(x^k.x^l)](t^i,t^j) =$$

$$-x^k.x^l[\delta_{i=j=k}((t^k.e^{x_k})^2 + \textstyle\sum_{m=1}^{d-1}(t^k.e^{\perp}_m)^2) + \delta_{i=j=l}((t^l.e^{x_l})^2 + \sum_{m=1}^{d-1}(t^l.e^{\perp}_m)^2))]$$

$$+(\delta_{i=k}\delta_{j=l} + \delta_{i=l}\delta_{j=k})((t^k.e^{x_k})(t^l.e^{x_l})e^{x_k}.e^{x_l} + \textstyle\sum_{m=1}^{d-1}(t^k.e^{\perp}_m)(t^l.e^{\perp}_m))$$

Or $e^{x_k}.e^{x_l} = -x^k.x^l$ (par construction) donc

$$[\nabla_{(i)}(\nabla_{(j)}(x^k.x^l)](t^i,t^j) =$$

$$-x^k.x^l[\delta_{i=j=k}(t^k.e^{x_k})^2 + \delta_{i=j=l}(t^l.e^{x_l})^2 + (\delta_{i=k}\delta_{j=l} + \delta_{i=l}\delta_{j=k})(t^k.e^{x_k})(t^l.e^{x_l})]$$

$$\begin{aligned}&+\textstyle\sum_{m=1}^{d-1}(-x^k.x^l(\delta_{i=j=k}(t^k.e^{\perp}_m)^2 + \delta_{i=j=l}(t^l.e^{\perp}_m)^2) \\ &\qquad +(\delta_{i=k}\delta_{j=l} + \delta_{i=l}\delta_{j=k})(t^k.e^{\perp}_m)(t^l.e^{\perp}_m))\end{aligned}$$

et on retrouve bien l'expression de la forme quadratique $[[\nabla\nabla(x^k x^l)]]_{(k,l)}$ annoncée dans le lemme 1.

Remarque:
Lorsque $(k,l) \in A^c_\Lambda$ et que y^l est fixé, $[\nabla_{(i)}\nabla_{(j)}(x^k.y^l)]$ est identiquement nul pour i ou j différent de k et l'expression ci-dessus nous donne le résultat pour i et j égaux à k.

Choix de la meilleure fonction F.

Nous allons dans ce paragraphe déterminer la fonction F intervenant dans la définition du potentiel qui donnera une majoration optimale (au sens du critère de Holley-Stroock) de la température critique T_c. Afin de majorer la forme quadratique $[[\nabla\nabla(J_{\{k,l\}}\circ(x_\Lambda y))]]_{(k,l)}$ et de rendre le majorant optimal, nous allons dans un premier temps chercher les 2d valeurs propres de $\nabla\nabla F(x^k.x^l)$ (et de $\nabla\nabla F(x^k.y^l)$)puis trouver la fonction F_0 qui rende minimale le supremum de ces valeurs propres.

Nous notons$(\lambda_i(F, x^k.x^l))_{i=1}^{2d}$ (respectivement $(\lambda_i(F, x^k.y^l))_{i=1}^{d}$ les valeurs propres de $[[\nabla\nabla F(x^k.x^l)]]_{(k,l)}$ (respectivement de $[[\nabla\nabla F(x^k.y^l)]]_{(k,l)}$).

Théorème 4 :

$$\inf_{F\in\mathcal{C}} \sup_{\tau\in]-1,1[} (\sup_{i=1}^{2d} \lambda_i(F,\tau)) = \frac{8}{\pi^2}$$

De plus, l'unique fonction qui minimise ce supremum est la fonction

$$F_0(\tau) = \frac{2}{\pi^2}(\arcsin \tau + \frac{\pi}{2})^2 - 1.$$

Démonstration :

- Pour chaque couple (k,l) de A_Λ^c, les valeurs propres de $[\nabla_{(k)}\nabla_{(k)}F(x^k.y^l)]$ sont:

$\lambda_1'(F, x^k.y^l) = (1-(x^k.y^l)^2)F''(x^k.y^l) - (x^k.y^l)F'(x^k.y^l)$
associé au vecteur propre $u' = e^{x_k y_l} \in T_{x^k}$

$\lambda_2'(F, x^k.y^l) = -(x^k.y^l)F'(x^k.y^l)$
associé aux (d-1) vecteurs propres $u_m' = e_m^\perp \in T_{x^k}$ $(m = 1, ..., d-1)$

- Pour chaque couple (k,l) de A_Λ, les valeurs propres de $[[\nabla\nabla F(x^k.x^l)]]$ sont:

$\lambda_1(F, x^k.x^l) = 2(1-(x^k.x^l)^2)F''(x^k.x^l) - 2(x^k.x^l)F'(x^k.x^l)$
associé au vecteur propre $u = (e^{x_k x_l}, e^{x_l x_k}) \in T_{x^k} \times T_{x^l}$

