NATHALIE EISENBAUM

Une version sans conditionnement du théorème d'isomorphisme de Dynkin

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 29 (1995), p. 266-289
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1995__29__266_0>

UNE VERSION SANS CONDITIONNEMENT DU THEOREME D'ISOMORPHISME DE DYNKIN

Nathalie Eisenbaum

Laboratoire de Probabilités - Université Paris VI - 4, place Jussieu - Tour 56 - 3 ème étage - 75252 Paris Cedex 05

Abstract We establish here an unconditioned version of Dynkin's isomorphism theorem and use it to give short proofs and extensions of known results on local times.

Introduction Considérons un processus de Markov symétrique admettant une fonction de Green finie et un deuxième processus gaussien centré ayant pour covariance cette fonction de Green et indépendant du premier. Le théorème d'isomorphisme de Dynkin [D] est une identité en loi mettant en relation ce processus gaussien avec la famille des temps locaux du processus de Markov conditionné à mourir en un état fixe. Plusieurs auteurs ont utilisé ce théorème pour, entre autres, transférer certaines propriétés du processus gaussien au processus des temps locaux. Ainsi, Marcus et Rosen se sont intéressés au transfert de la propriété de continuité [M-R 1], Eisenbaum [E] et Sheppard [S] à celui de la propriété de Markov.

Nous établissons dans la partie I une version sans conditionnement du théorème d'isomorphisme de Dynkin.Cette version nous permet de donner dans la partie II des preuves rapides des théorèmes de Ray-Knight usuels ([Ra],[K 1]) et de retrouver, dans la partie III , des théorèmes limites dus à Yor [Y 1] pour le cas du mouvement brownien et à Rosen [R] pour les processus stables en général. Dans la partie IV , nous étendons des résultats de Marcus et Rosen [M-R 2] sur les transformées de Laplace des accroissements du temps local.

I - Le théorème d'isomorphisme de Dynkin sans conditionnement

Rappelons le théorème d'isomorphisme de Dynkin [D] tel qu'il a été énoncé par Marcus et Rosen dans [M-R 1].

<u>**Théorème 1.1**</u> : *Soit* $(\ell^i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé* (Ω, Q). *Soit* $\left\{G_\alpha, G_\beta, (G_i)_{i\in\mathbb{N}}\right\}$ *une famille gaussienne centrée, indépendante de* ℓ, *définie sur un espace* Ω' *indépendant de* Ω. *Sur* Ω' *l'espérance est notée* $< >$.

Supposons que : $\forall\ j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}^*$

$$(1)\qquad Q\left[\prod_{i=1}^{n} \ell^{j_i}\right] = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \langle G_\alpha\, G_{j_{\pi(1)}}\rangle \langle G_{j_{\pi(1)}}\, G_{j_{\pi(2)}}\rangle \dots \langle G_{j_{\pi(n)}}\, G_\beta\rangle$$

$\mathcal{S}_n$ *désignant l'ensemble des permutations de* $\{1,2,\dots,n\}$

alors :

$$(2)\qquad Q\left\langle F\left(\ell + \frac{G^2}{2}\right)\right\rangle = \left\langle \frac{G_\alpha\, G_\beta}{\langle G_\alpha\, G_\beta\rangle}\, F\left(\frac{G^2}{2}\right)\right\rangle$$

pour toute fonctionnelle F *mesurable, positive.*

L'exemple suivant est détaillé par Marcus et Rosen dans [M-R 1] p.1635.

<u>Exemple 1.2</u> : Soit X un processus de Markov symétrique à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant une fonction de Green finie $\left(g(x,y)\ ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$. Soit $(G_x,\ x \in \mathbb{R})$ un processus gaussien centré de covariance g. On note $(L^x_\xi,\ x \in \mathbb{R})$ le processus des temps locaux de X pris en son temps de vie ξ. Soit $\tilde{P}_{ab}$ la loi de X démarrant en a et tué au dernier temps de passage en b. Alors les processus L_ξ et G vérifient la relation suivante :

$\forall\ x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\tilde{P}_{ab}\left(\prod_{i=1}^{n} L_\xi^{x_i}\right) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \langle G_a, G_{x_{\pi(1)}}\rangle \langle G_{x_{\pi(1)}}\, G_{x_{\pi(2)}}\rangle \dots \frac{\langle G_{x_{\pi(n)}}, G_b\rangle}{\langle G_a, G_b\rangle}.$$

On deduit du Théorème 1.1 que pour toute fonction F mesurable positive:

$$\tilde{P}_{ab}\left\langle F\left(L_\xi + \frac{G^2}{2}\right)\right\rangle = \left\langle \frac{G_a G_b}{\langle G_a G_b\rangle}\, F\left(\frac{G^2}{2}\right)\right\rangle.$$

Nous proposons maintenant un théorème analogue au Théorème 1.1.

