TAHIR CHOULLI
CHRISTOPHE STRICKER

Deux applications de la décomposition de Galtchouk-Kunita-Watanabe

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 30 (1996), p. 12-23
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1996__30__12_0>

Deux applications de la décomposition de Galtchouk-Kunita-Watanabe

Tahir Choulli et Christophe Stricker

Équipe de Mathématiques, URA CNRS 741
Université de Franche-Comté Route de Gray,
25030 Besançon cedex FRANCE

À P.A. Meyer, en témoignage d'amitié et de reconnaissance

Résumé. Dans ce travail nous donnons deux applications de la décomposition de Galtchouk-Kunita-Watanabe. La première application concerne l'étude des conditions de structure et la deuxième permet d'établir l'existence et la continuité de la décomposition de Föllmer-Schweizer généralisée.

0. INTRODUCTION.

Un marché financier viable ne doit pas présenter d'opportunités d'arbitrage. On sait que l'absence d'opportunités d'arbitrage est intimement liée à l'existence d'une loi de martingale pour le processus des prix actualisés (voir par exemple Stricker (1990) et Delbaen/Schachermayer (1994)). Lorsque le marché est complet, on sait évaluer le prix d'un actif contingent : c'est tout simplement l'espérance de cet actif sous la probabilité de risque neutre. En revanche si le marché n'est pas complet, il existe plusieurs lois de martingale, si bien que la méthode précédente ne s'applique plus. L'une des méthodes pour attaquer ce problème est la décomposition de Föllmer-Schweizer qui permet d'approcher une v.a. dans $\mathcal{L}^2$ par une intégrale stochastique. L'existence de la décomposition de Föllmer-Schweizer est étroitement liée aux conditions de structure. Nous dirons qu'une semimartingale X à valeurs dans $\mathbb{R}$ (pour simplifier) vérifie les conditions de structure si elle peut s'écrire : $X = M + \lambda \cdot \langle M \rangle$ avec $(\lambda^2 \cdot \langle M \rangle)_T < \infty$. Dans cette note nous allons d'abord fournir une démonstration très rapide d'un résultat de Schweizer (1994) qui caractérise d'une part toutes les densités de lois de martingale et qui précise d'autre part la décomposition canonique du processus des prix actualisés. L'outil essentiel est la décomposition de Galtchouk-Kunita-Watanabe qui nous permettra aussi de caractériser les semimartingales vérifiant les conditions de structure quand il existe une densité de martingale. Lorsque la semimartingale X est continue, nous montrons également que les conditions de structure restent invariantes par changement de loi équivalente et nous retrouvons ainsi un résultat de Delbaen/Shirakawa (1995) : dans le cas continu les conditions de structure restent invariantes par changement de numéraire. Enfin nous achevons cette première partie

par l'étude des relations entre $\mathcal{K}_1 := \{(H \cdot X)_T : H \cdot X \geq -1\}$ est borné dans L^0 et les conditions de structure.
La deuxième partie du travail est consacrée à l'étude de la décomposition de Föllmer-Schweizer généralisée. Comme son nom l'indique, cette décomposition a été introduite par Föllmer/Schweizer (1991) et généralisée par Ansel/Stricker (1992). Quand le processus des prix actualisés est une martingale locale, la décomposition de Föllmer-Schweizer est tout simplement la décomposition de Galtchouk-Kunita-Watanabe. Rappelons que la décomposition de Galtchouk-Kunita-Watanabe a été obtenue dans des situations plus générales que le cas $\mathcal{L}^2$ par Ansel/Stricker (1994a). Dans un travail récent Schweizer (1994) a étendu le théorème 10 d'Ansel/Stricker (1992) au cas $d > 1$. La décomposition de Galtchouk-Kunita-Watanabe va nous permettre de simplifier un peu la démonstration de Schweizer (1994) et surtout de montrer que la décomposition de Föllmer-Schweizer généralisée est continue pour la convergence uniforme en probabilité.
Nous remercions vivement F. Delbaen pour des discussions très fructueuses sur les conditions de structure ainsi que l'Institut Isaac Newton de Cambridge où une partie importante de ce travail a été effectuée lors d'un séjour du deuxième auteur.

1. NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES.

Soient $T \in \mathbb{R}^{*+}$ et $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T})$ un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions habituelles. Nous notons :
$Y_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} |Y_s|$, le processus Y étant càdlàg.
$\mathcal{S}^2_{loc}(P)$: l'ensemble des semimartingales Y telles que Y^* est localement de carré intégrable.
$\mathcal{M}_{loc}(P)$ (resp. $\mathcal{M}^2_{loc}(P)$) : l'espace des martingales locales (resp. localement de carré intégrable).
$\mathcal{M}(P)$: l'ensemble des martingales uniformément intégrables.
Soit Q une loi de probabilité sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T})$ et $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(Q))$. Nous désignons par $\mathcal{L}^2_{loc}(M, Q)$ l'ensemble des processus prévisibles ξ, à valeur dans $\mathbb{R}^d$, tels que le processus croissant $\int_0^t \xi'_s d\langle M \rangle_s \xi_s$ est localement intégrable, ξ'_s étant le vecteur transposé de ξ_s.
Si $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une semimartingale à valeur dans $\mathbb{R}^d$, un processus prévisible ξ d-dimensionnel est dit X-intégrable si la suite des processus $(1_{\{|\xi| \leq n\}} \xi \cdot X)_{n \geq 1}$ converge pour la topologie des semimartingales (voir Chou/Meyer/Stricker (1980))
Pour toute semimartingale réelle U, nous désignons par $\mathcal{E}(U)$ la semimartingale solution de l'équation différentielle suivante:

$$dY = Y_- dU, \; Y_0 = 1.$$

Pour plus de détails et pour les notations non expliquées nous renvoyons le lecteur intéressé à Dellacherie/Meyer (1980) ou à Jacod (1979).