$\lambda_2(F, x^k.x^l) = (1 - x^k.x^l)F'(x^k.x^l)$
associé aux (d-1) vecteurs propres $u_m = (e_m^\perp, e_m^\perp) \in T_{x^k} \times T_{x^l}$ $(m = 1, ..., d-1)$

$\lambda_3(F, x^k.x^l) = 0$
associé au vecteur propre $v = (e^{x_k x_l}, -e^{x_l x_k}) \in T_{x^k} \times T_{x^l}$

$\lambda_4(F, x^k.x^l) = (-1 - x^k.x^l)F'(x^k.x^l)$
associé aux (d-1) vecteurs propres $v_m = (e_m^\perp, -e_m^\perp) \in T_{x^k} \times T_{x^l}$ $(m = 1, ..., d-1)$

Remarques:

1. Ces résultats se vérifient aisément à l'aide des expressions des formes quadratiques qui composent le lemme 1.

2. Afin de simplifier le problème de maximisation, remarquons que pour toute fonction de la classe $\mathcal{C}$ et pour tout couple de points (x^k, x^l), la valeur propre $\lambda_2(F, x^k.x^l)$ est positive tandis que $\lambda_4(F, x^k.x^l)$ est négative . Par conséquent, le supremum des valeurs propres sera le supremum de $\lambda_1(F, x^k.x^l)$ et $\lambda_2(F, x^k.x^l)$.

Montrons que $\inf\limits_{F\in\mathcal{C}} \sup\limits_{\tau\in]-1,1[} \lambda_1(F,\tau) \vee \lambda_2(F,\tau)$ est supérieur ou égal à $\frac{8}{\pi^2}$:

Soit $0 \leq \alpha < \infty$ tel que $\inf\limits_{F\in\mathcal{C}} \sup\limits_{\tau\in]-1,1[} \lambda_1(F,\tau) \vee \lambda_2(F,\tau) \leq \alpha$.

Cela implique que :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists F_\epsilon \in \mathcal{C} \text{ tel que } \sup_{\tau\in]-1,1[} \lambda_1(F_\epsilon,\tau) \vee \lambda_2(F_\epsilon,\tau) \leq \alpha + \epsilon.$$

Donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists F_\epsilon \in \mathcal{C} \text{ tel que } 2[(1-\tau^2)F_\epsilon''(\tau) - \tau F_\epsilon'(\tau)] \leq \alpha + \epsilon$$

et

$$(1-\tau)F_\epsilon'(\tau) \leq \alpha + \epsilon \ \forall \tau \in]-1, 1[\quad (P1)$$

Remarquons que les conditions $F_\epsilon \in \mathcal{C}^2(]-1,1[)$ et
$0 \leq (1-\tau)F'_\epsilon(\tau) \leq \alpha+\epsilon, \forall \tau \in]-1,1[$ impliquent que $\lim_{\tau \overset{>}{\to} -1} F'_\epsilon(\tau)$ existe et est borné.

Posons $\tau = \sin t$ avec $t \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et $g_\epsilon(t) = F_\epsilon(\sin t)$ et notons
$\mathcal{C}' = \{ \ f \ : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1], f(\frac{\pi}{2}) = 1, f(-\frac{\pi}{2}) = -1,$
croissante $, \mathcal{C}^2(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$, et $\lim_{t \overset{>}{\to} -\frac{\pi}{2}} f'(t) = 0\}$

Les premières hypothèses de $\mathcal{C}'$ sont trivialement vérifiées par g_ϵ et de plus $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $g'_\epsilon(t) = \cos(t)F'_\epsilon(\sin(t))$ donc d'après la remarque précédente, $\lim_{t \overset{>}{\to} -\frac{\pi}{2}} g'_\epsilon(t) = 0$.

Avec ce changement de variable, on obtient :

$$(P1) \ \Rightarrow \ \forall \epsilon > 0, \exists g_\epsilon \in \mathcal{C}' \text{ tel que } 2g''_\epsilon(t) \leq \alpha+\epsilon. \quad (P2)$$

$$(P2) \ \Rightarrow \ \forall \epsilon > 0, \exists g_\epsilon \in \mathcal{C}' \text{ tel que } \forall t \in]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[$$

$$\textstyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{t} g''_\epsilon(x)dx = g'_\epsilon(t) - \lim_{t \overset{>}{\to} -\frac{\pi}{2}} g'_\epsilon(t) \leq \frac{(\alpha+\epsilon)}{2}(t+\frac{\pi}{2}) \ (P3)$$

$$(P3) \ \Rightarrow \ \forall \epsilon > 0, \exists g_\epsilon \in \mathcal{C}' \text{ tel que } g_\epsilon(t) - g_\epsilon(-\tfrac{\pi}{2}) \leq \tfrac{(\alpha+\epsilon)}{4}(t+\tfrac{\pi}{2})^2$$