Théorème 1.3 : *Soit* $(\ell^i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réellesdéfinies sur un espace probabilisé* $(\Omega,\ Q)$. *Soit* $\left\{G_\alpha,\ (G_i)_{i\ \in\ \mathbb{N}}\right\}$ *une famille gaussienne centrée, indépendante de* ℓ, *définie sur un espace* Ω' *indépendant de* Ω. *Sur* Ω' *l'espérance est notée* $<\ >$.

Les relations (3) *et* (4) *sont équivalentes :*

$$(3)\quad Q\left[\prod_{i=1}^{n}\ell^{j_i}\right] = \sum_{\pi\ \in\ \mathcal{S}_n} <G_\alpha\, G_{j_{\pi(1)}}> <G_{j_{\pi(1)}}\, G_{j_{\pi(2)}}> \ldots <G_{j_{\pi(n-1)}}\, G_{j_{\pi(n)}}>$$

$\forall\ j_1,\ldots,j_n \in \mathbb{N}^*$

$\mathcal{S}_n$ *désigne l'ensemble des permutations de* $\{1,2,\ldots,n\}$.

$$(4)\qquad Q\ \Big\langle F\left(\ell + \frac{(G+\varepsilon)^2}{2}\right)\Big\rangle = \frac{1}{\varepsilon}\ \Big\langle (G_\alpha + \varepsilon)\ F\left(\frac{(G+\varepsilon)^2}{2}\right)\Big\rangle$$

pour tout ε *de* $\mathbb{R}$ *et toute fonctionnelle mesurable* F.

Ce théorème présente une équivalence entre deux relations. Nous verrons que les arguments employés pour l'établir sont utilisables pour prouver également l'équivalence entre les relations (1) et (2) du Théorème 1.1.

Reprenons l'exemple 1.2. Cette fois, on note P_a la loi de X issu de a. Les processus L_ξ et G vérifient la formule suivante :
$\forall\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in \mathbb{R}$,

$$P_a\left(\prod_{i=1}^{n} L_\xi^{x_i}\right) = \sum_{\pi\ \in\ \mathcal{S}_n} \langle G_a,\ G_{x_{\pi(1)}}\rangle \ldots \langle G_{x_{\pi(n-1)}},\ G_{x_{\pi(n)}}\rangle.$$

Grâce au Théorème 1.3, nous avons :

$$P_a\ \Big\langle F\left(L_\xi + \frac{(G+\varepsilon)^2}{2}\right)\Big\rangle = \frac{1}{\varepsilon}\ \Big\langle (G_a + \varepsilon)\ F\left(\frac{(G+\varepsilon)^2}{2}\right)\Big\rangle \qquad \forall\varepsilon \in \mathbb{R}^*.$$

L'intérêt de cette formule réside en ce qu'elle ne fait pas intervenir de conditionnement sur X. Nous verrons que dans le cadre des parties II, III et IV cela en rend l'utilisation beaucoup plus rapide que celle du théorème d'isomorphisme .

Démonstration du Théorème 1.3 :

Supposons que (3) soit vérifiée, établissons (4). Nous nous inspirons pour cela de la démonstration du Théorème 1.1 proposée par Marcus et Rosen dans [M-R 1].On commence par établir (4) pour des fonctionnelles F du type suivant : $F(Y) = F\left((Y_{x_i})_{1\le i\le n}\right) = \prod_{i=1}^{n} Y_{x_i}$, où Y est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}$,indexé sur $\mathbb{R}$.

$$\frac{1}{\varepsilon} \langle (G_a + \varepsilon)\, F\left(\frac{(G + \varepsilon)^2}{2} \right)\rangle = \frac{1}{\varepsilon \cdot 2^n} \langle \prod_{i=0}^{2n} \left(G_{x_i} + \varepsilon\right)\rangle$$

où l'on a noté : $x_0 = a$ et $(x_i, x_{n+i}) = (x_i, x_i)$ pour $1 \le i \le n$

$$= \frac{1}{\varepsilon \cdot 2^n} \sum_{\substack{H_1 \cup H_2 = \{0,1,..,2n\} \\ H_1 \cap H_2 = \emptyset}} \varepsilon^{|H_1|} \langle \prod_{i\in H_2} G_{x_i} \rangle$$