Définitions 1.1. *1) Un processus réel Z est appelé densité de martingale pour X si $Z, ZX \in \mathcal{M}_{loc}(P)$ et $Z_0 = 1$ $P-p.s.$ Si de plus Z est strictement positive, Z est appelée densité de martingale stricte pour X.*
2) Soit $X \in \mathcal{S}^2_{loc}(P)$ de décomposition canonique $X = X_0 + M + A$, B un processus

croissant prévisible tel que $\langle M^i\rangle \ll B$, $i = 1,...,d$ *et* σ *la matrice symetrique définie par* $\sigma^{ij} = \dfrac{d\langle M^i, M^j\rangle}{dB}$. *On dit que* X *satisfait les conditions de structures notées* (SC) *s'il existe* $\lambda \in \mathcal{L}^2_{loc}(M)$ *tel que* $dA = \sigma\lambda dB$. *Dans ce cas nous posons* $\hat{Z} = \mathcal{E}(-\lambda \cdot M)$ *et le processus* $\hat{Z}$ *sera appelé densité de martingale minimale pour* X.
3) Soit H *une v.a.* $\mathcal{F}_T$*-mesurable. On dit que* H *admet une décomposition de Föllmer-Schweizer généralisée s'il existe une v.a.* $H_0 \in L^1(\mathcal{F}_0)$, *un processus prévisible* X*-intégrable* ξ^H *et* $L^H \in \mathcal{M}_{loc}(P)$ *fortement orthogonale à chaque* M^i *tels que :*

$$H = H_0 + (\xi^H \cdot X)_T + L^H_T \qquad P-p.s.$$

et que $\hat{Z}\hat{V} \in \mathcal{M}(P)$ *où*

$$\hat{V} = H_0 + \xi^H \cdot X + L^H.$$

Remarque 1.2. On observera que les conditions de structure ne dépendent pas du processus B choisi pourvu que $\langle M^i\rangle \ll B$, $i = 1,...,d$. En outre si les conditions de structure sont satisfaites, alors $A^i \ll \langle M^i\rangle$ pour $i = 1,...,d$, si bien qu'il existe un processus prévisible α vérifiant $\alpha^i = \dfrac{dA^i}{d\langle M^i\rangle}$, $i = 1,...,d$ et $dA = \gamma dB$ avec $\gamma^i = \sigma^{ii}\alpha^i$. Enfin lorsque X est une semimartingale continue vérifiant (SC), alors $\hat{Z}_T := \mathcal{E}(-\lambda \cdot M)_T$ est évidemment une densité de martingale stricte : c'est la densité de martingale stricte minimale.

Rappelons la proposition suivante due à Ansel/Stricker (1994a).

Proposition 1.3. *Si la décomposition de Föllmer-Schweizer généralisée existe et si* $\hat{Z} > 0$, *elle est unique.*

Remarque 1.4. Lorsque X n'admet pas une loi Q équivalente à P telle que $\frac{dQ}{dP} \in L^2(P)$ et que X soit une martingale locale sous Q, la décomposition de Föllmer-Schweizer au sens de Föllmer/Schweizer(1991) n'est pas unique en général, contrairement à la décomposition de Föllmer-Schweizer généralisée. Voici un exemple de cette situation. Prenons $T := 1$, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq 1}$ la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard réel $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$, $S := \inf\{t \ : \ \mathcal{E}\left(\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}\right) = \frac{1}{2}\}$, $M_t := \int_0^{t\wedge S} \frac{dB_s}{1-s}$, $H := 1$ et $X_t := B_{t\wedge S} + \ln(1 - t\wedge S)$. Alors $\hat{Z}_1 := \mathcal{E}(M)_1$ est l'unique densité de martingale stricte pour X. La décomposition de Föllmer-Schweizer généralisée de H est donnée par : $\dfrac{E[\hat{Z}_1 H \mid \mathcal{F}_t]}{\hat{Z}_t} = \dfrac{1}{2\hat{Z}_t} = \dfrac{1}{2}\mathcal{E}(-\tilde{X}_t) = \dfrac{1}{2}(1 - \int_0^t \dfrac{\mathcal{E}(-\tilde{X}_s)}{1-s} dX_s)$ où $d\tilde{X}_s = \dfrac{dX_s}{1-s}$. En revanche, lorsqu'on considère la définition classique de la décomposition de Föllmer-Schweizer, on peut prendre $H_0 = H = 1 = \hat{V}$. Quitte à changer la loi initiale P, on peut supposer que la semimartingale $\mathcal{E}(-\tilde{X}) \cdot \tilde{X}$ est dans $\mathcal{H}^2(P)$, c'est-à-dire qu'elle s'écrit comme la somme d'une martingale de carré intégrable et d'un processus à variation de carré intégrable. Ainsi il existe au moins deux décompositions de Föllmer-Schweizer au sens de Föllmer/Schweizer(1991). Le lecteur intéressé par ces problèmes d'unicité de la décomposition de Föllmer-Schweizer pourra se reporter au travail de

DMSSS(1995).

Définition 1.5. *Soient N une martingale locale réelle et M une martingale locale à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On appelle décomposition de Galtchouk-Kunita-Watanabe de N sur M une décomposition de la forme $N = N_0 + H \cdot M + L$ où $H \in \mathcal{L}^2_{loc}(M)$ et L est une martingale locale nulle en 0 et fortement orthogonale à M.*

Cette définition est légèrement différente de celle d'Ansel/Stricker(1994) qui exige seulement que $H \in \mathcal{L}^1_{loc}(M)$ (i.e H est M-intégrable et $H \cdot M \in \mathcal{M}_{loc}(P)$). Lorsque cette décomposition existe, elle est unique. On sait (voir Ansel/Stricker (1994a)) que cette décomposition existe en particulier si M et N sont dans $\mathcal{M}^2_{loc}(P)$ ou si M est continue et N quelconque.