Pour $t = \dfrac{\pi}{2}$ et pour tout $\epsilon > 0$, on obtient la majoration suivante:
$\dfrac{8}{\pi^2} \leq (\alpha+\epsilon)$ et à la limite quant ϵ tend vers 0, on a: $\alpha \geq \dfrac{8}{\pi^2}$.
Finalement, on a montré que si $\inf_{F \in \mathcal{C}} \sup_{\tau \in]-1,1[} \lambda_1(F,\tau) \vee \lambda_2(F,\tau) \leq \alpha$ alors $\alpha \geq \dfrac{8}{\pi^2}$ c'est-à-dire que $\inf_{F \in \mathcal{C}} \sup_{\tau \in]-1,1[} \lambda_1(F,\tau) \vee \lambda_2(F,\tau)$ est minoré par $\dfrac{8}{\pi^2}$.

Montrons que la fonction F_0 qui réalise cet infimum est la fonction
$F_0(x) = \dfrac{2}{\pi}(\arcsin x + \dfrac{\pi}{2})^2 - 1$:

la fonction $f_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{4}\arcsin^2 x + \dfrac{2}{\pi}\arcsin x - \dfrac{\alpha\pi^2}{16}$ est solution de l'équation différentielle $\lambda_1(f_\alpha, x) = \alpha$ pour tout x dans]-1,1[, et satisfait les conditions $f_\alpha(1) = 1, f_\alpha(-1) = -1$.

De plus, la condition $f'_\alpha(x) \geq 0$ impose à α d'être inférieur à $\dfrac{8}{\pi^2}$.
Or cette fonction f_α vérifie l'inéquation différentielle $\lambda_2(f_\alpha, x) \leq \alpha$ si et seulement si α est égal à $\dfrac{8}{\pi^2}$.

La fonction $F_0 = f_{\frac{8}{\pi^2}}$ est telle que $F_0 \in \mathcal{C}$ et $\lambda_1(F_0,x) \vee \lambda_2(F_0,x) \leq \dfrac{8}{\pi^2}$ pour x dans]-1,1[. Cette fonction réalise donc l'infimum sur toute les fonctions de $\mathcal{C}$ du supremum sur $]-1,1[$ des valeurs propres de la hessienne de $F(x^k.x^l)$.

Ainsi, pour cette fonctionF_0, $[[\nabla\nabla F_0(x^k.x^l)]]_{(k,l)} \leq \dfrac{8}{\pi^2}{}^{\{k,l\}}g$

(en tant que forme quadratique sur $T(M^{\{k,l\}}) \times T(M^{\{k,l\}})$.

Remarque: Pour chaque couple de A_n^c, nous pouvons suivre le même procédé et la même fonction F_0 nous donne la majoration suivante:

$$[[\nabla\nabla F_0(x^k.y^l)]]_{(k,k)} \leq \frac{8}{\pi^2}{}^{\{k\}}g.$$

Majoration de la température critique et de la constante de Sobolev logarithmique

Corollaire 1 *: Dans le cadre défini précédement, la condition* $\beta = \dfrac{1}{T} \leq \dfrac{\pi^2(d-1)}{16\nu J_0}$ *entraine l'unicité de la mesure de Gibbs.*
De plus, cette mesure vérifie une inégalité de Sobolev Logarithmique avec constante $\alpha' = \dfrac{(d-1)}{4} - \dfrac{4\beta\nu J_0}{\pi^2}$

Démonstration:

il suffit d'utiliser les résultats précédents, en particulier,
$\forall t \in T(M^{\{k,l\}})$,

$$[[\nabla\nabla(J_{\{k,l\}} \circ x_\Lambda y)]]_{(k,l)}(t,t)$$

$$= J_{kl}[\mathbb{1}_{(k,l)\in A_\Lambda}[[\nabla\nabla F_0(x^k.x^l)]]_{(k,l)}(t,t) + \mathbb{1}_{(k,l)\in A_\Lambda^c}[[\nabla_k\nabla_k F_0(x^k.y^l)]](t^k,t^k)]$$

$$\leq J_{kl}(\mathbb{1}_{(k,l)\in A_\Lambda}\ \frac{8}{\pi^2}\ (\|t^k\|^2 + \|t^l\|^2) + \mathbb{1}_{(k,l)\in A_\Lambda^c}\ \frac{8}{\pi^2}\ (\|t^k\|^2))$$

$$\leq \frac{8}{\pi^2}\ \mathbb{1}_{k\in\Lambda}\ (J_{kl}\mathbb{1}_{(l\in\Lambda, 0<\|k-l\|<R)}\ \|t^k\|^2 + J_{kl}\ \mathbb{1}_{(l\in\Lambda^c, \|k-l\|<R)}\ \|t^k\|^2)$$

$$\leq \frac{8}{\pi^2}\ \mathbb{1}_{k\in\Lambda}\ \mathbb{1}_{(l\in\mathbb{Z}^\nu, 0<\|k-l\|<R)}\ J_{kl}\ \|t^k\|^2$$