G étant centré, seuls les termes tels que $|H_2|$ soit pair, sont non nuls

$$= \frac{1}{\varepsilon \cdot 2^n} \sum_{\substack{H_1 \cup H_2 = \{1,..,2n\} \\ H_1 \cap H_2 = \emptyset}} \varepsilon^{|H_1| + 1} \langle \prod_{i\in H_2} G_{x_i} \rangle$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon \cdot 2^n} \sum_{\substack{H_1 \cup H_2 = \{1,..,2n\} \\ H_1 \cap H_2 = \emptyset \\ |H_2| \text{ impair}}} \varepsilon^{|H_1|} \langle \prod_{i\in H_2 \cup \{0\}} G_{x_i} \rangle$$

$$= I + II.$$

On utilise alors un lemme connu sur les processus gaussiens centrés (voir par exemple la démonstration dans [M-R 1]). H désigne un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, de cardinal pair .

Lemme 1.4 : *Soit* $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *un processus gaussien centré .Pour tout* H *sous-ensemble fini de* $\mathbb{N}$*, on a:*

$$\langle \prod_{i\in H} G_i\rangle = \sum_{\substack{D = D_1 \cup\ldots\cup D_{|H|/2} \\ D \in \mathcal{D}(H)}} \prod_{j=1}^{|H|/2} \langle \prod_{i\in D_j} G_i\rangle .$$

$\mathcal{D}$(H) représentant l'ensemble des partitions de H en sous-ensembles à deux éléments.

Grâce au Lemme 1.4 ,

$$\langle \prod_{i\in H_2 \cup \{0\}} G_{x_i}\rangle = \sum_{\substack{D = D_1 \cup\ldots\cup D_{\frac{|H_2 \cup \{0\}|}{2}} \\ D \in \mathcal{D}(H_2 \cup \{0\})}} \prod_{j=1}^{\frac{|H_2 \cup \{0\}|}{2}} \langle \prod_{i\in D_j} G_{x_i}\rangle .$$

A chaque D élément de $\mathcal{D}(H_2 \cup \{0\})$, on peut associer une chaîne partant de 0, de la façon suivante :

- il existe un, et un seul, élément D^1 de D tel que $0 \in D^1$. D^1 est de la forme $\{0, i\}$,
- il existe alors un, et un seul, élément D^2 de D tel que $i+n$ (ou $i-n$) $\in D^2$. $D^2 = \{i\pm n, j\}$
- puis il existe un seul D^3 tel que : $j\pm n \in D^3$. etc...

Cette suite s'arrête à un rang inférieur ou égal à $\dfrac{|H_2 \cup \{0\}|}{2}$.

On note J_1 l'ensemble des éléments de H_2 ne faisant pas partie de cette chaîne issue de 0.

$H_2 \setminus J_1$ est de la forme $\{i, i + n ; i \in C\} \setminus \{k\}$ où C est un sous-ensemble de $\{1,2,\ldots,n\}$ et k un élément de $\{i, i + n ; i \in C\}$. (En fait : $k \in H_1$).

On en déduit que :

$$II = \frac{1}{\varepsilon . 2^n} \sum_{\substack{H_1 \cup H_2 = \{1,\ldots,2n\} \\ H_1 \cap H_2 = \emptyset}} \varepsilon^{|H_1|} \sum_{k\in H_1} \sum_{\substack{\tilde{C} \cup J_1 = H_2 \cup \{k\} \\ \tilde{C} \cap J_1 = \emptyset}} \langle \prod_{i\in J_1} G_{x_i}\rangle \langle G_{x_0} \prod_{\substack{i \in \tilde{C} \\ i \neq k}} G_{x_i}\rangle$$

avec $\tilde{C}$ de la forme $\{i, i + n ; i \in C\}$ tel que $k \in \tilde{C}$ et $J_1 = H_2 \cup \{k\} \setminus \tilde{C}$.

On pose alors : $\tilde{B} = (H_1 \setminus \tilde{C}) \cup J_1$

$$H'_1 = H_1 \setminus \tilde{C} ;$$

$\tilde{B}$ est donc l'union de toutes les paires de la forme $\{i, i + n\}$ de $\{1, 2, \ldots, 2n\} \setminus \tilde{C}$.