2. QUELQUES RÉSULTATS SUR LES CONDITIONS DE STRUCTURE.

Le théorème suivant permet de caractériser les semimartingales vérifiant les conditions de structure quand il existe une densité de martingale stricte.

Théorème 2.1. *Supposons que X admette une densité de martingale stricte Z. Alors X satisfait les conditions de structure si et seulement si $X \in \mathcal{S}^2_{loc}(P)$ et Z admet une décomposition de Galtchouk-Kunita-Watanabe par rapport à M, M étant la partie martingale locale de la décomposition canonique de $X = X_0 + M + A$.*

Preuve : Supposons que la semimartingale X satisfait (SC) et que sa décomposition canonique s'écrit :

$$X = X_0 + M + A$$

Pour $i = 1, ..., d$ la formule d'Ito nous dit que

$$d(ZX^i) = X^i_- dZ + Z_- dM^i + Z_- dA^i + d[Z, M^i] + d[Z, A^i].$$

D'après un lemme de Yoeurp (voir Dellacherie/Meyer (1980)) $[Z, A^i]$ est une martingale locale, si bien que ZX^i est une martingale locale si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
i) $[Z, M^i]$ est à variation localement intégrable.
ii) $Z_- dA^i = -d\langle Z, M^i\rangle$.
Puisque Z est strictement positive et compte tenu de l'équivalence ci-dessus, nous concluons que

$$A^i = -\frac{1}{Z_-} \cdot \langle Z, M^i\rangle.$$

Comme $\frac{1}{Z_-}$ est localement borné, le processus $Y := \frac{1}{Z_-} \cdot Z$ est une martingale locale et $\langle M^i, Y\rangle$ existe. De plus $\langle M^i, Y\rangle = -A^i$.
La condition de structure implique que $A^i = \gamma^i \cdot B = (\sigma\lambda)^i \cdot B = \langle M^i, \lambda \cdot M\rangle$ pour tout $i = 1, ..., d$, si bien que $\langle M^i, \lambda \cdot M + Y\rangle = 0$. Donc $Y = -\lambda \cdot M + L$ où L est une martingale locale nulle en 0 et fortement orthogonale à M. Comme Z_- est localement borné, Z admet la décomposition de Galtchouk-Kunita-Watanabe $Z = 1 - (Z_-\lambda) \cdot M + Z_- \cdot L$, ce qui achève la démonstration de la première partie du théorème.

Réciproquement si Z satisfait les hypothèses du théorème, alors il existe $\lambda \in \mathcal{L}^2_{loc}(M)$ et une martingale locale L fortement orthogonale à chaque M^i tels que : $Y = \lambda \cdot M + L$. Donc selon les calculs précédents, on a $A^i = -\langle M^i, Y \rangle = -(\sigma\lambda)^i \cdot B$ et la démonstration du théorème est achevée.

Nous retrouvons alors très rapidement un résultat établi par Schweizer(1994).

Théorème 2.2. *Supposons que X admet une densité de martingale stricte Z et que :*

$$\begin{cases} (1)\ X \text{ est continue} \\ \\ \text{ou} \\ \\ (2) \begin{cases} X \in \mathcal{S}^2_{loc}(P) \\ \text{et} \\ Z \in \mathcal{M}^2_{loc}(P) \end{cases} \end{cases}$$

Alors, les assertions suivantes sont vérifiées :
(i) X satisfait les conditions de structure (SC).
(ii) Il existe une unique martingale locale $L \in \mathcal{M}_{loc}(P)$ fortement orthogonale à chaque $M^i, i = 1, ..., d$ telle que :

$$Z = \mathcal{E}(-\lambda \cdot M + L).$$

Preuve : Sous les conditions (1) ou (2) du théorème, la décomposition de Galtchouk-Kunita-Watanabe de Z par rapport à M existe (voir Ansel-Stricker (1994a)). Et par suite le théorème 2.2 est une conséquence immédiate du théorème 2.1.

Corollaire 2.3. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 2.2, nous avons :*
i) Pour tout $i = 1, ..., d$ $\alpha^i \in \mathcal{L}^2_{loc}(M)$.
ii) a) Si (1) est satisfaite, nous avons: $Z = \mathcal{E}(-\lambda \cdot M)\mathcal{E}(L)$.
b) Et si (2) a lieu nous avons $L \in \mathcal{M}^2_{loc}(P)$.

Preuve : i) En adaptant la démonstration des théorèmes 2.1 et 2.2 à chaque X^i séparément, nous obtenons que $Y = \varphi^i \cdot M^i + L^i$, où L^i est une martingale locale fortement orthogonale à M^i et φ^i est dans $\mathcal{L}^2_{loc}(M^i)$, si bien que $\varphi^i = -\alpha^i$. Donc $\alpha^i \in \mathcal{L}^2_{loc}(M^i)$.
ii) a) C'est une conséquence immédiate de l'expression de Z dans le théorème 2.2 et de la formule suivante de Yor:

$$\forall\, U, V \in \mathcal{S},\ \mathcal{E}(U)\mathcal{E}(V) = \mathcal{E}(U + V + [U, V]).$$

b) Si $Z \in \mathcal{M}^2_{loc}(P)$, alors Y et L sont dans $\mathcal{M}^2_{loc}(P)$.

Le corollaire suivant constitue une réciproque partielle du théorème 2.2.

Corollaire 2.4. *Soit $X \in \mathcal{S}^2_{loc}(P)$ de décomposition canonique $X = X_0 + M + A$ vérifiant les conditions de structure. Si M a la propriété de représentation prévisible et si X admet une densité de martingale stricte Z, alors $Z \in \mathcal{M}^2_{loc}(P)$. En outre*

$Z = \mathcal{E}(-\lambda \cdot M)$.

