José de Sam Lazaro

Un contre-exemple touchant à l'indépendance

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 30 (1996), p. 100-103
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1996__30__100_0>

Un contre-exemple touchant à l'indépendance

par J. DE SAM LAZARO
Laboratoire AMS, URA CNRS 1378
Université de Rouen
76821 Mont Saint Aignan Cedex

1 Dans la préparation d'un travail déjà ancien que nous publiâmes en collaboration avec M. YOR (L.N. in Math. n°649, pp.302-306, 1977) nous fûmes amenés à nous poser la question suivante

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$, H_1 et H_2 des sous-ensembles denses de $L^1(\mathcal{B}_1)$ et $L^1(\mathcal{B}_2)$ respectivement. On suppose que pour tous $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$ le produit $h_1 h_2$ est intégrable et $E[h_1 h_2] = E[h_1]E[h_2]$. Pouvons nous affirmer que les tribus $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont indépendantes ?

L'objet de cette note est de répondre (par la négative) à cette question.

Remarque. Si H_1 et H_2 étaient denses dans $L^2(\mathcal{B}_1)$ et $L^2(\mathcal{B}_2)$ respectivement, alors les tribus $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ seraient indépendantes, ceci grâce à la continuité, pour tout $g \in L^2$, de l'application $h \mapsto E[gh]$ de L^2 dans $\mathbb{C}$.

2 Considérons l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où Ω est l'intervalle $[0,1]$, $\mathcal{A}$ sa tribu borélienne, P la mesure de Lebesgue. Nous allons démontrer le résultat suivant

Proposition. *Il existe deux sous-ensembles dénombrables $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de $L^1(\Omega)$, denses dans $L^1(\Omega)$, tels que $fg \in L^1(\Omega)$ et $E[fg] = E[f]E[g]$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout $g \in \mathcal{G}$.*

Pour démontrer cette proposition nous nous donnons une suite $\{e_1, e_2, \ldots\}$ d'éléments de $L^\infty_{\mathbb{R}}(\Omega)$ dense dans $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega)$, et deux suites $(\varepsilon_n), (\varepsilon'_n)$ de réels > 0 décroissantes vers 0. Nous montrons alors qu'il existe deux suites $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots\}$, $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \ldots\}$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega)$ telles que

(α) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||f_n - e_n|| < \varepsilon_n$, $||g_n - e_n|| < \varepsilon'_n$

(β) Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, le produit $f_n g_m \in L^1$ et $E[f_n g_n] = E[f_n]E[g_m]$

Il s'ensuivra que les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont denses dans $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega)$ et que pour tout $f \in \mathcal{F}$, $g \in \mathcal{G}$, on a $fg \in L^1_{\mathbb{R}}$ et $E[fg] = E[f]E[g]$. L'extension au cas complexe est alors immédiate.

La démonstration de la proposition sera basée sur le lemme suivant

Lemme. *On se donne une famille finie $\{f_1, ..., f_n\}$ d'éléments de $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega)$, un élément e de $L^\infty_{\mathbb{R}}(\Omega)$ et un réel $\varepsilon > 0$. On suppose que*

(a) pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $f_i \notin L^2(\Omega)$

(b) les lois de probabilité des f_i et de e sont diffuses en dehors de 0

(c) Pour tout i, $1 \leq i \leq n$, il existe un ensemble $C_i \in \mathcal{A}$ tel que $\displaystyle\int_{C_i} f_i^2 \, dP = \infty$ et tel que pour tout $j \neq i$, f_j est bornée sur C_i.

Il existe alors $g \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega) \backslash L^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$ tel que

(α) $\|g - e\|_1 < \varepsilon$

(β) pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, le produit $g f_i \in L^1$ et $E[f_i g] = E[f_i]E[g]$

(γ) il existe $B_0, B_1, ..., B_n \in \mathcal{A}$ tels que $\int_{B_0} |g|^2 \, dP = \infty$, g soit bornée sur $\cup_1^n B_i$, et pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$ $\int_{B_i} f_i^2 \, dP = \infty$ et f_i soit bornée sur $\cup_{i \neq j} B_j$.

(δ) *la loi de probabilité de g soit diffuse en dehors de* 0.