Puis, on pose : $B = \tilde{B} \cap \{1, \ldots, n\}$, $C = \tilde{C} \cap \{1, \ldots, n\}$.
On obtient alors :

$$II = \frac{1}{2^n \varepsilon} \sum_{\substack{B \cup C = \{1,\ldots,n\} \\ B \cap C = \emptyset}} \sum_{k \in \tilde{C}} \langle G_{x_0} \prod_{\substack{i \in \tilde{C} \\ i \neq k}} G_{x_i} \rangle \sum_{H'_1 \cup J_1 = \tilde{B}} \varepsilon^{|H'_1|+1} \langle \prod_{i \in J_1} G_{x_i} \rangle$$

Maintenant, on remarque, en utilisant l'hypothèse (3) et le Lemme 1.4, que pour C sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$:

$$Q\left(\prod_{i \in C} \ell^{x_i}\right) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}(|C|)} \langle G_a G_{x_{\pi(1)}} \rangle \langle G_{x_{\pi(1)}} G_{x_{\pi(2)}} \rangle \ldots \langle G_{x_{\pi(|C|-1)}} G_{x_{\pi(|C|)}} \rangle$$

$$= \frac{1}{2^{|C|}} \sum_{k \in \tilde{C}} \langle G_{x_0} \prod_{\substack{i \in \tilde{C} \\ i \neq k}} G_{x_i} \rangle$$

avec $\tilde{C} = \{i, i + n ; i \in C\}$
D'où :

$$II = \frac{1}{2^{|B|}} \sum_{\substack{B \cap C = \emptyset \\ B \cup C = \{1,\ldots,n\} \\ |C| \geq 1}} Q\left(\prod_{i \in C} \ell^{x_i}\right) \langle \prod_{i \in B} (G_{x_i} + \varepsilon)^2 \rangle.$$

Par ailleurs, on constate que :

$$I = \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{H_1 \cup H_2 = \{1,\ldots,2n\} \\ H_1 \cap H_2 = \emptyset}} \varepsilon^{|H_1|} \langle \prod_{i \in H_2} G_{x_i} \rangle = \langle \prod_{i=1}^{n} \frac{\left(G_{x_i} + \varepsilon\right)^2}{2} \rangle.$$

Donc I correspond au terme manquant dans l'expression II, soit : $C = \emptyset$ et $B = \{1, 2, \ldots, n\}$. On en déduit que :

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\langle (G_a+\varepsilon)\, F\left(\frac{(G+\varepsilon)^2}{2}\right)\right\rangle$$

$$= \frac{1}{2^{|B|}} \sum_{\substack{B \cap C = \emptyset \\ B \cup C = \{1,..,n\}}} Q\left(\prod_{i \in C} \ell^{x_i}\right) \left\langle \prod_{i \in B} (G_{x_i}+\varepsilon)^2 \right\rangle$$

$$= Q \left\langle \prod_{i=1}^{n} \left(\ell^{x_i} + \frac{\left(G_{x_i}+\varepsilon\right)^2}{2} \right) \right\rangle .$$

Par des vérifications analogues à celles de Marcus et Rosen dans ([M-R 1] p.1639) on s'assure qu'il suffit de vérifier la relation (4) pour de telles fonctionnelles F .

Supposons maintenant que la relation (4) soit vérifiée; nous établissons à présent la relation (3).
En reprenant le développement de la démonstration précédente,nous savons que :

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\langle (G_a+\varepsilon) \prod_{i=1}^{n} \frac{\left(G_{x_i}+\varepsilon\right)^2}{2} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2^{|C|}} \sum_{\substack{B \cap C = \emptyset \\ B \cup C = \{1,2,...,n\}}} \left\langle \prod_{i \in B} \frac{\left(G_{x_i}+\varepsilon\right)^2}{2} \right\rangle \sum_{k \in \tilde{C}} \left\langle G_{x_0} \prod_{\substack{i \in \tilde{C} \\ i \neq k}} G_{x_i} \right\rangle$$

où : $\tilde{C} = \{i,\ i+n\ ;\ i \in C\}$.
Or, on a :

$$\frac{1}{2^{|C|}} \sum_{k \in \tilde{C}} \left\langle G_{x_0} \prod_{\substack{i \in \tilde{C} \\ i \neq k}} G_{x_i} \right\rangle = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(|C|)} \langle G_a G_{x_{\pi(1)}} \rangle \cdots \langle G_{x_{\pi(|C|-1)}} G_{x_{\pi(|C|)}} \rangle$$

d'où :

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\langle (G_a+\varepsilon)\prod_{i=1}^{n}\frac{\left(G_{x_i}+\varepsilon\right)^2}{2}\right\rangle$$

$$= \sum_{\substack{B\cup C=\{1,2,\dots,n\}\\ B\cap C=\emptyset}} \left\langle \prod_{i\in B}\frac{\left(G_{x_i}+\varepsilon\right)^2}{2}\right\rangle$$

$$\times \sum_{\pi\in\mathcal{S}(|C|)} \langle G_a G_{x_{\pi(1)}}\rangle\langle G_{x_{\pi(1)}} G_{x_{\pi(2)}}\rangle\dots\langle G_{x_{\pi(|C|-1)}} G_{x_{\pi(|C|)}}\rangle.$$