Preuve : Reprenons les notations de la démonstration du théorème 2.1. La martingale Z admet une décomposition de Galtchouk-Kunita-Watanabe $Z = 1-(Z_{-}\lambda)\cdot M + Z_{-}\cdot L$. Comme M possède la propriété de représentation prévisible, la martingale locale L est nulle, $Z \in \mathcal{M}^2_{loc}(P)$ et $Z = \mathcal{E}(-\lambda \cdot M)$.

Remarque 2.5. Dans Ansel/Stricker(1992) on donne un exemple où X vérifie les conditions de structure et admet une densité de martingale stricte mais où $\mathcal{E}(-\lambda \cdot M)$ n'est pas positive, si bien que la loi de martingale minimale n'existe pas. Il existe aussi des semimartingales vérifiant (SC) mais n'admettant pas de densité de martingale stricte, par exemple le processus de Poisson non compensé. Bien entendu une telle situation ne peut pas se produire lorsque X est continue.

Exemple 2.6. Comme nous l'indique le théorème 2.1, si nous supposons seulement que $X \in \mathcal{S}^2_{loc}(P)$ admet une densité de martingale stricte Z, X ne satisfait pas nécessairement les conditions de structure. Voici un tel exemple. Soit $f \in L^1([0,1])$ une fonction strictement positive qui n'est pas de carré intégrable, $\tilde{N}$ un processus de Poisson compensé, $M := \tilde{N}$ et $T = 1$. Considérons la v.a. strictement positive $Z_1 = c\left((f\cdot\tilde{N})_1 + \int_0^1 f(s)ds + 1\right)$ où c est une constante telle que $E(Z_1) = 1$. Puisque f n'est pas de carré intégrable, Z n'admet pas de décomposition de Galtchouk-Kunita-Watanabe (pour plus de détails on pourra se reporter à Ansel/Stricker (1994a)). Et par suite si $A_t = -\int_0^t \frac{cf(s)}{Z_{s_-}}ds$, le théorème 2.1 nous dit que la semimartingale $X = M + A$ ne satisfait pas les conditions de stucture sous P. En revanche, comme X est localement bornée, X vérifie les conditions de structure sous la loi Q de densité $\frac{dQ}{dP} = Z_1$. Ainsi les conditions de structure ne restent pas invariantes par changement de loi, même si X est localement bornée. Toutefois lorsque X est continue on a la

Proposition 2.7. *Soit X une semimartingale continue vérifiant les conditions de structure sous P. Alors elle les vérifie sous toute loi Q équivalente à P.*

Preuve : Puisque X est continue et vérifie (SC) sous P, la remarque 1.2 nous dit que X admet une densité de martingale stricte minimale $\hat{Z}_T$. Grâce au théorème 2.1 et à l'existence de la décomposition de Galtchouk-Kunita-Watanabe dans le cas continu, X vérifie (SC) sous Q.

La proposition 2.7 que nous améliorerons un peu dans la remarque 2.10 en exigeant seulement $Q \ll P$, va nous permettre de démontrer aisément l'invariance de (SC) par changement de numéraire, résultat déjà établi par Delbaen et Shirakawa (1995) avec une méthode moins directe. La démonstration que nous allons fournir illustre le lien très étroit entre changement de loi et changement de numéraire. Enfin l'exemple 2.6 montre que l'hypothèse de continuité de X est essentielle pour le corollaire suivant.

Corollaire 2.8. *Supposons que la semimartingale X est continue et vérifie les conditions de structure. Si $\rho = c + H \cdot X > 0$ où c est un réel strictement positif et H est* *intégrable par rapport à X, alors $\frac{X}{\rho}$ satisfait aussi (SC).*

Preuve : On observe d'abord qu'il suffit d'établir l'existence d'une suite croissante de t.a. (T_n) tendant stationnairement vers T telle que $(\frac{X}{\rho})^{T_n}$ satisfait (SC). Comme X est un processus continu, on peut construire une suite croissante de t.a. (T_n) tendant stationnairement vers T telle que les processus $\mathcal{E}(-\lambda \cdot M)^{T_n}$ et ρ^{T_n} soient bornés. Soit Q la loi équivalente à P, de densité $\frac{dQ}{dP} := \frac{\rho_{T_n}}{E(\rho_{T_n})}\mathcal{E}(-\lambda \cdot M)_{T_n}$. Sous cette loi, $(\frac{X}{\rho})^{T_n}$ est une martingale locale continue, donc vérifie certainement (SC). Il en sera de même sous P d'après la proposition 2.7.

Soit $\mathcal{K}_1 := \{(H \cdot X)_T \ : \ H$ est X-intégrable et $H \cdot X \geq -1\}$ et $\mathcal{K} := \{(H \cdot X)_T \ : \ H$ est X-intégrable et il existe un réel a tel que $H \cdot X \geq -a\}$. Un élément $f \in \mathcal{K}$ est dit maximal si pour tout $g \in \mathcal{K}$ $g \geq f \Rightarrow f = g$ p.s.. Rappelons la définition d'absence d'opportunités d'arbitrage : X satisfait NA si $\mathcal{K}_1 \cap L^0_+ = \{0\}$. Lorsque X est une semimartingale localement bornée, Delbaen/Schachermayer (1994) ont montré que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
i) X admet une loi de martingale locale Q équivalente à P, c'est-à-dire X est une martingale locale sous la loi Q.
ii) Il existe une densité de martingale stricte pour X et X vérifie NA.
iii) $\mathcal{K}_1$ est borné dans L^0 et X vérifie NA.
Grâce à l'exemple 2.6 et au théorème 2.1 nous allons préciser les relations entre $\mathcal{K}_1$ borné dans L^0 et (SC) lorsque X est une semimartingale quelconque. La partie i) du théorème suivant a déjà été établie par Delbaen/Schachermayer (1995b) mais par souci de complétude nous allons en fournir une démonstration.