Or $J_{kl} = \beta J_r$ si $\|k-l\| = r$ avec $r \in \{1,\ldots,R-1\}$.
Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{k\in\Lambda}\ \mathbb{1}_{(l\in\mathbb{Z}^\nu, 0<\|k-l\|<R)}\ J_{kl}\ \|t^k\|^2 &= \mathbb{1}_{k\in\Lambda}(\textstyle\sum_{r=1}^{R-1}\mathbb{1}_{(l\in\mathbb{Z}^\nu, \|k-l\|=r)}\beta J_r)\|t^k\|^2 \\
&= \mathbb{1}_{k\in\Lambda}(\textstyle\sum_{r=1}^{R-1} 2\nu\beta J_r)\|t^k\|^2 \\
&= \mathbb{1}_{k\in\Lambda} 2\nu\beta J_0\|t^k\|^2
\end{aligned}$$

Finalement, si l'on pose $\gamma(i-j) = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi^2}(2\nu\beta J_0) & \text{si } \|i-j\| = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

on obtient $\sum_{i \in \mathbb{Z}^r} \gamma(i) = \gamma(0) = \frac{16}{\pi^2}\beta\nu J_0$

et $\sum_{i \in \mathbb{Z}^r} \gamma(i)$ est inférieur à $(1-\epsilon)(d-1)$ si $\epsilon \leq 1 - \frac{16\beta\nu J_0}{\pi^2 d - 1}$.

La condition $0 < \epsilon < 1$ est vérifiée si $\beta \leq \frac{\pi^2(d-1)}{16\nu J_0}$.

Donc pour $\beta < \beta_c^{F_0} = \frac{\pi^2(d-1)}{16\nu J_0}$, les conditions du théorème de Holley-Stroock sont vérifiées. Il y a donc unicité de la mesure de Gibbs et de plus cette mesure vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique de constante

$$\alpha = \frac{\epsilon_{max}(d-1)}{4} = \frac{(d-1)\pi^2 - 16\nu\beta J_0}{4\pi^2}$$

Commentaires:

La même démarche pour le modèle d'Heisenberg classique (F=Id) nous donnerait une constante α=1 et donc une approximation de la température moins performante ($\beta_c^{Id} = \frac{(d-1)}{2\nu J_0}$). De plus , des arguments similaires ont permis de montrer $[B_2]$ que dans le modèle d'Ising (d=0, F=Id), si $\beta \leq \beta_c$ avec $th\beta_c = \frac{1}{2\nu}$, il y a unicité de la mesure de Gibbs.

Remerciements:

L'auteur tient à remercier le professeur D. Bakry pour lui avoir fourni, lors de discussions, les idées qui ont abouti à cet article ainsi que pour ses nombreux conseils.

4 Références

[B1]: Bakry, D. (1992), "Hypercontractivité" , Cours de l'Ecole d'Eté de Probabilités, St-Flour,L.N.M. 1581, 1-112.

[B2]: Bakry, D. (1992), En préparation.

[BE]: Bakry, D., Emery, M., "Diffusions hypercontractives", Séminaire de Probabilités XIX, L.N.M. 1123, 179-206.

[CS]: Carlen, E.A., Stroock, D.W., (1985), "An application of the Bakry-Emery-criterion to infinite dimentional diffusions ", Séminaire de Probabilités XX, Azema J. and Yor M.(eds.) L.N.M. 1204, 341-348.

[FKG]: Fortuin, C.,Kastelyn, P., Ginibre, J., "Correlation inequalities on some partialy ordered sets", CMP 22, 99-103.

[G]: Gibbs, J.W., (1960), "Elementary Principles of Statistical Mechanics", Dover, New York. (Republication of 1902 work published by Yale univ. Press.).

[HS]: Holley, R., Stroock, D.W. (1987), "Logarithmic Sobolev inequalities and stochastic Ising Models ". J. Stat. Phys. 46, 1159-1194.

[L]: Laroche, E., (1995), "Hypercontractivité pour des systèmes de spins de portée infinie ", P.T.R.F. 101, 89-132.

[SZ]: Stroock, D.W., Zegarlinski, B., (1992), "The Equivalence of the Logarithmic Sobolev inequality and the Dobrushin-Shlosman Mixing Condition ". Commun. Math. Phys. 144, 303-323.