Par ailleurs en utilisant l'hypothèse (4):

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\langle (G_a+\varepsilon)\prod_{i=1}^{n}\frac{\left(G_{x_i}+\varepsilon\right)^2}{2}\right\rangle = Q\left\langle \prod_{i=1}^{n}\left(\ell^{x_i}+\frac{\left(G_{x_i}+\varepsilon\right)^2}{2}\right)\right\rangle$$

$$= \sum_{\substack{B\cup C=\{1,2,\dots,n\}\\ B\cap C=\emptyset}} \left\langle \prod_{i\in B}\frac{\left(G_{x_i}+\varepsilon\right)^2}{2}\right\rangle Q\left\langle \prod_{i\in C}\ell^{x_i}\right\rangle.$$

On en déduit que :

$$(*) \qquad 0 = \sum_{\substack{B\cup C=\{1,2,\dots,n\}\\ B\cap C=\emptyset}} \left\langle \prod_{i\in B}\frac{\left(G_{x_i}+\varepsilon\right)^2}{2}\right\rangle \left\{Q\left(\prod_{i\in C}\ell^{x_i}\right) - \right.$$

$$\left. \sum_{\pi\in\mathcal{S}(|C|)} \langle G_a G_{x_{\pi(1)}}\rangle\dots\langle G_{x_{\pi(|C|-1)}} G_{x_{\pi(|C|)}}\rangle\right\}.$$

Nous allons établir (3) par récurrence :

$$Q(\ell^{x_1}) = \frac{1}{\varepsilon}\left\langle (G_a+\varepsilon)\frac{\left(G_{x_1}+\varepsilon\right)^2}{2}\right\rangle - \left\langle\frac{\left(G_{x_1}+\varepsilon\right)^2}{2}\right\rangle$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\langle G_a G_{x_1}^2\rangle + \frac{\varepsilon}{2}\langle G_a\rangle + \langle G_a G_{x_1}\rangle$$

$$= \langle G_a G_{x_1}\rangle.$$

D'où (3) est vérifiée au rang 1.
Supposons que (3) soit vérifiée au rang (n-1).
Le seul terme non nul dans la sommation intervenant dans l'équation (*) est :

$$Q\left(\prod_{i \in \{1,\dots,n\}} \ell^{x_i}\right) - \sum_{\pi \in \mathcal{S}(n)} \langle G_a G_{x_{\pi(1)}} \rangle \dots \langle G_{x_{\pi(n-1)}} G_{x_{\pi(n)}} \rangle$$

(3) est donc vérifiée en rang n.

Remarque : Soit X un processus de Markov symétrique à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ admettant des densités de transition ($p_t(x,y)$, $t>0$; $(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$), de fonction de Green $g(x,y)$. Dans le cas où l'on a seulement :

$\int_s^{+\infty} p_t(x,x)dt < +\infty$, on peut écrire, en reprenant les définitions de Dynkin [D], une généralisation de la formule (4) du Théorème 1.3 : pour tout ε de $\mathbb{R}^*$, pour toute probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\int \mu(dx)\mu(dy)g(x,y) < +\infty$, on a :

$$P_\mu \langle F\left(L^\lambda + \xi_\lambda + \varepsilon\phi_\lambda \ ; \ \lambda \in \Lambda^2\right)\rangle = \frac{1}{\varepsilon} \langle (\phi_\mu + \varepsilon) \ F\left(\xi_\lambda + \varepsilon\phi_\lambda \ ; \ \lambda \in \Lambda^2\right)\rangle$$

où $\Lambda^2 = \left\{\lambda \text{ mesure positive sur } \mathbb{R}^d : \int \lambda(dx)\ \lambda(dy)\ g^2(x,y) < +\infty\right\}$ et

$$\xi_\lambda = \lim_{s \downarrow 0} \int \lambda(dx) \left\{\phi^2_{\mu(s,x)} - \langle \phi^2 \rangle_{\mu(s,x)}\right\}, \quad \text{avec } \mu(s,x)\ (dy) = p_s(x,y)dy.$$

II - Applications aux Théorèmes de Ray-Knight

Nous retrouvons ici les deux principaux théorèmes de Ray-Knight [Ra] [K 1] comme illustration immédiate du Théorème 1.3.

1) Cas d'un mouvement brownien B tué en son premier temps d'atteinte de zéro.