Théorème 2.9. *i) Si X admet une densité de martingale stricte, alors $\mathcal{K}_1$ est borné dans L^0.*
ii) Lorsque X est continu, $\mathcal{K}_1$ est borné dans $L^0 \iff X$ vérifie $(SC) \iff$ il existe une densité de martingale stricte.
iii) Soit $X \in \mathcal{S}^2_{loc}(P)$. X satisfait (SC) si et seulement si l'ensemble $\{(H \cdot X)_T : H$ prévisible borné et $\int_0^T H' d\langle M\rangle H \leq 1\}$ est borné dans L^0.

Preuve : i) Soit Z une densité de martingale stricte. Comme Z et ZX sont des martingales locales, il existe une suite croissante de t.a. (T_n) tendant stationnairement vers T, telle que Z^{T_n} et $(ZX)^{T_n}$ soient des martingales. Sous la loi Q^n de densité $\frac{dQ^n}{dP} := Z_{T_n}$, X^{T_n} est une martingale, si bien que $1+(H\cdot X)^{T_n}$ est une Q^n surmartingale positive. Il en résulte que

$$Q^n(|(H \cdot X)_{T_n}| > c-1) \leq Q^n(|(H \cdot X)_{T_n} + 1| > c) \leq \frac{1}{c}(E^{Q^n}((H \cdot X)_{T_n}) + 1) \leq \frac{1}{c}.$$

Pour voir que $\mathcal{K}_1$ est borné dans L^0, il suffit de remarquer que

$$P(|(H \cdot X)_T| > c-1) \leq P(T_n < T) + \int_{\{|(H\cdot X)_{T_n}|>c-1\}} Z_{T_n}^{-1} dQ^n$$

ii) Comme X est continue, le théorème 2.1 nous dit que l'existence d'une densité de martingale stricte implique (SC). Inversement (SC) entraîne l'existence de la densité de martingale minimale stricte. Enfin d'après i) l'existence d'une densité de martingale stricte implique que $\mathcal{K}_1$ est borné dans L^0 . Il reste à établir que la bornitude de $\mathcal{K}_1$ dans L^0 entraîne (SC). Soit $X := M + A$ la décomposition canonique de la semimartingale continue X. Si A n'est pas absolument continu par rapport à $\langle M \rangle$, alors le théorème 2.3 de Delbaen/Schachermayer (1995a) nous dit qu'il existe un processus prévisible f à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que $\|f\|$ est à valeurs dans $\{0,1\}$ et que $d\langle M \rangle f = 0$ tandis que $f'dA$ n'est pas identiquement nul. Bien entendu nous pouvons choisir f tel que $f'dA = |f'dA|$. On pose $f^n := nf$, si bien que la suite $((nf) \cdot X)_T = n \int_0^T |f'dA| \geq 0$ n'est pas bornée dans L^0. A fortiori $\mathcal{K}_1$ n'est pas borné dans L^0, ce qui est absurde. Ainsi il existe un processus prévisible λ tel que $dA = \langle M \rangle \lambda$. Il reste à établir que $\int_0^T \lambda' d\langle M \rangle \lambda < \infty$. À cet effet nous allons adapter à notre situation la démonstration du théorème 7 d'Ansel/Stricker (1992). Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $P\left(\int_0^T \lambda'_s d\langle M \rangle_s \lambda_s = \infty\right) > \varepsilon$ et considérons le processus borné $\lambda(n) := \lambda 1_{\{\|\lambda\| \leq n\}}$. Puisque la suite $\{\int_0^T \lambda'_s(n) d\langle M \rangle_s \lambda_s(n) > \theta\}$ tend en croissant vers $\{\int_0^T \lambda'_s d\langle M \rangle_s \lambda_s > \theta\}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on peut choisir une suite croissante de réls positifs (θ_n) tendant vers $+\infty$ telle que $P\left(\int_0^T \lambda'_s(n) d\langle M \rangle_s \lambda_s > \theta_n\right) \geq \varepsilon$. On pose :

$$T_n := \inf\{t : \int_0^t \lambda'_s(n) d\langle M \rangle_s \lambda_s \geq \theta_n\} \text{ et } \alpha(n) := \theta_n^{-\frac{3}{4}} \lambda(n) 1_{[0,T_n]}.$$

Observons que par définition de T_n

$$\int_0^T \alpha'_s(n) d\langle M \rangle_s \alpha_s(n) \leq \theta_n^{-\frac{1}{2}},$$

si bien que $(\alpha(n) \cdot M)^*_T$ converge vers 0 dans L^2. Comme le processus $\alpha(n)$ n'est pas nécessairement admissible, on pose :

$$S_n := \inf\{t : (\alpha(n) \cdot M)_t \leq -1\} \text{ et } H(n) := \alpha(n) 1_{[0,S_n]}.$$

Le processus $H(n)$ est 1-admissible, c'est-à-dire $H(n) \cdot X \geq -1$. Comme $(\alpha(n) \cdot M)^*_T$ converge vers 0 dans L^2, $P(S_n \neq T_n)$ converge vers 0, si bien que pour n assez grand $P(\int_0^T H'_s(n) d\langle M \rangle_s \lambda_s \geq \theta_n^{\frac{1}{4}}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ et a fortiori $P((H(n) \cdot X)_T \geq \theta_n^{\frac{1}{4}} - 1) \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi $\mathcal{K}_1$ n'est pas borné dans L^0, ce qui est absurde, et la deuxième partie du théorème est démontrée.