Démonstration du lemme. L'hypothèse (c) implique qu'il existe n éléments disjoints $C_1, ..., C_n$ de $\mathcal{A}$ vérifiant : pour tout i, $\int_{C_i} f_i^2\,dP = \infty$, f_i conserve le même signe sur C_i, les f_j sont bornées sur C_i pour $j \neq i$. De plus nous choisirons les C_i de façon que $\int_{C_i} |f_i|\,dP < \frac{\varepsilon}{2n+1}$, $\int_{C_i} |e|\,dP < \frac{\varepsilon}{2n+1}$ et $P(\bigcup_1^n C_i) < 1$ Finalement $\mathcal{A}$ étant non-atomique nous pouvons supposer que pour tout i, $C_i = A_i \cup B_i, A_i \cap B_i = \emptyset$, $\int_{A_i} f_i^2\,dP = \int_{B_i} f_i^2\,dP = \infty$.

Nous allons procéder à la construction de g. Quitte à remplacer f_i par $f_i - E[f_i]$ nous supposerons que $E[f_i] = 0$.

Fixons un ensemble $B_0 \subseteq (\bigcup_1^n C_i)^c$ de mesure > 0 tel que les f_i soient bornées sur B_0 et définissons g sur B_0 de sorte que

$$\int_{B_0} |g|\,dP < \infty, \quad \int_{B_0} |g|^2\,dP = \infty, \quad \int_{B_0} |g-e|\,dP < \frac{\varepsilon}{2n+1}$$

et que g soit diffuse sur B_0, ce qui est possible, l'espace étant non-atomique. Sur le reste de $(\bigcup_1^n C_i)^c$, posons $g = e$. Il s'agit maintenant de définir g sur chaque ensemble C_i. Disons tout de suite que, pour tout i, $|g|$ sera égale à $|f_i|$ sur une partie de A_i et à 0 sur ce qui reste de A_i et sur B_i de sorte que

$$\|g-e\|_1 = \int_{B_0} |g-e|\,dP + \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} |g-e|\,dP < \frac{\varepsilon}{2n+1} + \sum_i \Big(\int_{C_i} |f_i|\,dP + \int_{C_i} |e|\,dP\Big) < \varepsilon.$$

Donnons nous une série convergente $\sum a_n$ avec $a_n > 0$ pour tout n et soit $0 < b_1 < b_2 < ...$ une suite de réels vérifiant pour tout m

$$(1) \qquad \sum_{j \neq i} \int_{A_j \cap \{|f_j| > b_m\}} |f_i f_j|\,dP < a_m \text{ pour } i \in \{1, ..., n\}.$$

Posons $J_i^{(1)} = \int_{(\bigcup_1^n C_j)^c} g f_i\,dP$ pour $i \in \{1, ...n\}$ et commençons par définir, pour chaque i, g sur une partie de A_i de la façon suivante : supposons par exemple qu'on ait $J_1^{(1)} \leq 0$ et $f_1 \leq 0$ sur A_1. Soient $c_1^{(1)}, d_1^{(1)}$ des réels tels que

$$b_1 < c_1^{(1)} < d_1^{(1)} \text{ et } \int_{A_1 \cap \{-d_1^{(1)} < f_1 < -c_1^{(1)}\}} f_1^2\,dP = -J_1^{(1)}.$$

De tels réels $c_1^{(1)}$ et $d_1^{(1)}$ existent du fait que la loi de f_1 est diffuse et que $\int_{A_1} f_1^2\,dP = \infty$. Posons

$$A_1^{(1)} = A_1 \cap \{-d_1^{(1)} < f_1 < -c_1^{(1)}\} \text{ et } g = f_1 \text{ sur } A_1^{(1)}.$$

On définit de même les paires $(c_1^{(2)}, d_1^{(2)}), ..., (c_1^{(n)}, d_1^{(n)})$, les parties $A_2^{(1)}, ..., A_n^{(1)}$ de $A_2, ..., A_n$, et g sur chaque $A_i^{(1)}$: g vaudra f_i si $J_i^{(1)} \leq 0$, $-f_i$ si $J_i^{(1)} \geq 0$. On aura pour $i \in \{1, ...n\}$, grâce à l'inégalité (1) ci-dessus,

$$\Big|\int_{(\bigcup C_j)^c \cup (\bigcup_j A_j^{(1)})} g f_i\,dP\Big| < a_1.$$

Ensuite posons $J_i^{(2)} = \int_{(\bigcup_j C_j)^c \cup (\bigcup_j A_j^{(1)})} gf_i \, dP$ et définissons des paires de réels $(c_2^{(1)}, d_2^{(1)}), ..., (c_2^{(n)}, d_2^{(n)})$ vérifiant

$$d_1^{(j)} \vee b_2 < c_2^{(j)} < d_2^{(j)} \text{ et } \int_{A_j \cap \{c_2^{(j)} < |f_j| < d_2^{(j)}\}} f_j^2 = |J_j^{(2)}|.$$