La fonction de Green d'un tel processus est : $g(x,y) = 2(x \wedge y)$.Soit $(\beta_x, x\geq 0)$ mouvement brownien issu de 0, alors $\sqrt{2}\,\beta$ est un processus gaussien centré de covariance $g(x,y)$. On note $\left(L^x_{T(0)},\ x \in \mathbb{R}^*_+\right)$ le processus des temps locaux du mouvement brownien tué en $T(0) = \inf\{t \geq 0 : B_t = 0\}$.

On a , grâce au Théorème 1.3 : $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$

(1) $$P_a \langle F\left(L_{T(0)} + (\beta + \alpha)^2\right)\rangle = \langle \frac{(\beta_a + \alpha)}{\alpha} F((\beta + \alpha)^2)\rangle.$$

Pour identifier le terme de droite, on commence par montrer que :

$$\langle \frac{(\beta_a + \alpha)}{\alpha} F((\beta + \alpha)^2)\rangle = \langle \frac{|\beta_a + \alpha|}{|\alpha|} 1_{\{\forall x \in (0,a) \ ; \ |\beta_x + \alpha| > 0\}} F((\beta + \alpha)^2)\rangle.$$

Cette propriété peut se démontrer en utilisant la propriété de Markov forte au temps $\tilde{T}(0) = \inf\{s \geq 0 : \alpha + \beta_s = 0\}$. En effet, elle peut se traduire par :

$$\langle (\beta_a + \alpha) \mid |\beta_x + \alpha| \ ; \ 0 \leq x \leq a\rangle = |\beta_a + \alpha| \ 1_{\{\tilde{T}(0) > a\}} \times \operatorname{sgn}(\alpha).$$

C'est aussi une utilisation immédiate de (1) avec pour fonctionnelle F :

$$F(X) = G(X) \times 1_{\{\exists x \in (0,a) \ ; \ X_x = 0\}}$$

où G fonctionnelle positive mesurable. Pour cela, il suffit de remarquer que sous P_a, notre mouvement brownien B tué en T(0), atteint toutes les valeurs de (0,a].

On utilise alors les notations canoniques pour réécrire (1) : $(X_x, x \geq 0)$ est le processus des coordonnées. $\mathbb{Q}_a^d$ désigne la loi d'un carré de processus de Bessel issu de a, de dimension d. ${}^a\mathbb{L}$ désigne la loi de $(L_{T(0)}^x, x \geq 0)$ sous P_a .L'opération de convolution de deux lois est notée $*$. En notant : $\tau(0) = \inf\{x \geq 0 : X_x = 0\}$, (1) se transcrit par:

$${}^a\mathbb{L} * \mathbb{Q}^1_{\alpha^2} = \left(\frac{X_{a \wedge \tau(0)}}{\alpha^2}\right)^{1/2} \mathbb{Q}^1_{\alpha^2}.$$

On utilise alors la relation d'absolue continuité suivante (voir Knight [K 2] p.124 ou Pitman-Yor [P-Y]) :

$$\mathbb{Q}^3_{\alpha^2}\Big|_{\mathcal{F}_a} = \left(\frac{X_{a \wedge \tau(0)}}{\alpha^2}\right)^{1/2} \mathbb{Q}^1_{\alpha^2}\Big|_{\mathcal{F}_a}$$

ainsi que la propriété d'additivité des carrés de Bessel : $\mathbb{Q}^2_0 * \mathbb{Q}^1_{\alpha^2} = \mathbb{Q}^3_{\alpha^2}$

pour obtenir :

$$ {}^{a}\mathbb{L}\Big|_{\mathcal{F}_a} = \mathbb{Q}_0^2\Big|_{\mathcal{F}_a} . $$

Cette identité s'écrit également :

$$ P_a\left(L^x_{T(0)} \ ; \ 0 \le x \le a\right) \overset{(d)}{=} \mathbb{Q}_0^2 \ (X_x \ ; \ 0 \le x \le a) \ . $$

2) Cas d'un mouvement brownien tué en l'inverse de son temps local en zéro.