iii) Si X satisfait (SC) et si $\int_0^T H' d\langle M \rangle H \leq 1$, on a :

$$\int_0^T |H'dA| = \int_0^T |H' d\langle M \rangle \lambda| \leq (\int_0^T H' d\langle M \rangle H)^{\frac{1}{2}} (\int_0^T \lambda' d\langle M \rangle \lambda)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq (\int_0^T \lambda' d\langle M \rangle \lambda)^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit immédiatement que $\{(H \cdot X)_T : H$ prévisible borné et $\int_0^T H' d\langle M \rangle H \leq 1\}$ est borné dans L^0. Inversement, supposons que $\{(H \cdot X)_T : H$ prévisible borné et $\int_0^T H' d\langle M \rangle H \leq 1\}$ est borné dans L^0. Ceci est équivalent à : $\{(H \cdot A)_T : H$ prévisible borné et $\int_0^T H' d\langle M \rangle H \leq 1\}$ est borné dans L^0. En reprenant la démonstration du ii) on voit qu'il existe un processus prévisible λ tel que $dA = d\langle M \rangle \lambda$. Il reste à établir que $\int_0^T \lambda' d\langle M \rangle \lambda < \infty$. À cet effet nous allons reprendre la démonstration du théorème 7 d'Ansel/Stricker (1992) en l'adaptant au cas multidimensionnel. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $P\left(\int_0^T \lambda'_s d\langle M\rangle_s \lambda_s = \infty\right) > \varepsilon$ et considérons le processus borné $\lambda(n) := \lambda 1_{\{\|\lambda\| \leq n\}}$. Puisque la suite $\{\int_0^T \lambda'_s(n) d\langle M\rangle_s \lambda_s(n) > \theta\}$ tend en croissant vers $\{\int_0^T \lambda'_s d\langle M\rangle_s \lambda_s > \theta\}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on peut choisir une suite croissante de réels positifs (θ_n) tendant vers $+\infty$ telle que $P\left(\int_0^T \lambda'_s(n) d\langle M\rangle_s \lambda_s > \theta_n\right) \geq \varepsilon$. On pose :

$$T_n := \inf\{t : \int_0^t \lambda'_s(n) d\langle M\rangle_s \lambda_s \geq \theta_n\}$$

$$\alpha(n) := \theta_n^{-\frac{1}{2}} \lambda(n) 1_{[0,T_n[} + \lambda_{T_n}(n)(\theta_n + \lambda'_{T_n}(n)\Delta\langle M\rangle_{T_n}\lambda_{T_n}(n))^{-\frac{1}{2}} 1_{[T_n]}.$$

Comme T_n est un t.a. d'arrêt prévisible, $\alpha(n)$ est prévisible. En outre

$$\int_0^T \alpha'(n) d\langle M\rangle \alpha(n)$$

$$\leq \theta_n^{-1} \int_{[0,T_n[} \lambda'(n) d\langle M\rangle \lambda(n) + \lambda'_{T_n}(n)\Delta\langle M\rangle_{T_n}\lambda_{T_n}(n)(\theta_n + \lambda'_{T_n}(n)\Delta\langle M\rangle_{T_n}\lambda_{T_n}(n))^{-1}.$$

Or

$$\int_{[0,T_n[} \lambda'(n) d\langle M\rangle \lambda(n) \leq \theta_n$$

par définition de T_n et la fonction $f(x) := x(x+\theta_n)^{-1} \leq 1$ pour $x \geq 0$ si bien que $\int_0^T \alpha'(n) d\langle M\rangle \alpha(n) \leq 2$. Mais :

$$\int_0^T \alpha'(n) d\langle M\rangle \lambda$$

$$= \theta_n^{-\frac{1}{2}} \int_{[0,T_n[} \lambda'(n) d\langle M\rangle \lambda(n) + \lambda'_{T_n}(n)\Delta\langle M\rangle_{T_n}\lambda_{T_n}(n)(\theta_n + \lambda'_{T_n}(n)\Delta\langle M\rangle_{T_n}\lambda_{T_n}(n))^{-\frac{1}{2}}$$

$$\geq \int_0^{T_n} \lambda'(n) d\langle M\rangle \lambda(n)(\theta_n + \int_0^{T_n} \lambda'(n) d\langle M\rangle \lambda(n))^{-\frac{1}{2}}.$$

Comme on a manifestement $x(\theta_n + x)^{-\frac{1}{2}} \geq 2^{-\frac{1}{2}}\theta_n^{\frac{1}{2}}$ pour $x \geq \theta_n$, on obtient

$$P(\int_0^T \alpha'(n) d\langle M\rangle \lambda \geq 2^{-\frac{1}{2}}\theta_n^{\frac{1}{2}}) \geq \varepsilon$$

compte tenu de l'hypothèse $P\left(\int_0^T \lambda'_s(n) d\langle M\rangle_s \lambda_s > \theta_n\right) \geq \varepsilon$. Ainsi la suite $(\alpha'(n) \cdot A)_T$ n'est pas bornée dans L^0, ce qui est absurde et iii) est démontré.

Remarque 2.10. L'exemple 2.6 montre que même si X est localement bornée, $\mathcal{K}_1$ peut être borné dans L^0 sans que X vérifie (SC) sous P. Toutefois un examen attentif de la démonstration ci-dessus montre que si X est dans $\mathcal{S}^2_{loc}(P)$ et si $\mathcal{K}_1$ est borné dans L^0, alors il existe un processus prévisible λ tel que $dA = d\langle M\rangle\lambda$. D'autre part si X est le processus de Poisson non compensé, on voit immédiatement que X vérifie (SC) mais $\mathcal{K}_1$ n'est pas borné dans L^0 car X est croissant. Cependant les équivalences de la partie ii) du théorème 2.9 restent vraies si X est une semimartingale spéciale dont la partie martingale locale est continue. Enfin la partie iii) du théorème précédent permet d'améliorer un peu la proposition 2.7. Si X est continue et vérifie (SC) sous la loi P, alors X vérifie aussi (SC) sous toute loi $Q \ll P$ car lorsque X est continue, $\langle M\rangle = \langle X\rangle = [X]$ (voir par exemple Jacod (1979) ou Dellacherie/Meyer (1980)).