Posons $A_j^{(2)} = A_j \cap \{c_2^{(j)} < |f_j| < d_2^{(j)}\}$ et définissons g sur $A_j^{(2)}$ par $g = f_j$ si $J_j^{(2)} \leq 0$, $-f_j$ si $J_j^{(2)} \geq 0$ pour $j = 1, 2, ...n$. Toujours en vertu de l'inégalité (1) on a

$$|\int_{(\bigcup C_j)^c \cup (\bigcup A_j^{(1)}) \cup (\bigcup A_j^{(2)})} gf_i \, dP| < a_2,$$
$$\int_{(\bigcup C_j)^c \cup (\bigcup A_j^{(1)}) \cup (\bigcup A_j^{(2)})} |gf_i| \, dP < a_1 + a_2.$$

Et ainsi de suite. À la $m^{\text{ième}}$ étape nous aurons construit, pour tout i, m parties disjointes $A_i^{(1)}, ..., A_i^{(m)}$ de A_i vérifiant

$$|\int_{(\bigcup C_j)^c \cup (\bigcup_{i=1,k=1}^{n,m} A_j^{(k)})} gf_i \, dP| < a_m,$$

$$\text{(2)} \qquad \int_{(\bigcup C_j)^c \cup (\bigcup_{i=1,k=1}^{n,m} A_j^{(k)})} |gf_i| \, dP < a_1 + ... + a_m.$$

Posons enfin $g = 0$ sur $A_i \backslash \bigcup A_i^{(k)}$ pour $i = 1, 2, ..., n$. D'après (2), gf_i est intégrable car la série $\sum a_m$ est convergente, et la première de ces inégalités implique que $E[gf_i] = 0$ car $\lim_{m \to \infty} a_m = 0$. □

Passons à la démonstration de la proposition. Soit $\{e_n\}$ une famille dénombrable d'éléments de $L_{\mathbb{R}}^{\infty}(\Omega)$, dense dans $L_{\mathbb{R}}^1(\Omega)$, telle que chaque e_n ait une loi diffuse en dehors de 0 (il est facile de voir qu'une telle famille existe). Donnons nous deux suites $(\varepsilon_n), (\varepsilon'_n)$ de réels > 0 décroissant vers 0. Il existe $f_1 \in L_{\mathbb{R}}^1 \backslash L_{\mathbb{R}}^2$ de loi diffuse en dehors de 0 telle que $\|f_1 - e_1\|_1 < \varepsilon_1$. D'après le lemme, il existe $g_1 \in L_{\mathbb{R}}^1 \backslash L_{\mathbb{R}}^2$ de loi diffuse en dehors de 0 telle que

$$\|g_1 - e_1\|_1 < \varepsilon'_1, \; g_1 f_1 \in L^1, \; E[g_1 f_1] = E[f_1] E[g_1]$$

et deux parties disjointes A_1, B_1 de $[0,1]$ vérifiant $\int_{A_1} f_1^2 \, dP = \int_{B_1} g_1^2 \, dP = \infty$, g_1 est bornée sur A_1 f_1 est bornée sur B_1.

Ensuite il existe $f_2 \in L_{\mathbb{R}}^1 \backslash L_{\mathbb{R}}^2$ diffuse en dehors de 0 vérifiant

$$f_1 f_2, g_1 f_2 \in L_{\mathbb{R}}^1, \; E[f_1 f_2] = E[f_1] E[f_2], \; E[g_1 f_2] = E[g_1] E[f_2], \; \|f_2 - e_2\|_1 < \varepsilon_2.$$

De plus il existe $A, B, C \subseteq [0,1]$ disjoints tels que

$$\int_A f_1^2 \, dP = \int_B g_1^2 \, dP = \int_C f_2^2 \, dP = \infty,$$

f_1 bornée sur $B \cup C$, g_1 bornée sur $A \cup C$, f_2 bornée sur $A \cup B$. Puis il existe $g_2 \in L^1_{\mathbb{R}} \backslash L^2_{\mathbb{R}}$ diffuse en dehors de 0 telle que

$$g_2 g_1, g_2 f_1, g_2 f_2 \in L^1_{\mathbb{R}}, \ E[g_1 g_2] = E[g_1]E[g_2], \ E[g_2 f_i] = E[g_2]E[f_i]$$

pour $i = 1, 2$, $\|g_2 - e_2\|_1 < e'_2$, g_i^2 et f_i^2 étant d'intégrales infinies sur des ensembles disjoints sur lesquels les autres fonctions sont bornées. Et ainsi de suite... □

Je remercie Jean-Paul THOUVENOT de son aide.