Soit $(L^x_t \ , \ x \in \mathbb{R}, \ t \ge 0)$ la famille de temps locaux d'un mouvement brownien B issu de zéro .On note : $\tau_t = \inf \{s \ge 0 \ : \ L^0_s > t\}$.On considère alors le processus B tué en τ_t. La fonction de Green de ce processus est :

$$ g(x,y) = \begin{cases} 2(|x| \wedge |y|) + t & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont de même signe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} $$

Soit $(\beta_x, \ x \ge 0)$ un mouvement brownien issu de 0, indépendant de B, alors

$\left(\sqrt{2}\ \beta_{x+\frac{t}{2}} \ ; \ x \ge 0\right)$ est un processus gaussien centré de covariance

$(g(x,y)), (x,y)\in\mathbb{R}_+^2)$. On a pour tout $\alpha > 0$:

$$ (2) \quad P_0\langle F\left(L^x_{\tau_t} + (\beta_{x+t/2} + \alpha)^2 \ ; \ x \ge 0\right)\rangle = \langle\frac{(\beta_{t/2} + \alpha)}{\alpha} F\left((\beta_{x+t/2} + \alpha)^2 \ ; \ x \ge 0\right)\rangle. $$

Cette fois, l'identification du terme de droite est immédiate :

$$ \langle\frac{(\beta_{t/2} + \alpha)}{\alpha} F((\beta_{\cdot+t/2} + \alpha)^2)\rangle = \mathbb{Q}^1_\mu(F) $$

où μ est la loi de $(\beta_{t/2} + 2)^2$ sous $\langle\frac{\beta_{t/2} + \alpha}{\alpha} \ , \ \cdot \ \rangle$.
En fait, grâce à (2), on sait aussi que : $\mu = \delta_t * \nu$, où ν est la loi de $(\beta_{t/2} + \alpha)^2$.

En utilisant la propriété d'additivité des carrés de Bessel, on obtient :

$$P_0\left(L^x_{\tau_t}\ ;\ x \geq 0\right) \overset{(d)}{=} Q^0_t\ (X_x\ ;\ x \geq 0).$$

Remarquons que l'indépendance des processus $(L^x_{\tau_t},\ x \geq 0)$ et $((L^{-x}_{\tau_t},\ x \geq 0)$ se lit également dans la formule (2).

III - Application aux théorèmes limites des temps locaux des processus stables.

Pour tout γ de $(0,1]$, il existe un processus $(B^{(\gamma)}_t(x),\ x\in\mathbb{R}\ ;\ t\geq 0)$ gaussien centré continu de covariance :

$$E\left(B^{(\gamma)}_s(x).B^{(\gamma)}_t(y)\right) = (s\wedge t).\Gamma^{(\gamma)}(x,y)$$

où $\Gamma^{(\gamma)}(x,y) = \frac{1}{2}\ (|x|^{\gamma}+ |y|^{\gamma} - |x-y|^{\gamma})$ (voir [Y 2]).

Nous appellerons un tel processus un drap brownien fractionnaire d'indice γ . Soit $(L^x_t,\ x \in R\ ;\ t \geq 0)$ le processus des temps locaux d'un processus stable X, issu de 0, à valeurs réelles, symétrique d'indice $\beta > 1$. Soit $(p_t(x),x\in\mathbb{R};t\geq 0)$ les densités de transition de X. On pose :

$$c_\beta = \int_0^{+\infty} (p_t(0) - p_t(1))dt$$

Dans le cas où β=2, c'est à dire le cas d'un mouvement brownien, Yor [Y 1] a établi le résultat suivant :

$$\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\left(L^{\varepsilon x}_t - L^0_t\right)\ ;\ x \in \mathbb{R};\ t\geq 0\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{(d)} \left(\sqrt{c_\beta}\ \ B^{(1)}_{2L^0_t}\ (x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\ ;\ t\geq 0\right)$$

avec $(B^{(1)}_t(x),x\in\mathbb{R}\ ;\ t\geq 0)$ indépendant de X.

Rosen [R] a ensuite prouvé ce résultat pour $1<\beta<2$ mais en établissant l'indépendance de $(B^{(\beta-1)}_t(x),\ x\in\mathbb{R}\ ;\ t\geq 0)$ par rapport à L^0_t seulement. De plus , il a directement prouvé pour certains temps d'arrêt T de X , notamment pour un temps exponentiel indépendant, que :

$$(1)\qquad \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\left(L^{\varepsilon x}_T - L^0_T\right)\ ;\ x \in \mathbb{R}\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{(d)} \left(\sqrt{c_\beta}\ B^{(\beta-1)}_{2L^0_T}\ (x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\right)$$

avec $(B^{(\beta-1)}_t(x),x\in\mathbb{R}\ ;\ t\geq 0)$ indépendant de L^0_T .

Nous présentons ici une extension de leurs théorèmes consistant à introduire un paramètre supplémentaire. Notre démonstration utilise le Théorème 1.3. Par souci de clarté , nous considerons le paramètre β fixé et omettons de le faire apparaitre dans l'écriture de $B^{(\beta-1)}$. Par ailleurs, nous marquerons la dépendance de $B^{(\beta-1)}$ en un paramétre y , en le notant : $B^{[y]}$.