Nous terminons ce paragraphe en donnant une réponse positive à une conjecture de Delbaen/Schachermayer (1995b). Nous désignons par $M^e(P)$ l'ensemble des lois Q

équivalentes à P telles que X soit une martingale locale sous P. Delbaen et Schachermayer ont établi le théorème suivant lorsque le numéraire V vérifie la condition V^{-1} localement borné.

Théorème 2.11. *Soit X une semimartingale localement bornée telle que $M^e(P) \neq \emptyset$. On suppose que H est admissible et que le processus $V := 1 + H \cdot X$ vérifie $V_1 > 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
i) $(H \cdot X)_1$ est maximal dans $\mathcal{K}$.
ii) Le processus $\tilde{X} = (\frac{X}{V}, \frac{1}{V})$ vérifie NA.
iii) Il existe $Q \in M^e(P)$ telle que $H \cdot X$ soit une Q-martingale.

Preuve : Observons d'abord que H étant admissible, $1 + H \cdot X$ est une surmartingale pour toute loi $R \in M^e(P)$. Comme $V_1 > 0$, il en résulte que $V > 0$, si bien que $\tilde{X}$ est parfaitement défini.
Le théorème 11 de Delbaen/Schachermayer (1995b) établit en toute généralité l'équivalence i) $\Leftrightarrow$ ii).
Montrons que iii) $\Rightarrow$ ii). Puisque $V_1 > 0$ et que $E(V_1) = 1$, on peut définir une nouvelle loi $\tilde{Q}$ équivalente à Q, de densité $d\tilde{Q} = V_1 dQ$. Dans ce cas $\tilde{X}$ est une martingale locale sous $\tilde{Q}$ et ii) est établi.
Montrons que ii) $\Rightarrow$ iii). Soit $V' := \frac{1}{2}(1 + V)$. Ce processus est défini à partir de $H/2$ à la place de H. Comme le soulignent Delbaen et Schachermayer, l'intérêt de ce processus est que $\frac{1}{V'}$ est borné et que $V' - 1$ est aussi maximal dans $\mathcal{K}$. Puisque les assertions i) et ii) sont équivalentes on en déduit que l'assertion ii) est aussi vérifiée en remplaçant V par V'. Or V' est une densité de martingale stricte pour $\tilde{X}' := (\frac{X}{V'}, \frac{1}{V'})$ et $\tilde{X}'$ vérifie NA. Donc il existe une loi $\tilde{Q}'$ équivalente à P telle que $\tilde{X}'$ soit une $\tilde{Q}'$ martingale locale. Comme $\frac{1}{V'}$ est borné, $\frac{1}{V'}$ est une $\tilde{Q}'$-martingale. Dans ce cas V' sera une martingale sous la loi $dQ := \frac{1}{V'} d\tilde{Q}'$ et de plus $Q \in M^e(P)$. Enfin il est clair que V est aussi une Q-martingale. Le théorème est démontré.

Remarque 2.12. Il serait intéressant de supprimer l'hypothèse que X est localement borné. Malheureusement nous ne sommes pas parvenus à établir l'implication i) $\Rightarrow$ iii) sans cette hypothèse. Enfin on observera que cette question est liée à la couverture des actifs contingents et le prix maximum (voir Ansel/Stricker (1994b)).

3. DÉCOMPOSITION DE FÖLLMER-SCHWEIZER GÉNÉRALISÉE.

Voici une deuxième application de la décomposition de Galtchouk-Kunita-Watanabe.

Théorème 3.1. *Supposons que X est un processus continu $((\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T})$-adapté, admettant une densité de martingale stricte et soit H une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*
1) H admet une décomposition de Föllmer-Schweizer généralisée si et seulement si $H\hat{Z}_T$ est dans $\mathcal{L}^1(P)$.
2) La décomposition de Föllmer-Schweizer généralisée est continue pour la topologie de la convergence uniforme en probabilité : si (H^n) est une suite de v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurables admettant la décomposition de Föllmer-Schweizer généralisée $H^n = H_0^n + L_T^n + (\xi^n \cdot X)_T$ et si $H^n\hat{Z}_T$ converge vers $H\hat{Z}_T$ dans $\mathcal{L}^1(P)$, alors $\xi^n \cdot X$ (resp. L^n)

converge uniformément en probabilité vers $\xi \cdot X$ (resp. L).

Preuve : 1) Soit H une v.a. telle que $H\hat{Z}_T \in \mathcal{L}^1(P)$. Considérons le processus N défini par

$$N_t = \frac{E[\hat{Z}_T H | \mathcal{F}_t]}{\hat{Z}_t}.$$

Le processus $N\hat{Z}$ est une martingale sous P. Soit (T_m) une suite localisante pour la martingale locale $\hat{Z}$. Si $d\hat{P}^m = \hat{Z}_{T_m} dP$, alors $N^{T_m} \in \mathcal{M}(\hat{P}^m)$. De plus sous $\hat{P}^m$, nous avons la décomposition de Galtchouk-Kunita-Watanabe :

$$(1) \qquad N^{T_m} = N_0 + \xi^m \cdot X^{T_m} + L^m$$

où $\xi^m \in \mathcal{L}^2{}_{loc}(X^{T_m}, \hat{P}^m)$ et $L^m \in \mathcal{M}_{loc}(\hat{P}^m)$ est fortement orthogonale à X^{T_m} sous $\hat{P}^m$, donc aussi à M car X est une processus continu et le processus L^m est constant à partir de T_m. Ainsi L^m est aussi dans $\mathcal{M}_{loc}(P)$.
Comme $Y \in \mathcal{M}(\hat{P}^m)$ si et seulement si $Y\hat{Z}^{T_m} \in \mathcal{M}(P)$ nous avons :

$$\forall \ Y \in \mathcal{M}(\hat{P}^{m+1}), \ Y^{T_m} \in \mathcal{M}(\hat{P}^m).$$

Et par suite, grâce à l'unicité de la décomposition (1) pour chaque N^{T_m}, nous concluons que $\xi^{m+1} \cdot X^{T_m}$ est indistinguable de $\xi^m \cdot X^{T_m}$; de même $(L^{m+1})^{T_m} = L^m$.
Considérons les processus ξ et L définis par :

$$\xi = \sum_{m \geq 1} \xi^m 1_{]T_{m-1}, T_m]} \quad \text{et} \quad L^{T_m} = L^m.$$

Sous P, L est une martingale locale orthogonale à M, de plus ξ est X-intégrable (voir Chou/Meyer/Stricker (1980)), si bien que

$$N = N_0 + L + \xi \cdot X.$$

Ceci achève la preuve de la première partie du théorème.

2) Nous passons maintenant à la démonstration de la continuité. Soit (H^n) une suite de v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurables admettant la décomposition de Föllmer-Schweizer généralisée telle que $H^n\hat{Z}_T$ converge vers 0 dans $\mathcal{L}^1(P)$. Posons : $N_t^n = E[\hat{Z}_T H^n | \mathcal{F}_t]\hat{Z}_t^{-1}$. Comme le processus $\hat{Z}$ est continu et strictement positif, le lemme maximal nous dit que $(N^n)_T^*$ converge vers 0 en probabilité. Considérons comme en 1), une suite localisante (T_m) pour le processus $\hat{Z}$. Les temps d'arrêt $V_n = \inf\{t : |N^n{}_t| > 1\} \wedge T$ convergent stationnairement vers T en probabilité. Soient $\varepsilon > 0$ fixé et m un entier tels que $P(T_m = T) > 1 - \varepsilon$. Si $U \leq T_m$ est un temps d'arrêt, alors :

$$E^{\hat{P}^m}[|N_U^n|] = E[\hat{Z}_{T_m}|N_U^n|] = E(|E[\hat{Z}_T H^n | \mathcal{F}_U]|) \leq E(|\hat{Z}_T H^n|)$$

Comme $(N^n)^*_{T_m \wedge V_n -} \leq 1$ et que $(N^n)_T^*$ converge vers 0 en probabilité, on en déduit que $(N^n)^{T_m \wedge V_n}$ converge vers 0 dans $H^1(\hat{P}^m)$. Mais $[\xi^n \cdot X^{T_m}, \xi^n \cdot X^{T_m}]_{V_n} \leq [N^n, N^n]_{T_m \wedge V_n}$ si bien que $(\xi^n \cdot X)^*_{T_m}$ converge en probabilité vers 0. Par différence il en est alors de même pour $L^n{}^*_{T_m}$. Comme $P(T_m = T) > 1 - \varepsilon$, il en résulte que $(\xi^n \cdot X)_T^*$ (resp. $L^n{}^*_T$) converge vers 0 en probabilité et la démonstration du théorème est achevée.

RÉFÉRENCES.

J.P. Ansel et C. Stricker (1992) "Lois de martingale, densités et décomposition de Föllmer-Schweizer", Annales de l'Institut Henri Poincaré vol. 28, 375-392.

J.P. Ansel et C. Stricker (1994a) "Décomposition de Kunita-Watanabe", Séminaire de Probabilités XXVII, Lecture Notes in Mathematics 1557, 30-32, Springer.

J.P. Ansel et C. Stricker (1994b) "Couverture des actifs contingents et prix maximum", Annales de l'Institut Henri Poincaré vol. 30, n. 2, 303-315.

C.S. Chou, P.A. Meyer et C. Stricker (1980) "Sur les intégrales stochastiques de processus prévisibles non bornés", Séminaire de Probabilités XIV, Lecture Notes in Mathematics 784, 128-139, Springer.

F. Delbaen et W. Schachermayer (1994) "A General Version of the Fundamental Theorem of Asset pricing", Mathematische Annalen 300, 463-520.

F. Delbaen et W. Schachermayer (1995a) "The Existence of Absolutely Continuous Local Martingale Measures", à paraître.

F. Delbaen et W. Schachermayer (1995b) "The No-Arbitrage Property under a Change of Numéraire", à paraître.

F. Delbaen, P. Monat, W. Schachermayer, M. Schweizer et C. Stricker (1995) "Weighted Norm Inequalities and Closedness of a Space of Stochastic Integrals", à paraître.

F. Delbaen et H. Shirakawa (1995) " A Note on the No Arbitrage Condition for International Financial Markets", à paraître.

C. Dellacherie et P.A. Meyer (1980) "Probabilités et Potentiel", chapitre V à VIII, Hermann.

H. Föllmer et M. Schweizer (1991) "Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information", Applied Stochastic Analysis, Stochastics Monographs 5, 389-414.

J. Jacod (1979) "Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales", Lecture Notes in Mathematics 714, Springer.

D. Revuz et M. Yor (1991) "Continuous Martingales and Brownian Motion", Springer.

M. Schweizer (1995) "On the Minimal Martingale Measure and the Föllmer-Schweizer decomposition", Stochastic Analysis and Applications 13, 573-599.

C. Stricker (1990) "Arbitrage et lois de martingale", Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 26, 451-460.