Théorème 3.1 : *Pour* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *n réels distincts, on a:*

$$\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\left(L_t^{\varepsilon x+y_i} - L_t^{y_i}\right) \; ; x\in\mathbb{R}; 1\le i\le n; t\ge 0\right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{(d)} \left(\sqrt{c_\beta}\, B^{[y_i]}_{2L_t^{y_i}}(x) \; ; \; x\in\mathbb{R}; 1\le i\le n; t\ge 0\right)$$

où $\{ B_t^{[y_i]}(x), x\in\mathbb{R}; 1\le i\le n; t\ge 0 \}$ *est un système gaussien indépendant de X, composé de draps browniens fractionnaires d'indice* $(\beta-1)$ *tous indépendants.*

Remarque : Le résultat de convergence fini-dimensionnelle en y du Théorème 3.1, ne peut être étendu à une convergence en loi. Une des façons de s'en rendre compte consiste à supposer que l'on ait pour t>0 et x réel fixé :

$$\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\left(L_t^{\varepsilon x+y} - L_t^{y}\right) \; ; y\in\mathbb{R}\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{(d)} \left(\sqrt{c_\beta}\, B^{[y]}_{2L_t^{y}}(x) \; ; y\in\mathbb{R}\right)$$

et à constater que le processus de droite ne peut être mesurable.Pour cela , on se ramène au cas d'un processus $(Z_y, y\in\mathbb{R})$ mesurable, borné dans L^1 sur tout compact et tel que les variables Z_y soient toutes indépendantes . On a :

$\mathrm{var}\left(n \int_x^{x+1/n} Z_y dy\right) = 0$, donc pour tout n>0 ,$n \int_x^{x+1/n} Z_y dy$ est une variable constante. Par ailleurs $\left(n \int_x^{x+1/n} Z_y dy;\ n>0\right)$ tend vers Z_x p.s. quand n tend vers l'infini. Z est donc un processus déterministe.

Démonstration :

1) Soit T un temps exponentiel de paramètre λ , indépendant de X. On pose : $\mathbb{A} = \{y_1, y_2, \dots y_n\}$ .Nous commençons par établir à l'aide du Théorème 1.3 , le résultat suivant :

$$\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\left(L_T^{\varepsilon x+y}-L_T^y\right.\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{A}\right)\right)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{(d)}\left(\sqrt{c_\beta}\,B^{[y]}_{2L_T^y}(x)\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{A}\right).$$

La fonction de Green de X tué en T est :

$$u^\lambda(x,z)=u^\lambda(|x-z|)=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\,p_t(x-z)dt$$

Soit ϕ le processus gaussien centré de covariance $u^\lambda(x,z)$. Grâce au Théorème 1.3, nous avons pour tout $\alpha>0$:

$$P_0\left\langle F\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\left(L_T^{\varepsilon x+y}-L_T^y\right)+\frac{\tilde\phi^2_{\varepsilon x+y}-\tilde\phi^2_y}{2\,\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\right\rangle$$

$$=\left\langle\frac{\tilde\phi_0}{\alpha}\,F\left(\frac{\tilde\phi^2_{\varepsilon x+y}-\tilde\phi^2_y}{2\,\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\right\rangle$$

où $\tilde\phi=\phi+\alpha$.

On remarque que : $$\frac{\tilde\phi^2_{\varepsilon x+y}-\tilde\phi^2_y}{2\,\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}=\left(\frac{\phi_{\varepsilon x+y}-\phi_y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\right)\cdot\left(\frac{\phi_{\varepsilon x+y}+\phi_y+2\alpha}{2}\right).$$

On a les convergences suivantes :

(a) $$\left\langle\left(\frac{\phi_{\varepsilon x+y}-\phi_y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\right)\left(\frac{\phi_{\varepsilon z+y}-\phi_y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\right)\right\rangle\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}c_\beta\,\Gamma^{(\beta-1)}(x,z)$$

(b) $$\left\langle\left(\frac{\phi_{\varepsilon x+y}-\phi_y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\right)\phi_z\right\rangle\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$$

(c) $$\left\langle\left(\frac{\phi_{\varepsilon x+y}-\phi_y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\right)\left(\frac{\phi_{\varepsilon x'+y'}-\phi_{y'}}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\right)\right\rangle\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$$

En effet :

(a) $$\left\langle\left(\frac{\phi_{\varepsilon x+y}-\phi_y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\right)\left(\frac{\phi_{\varepsilon z+y}-\phi_y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\right)\right\rangle=\frac{1}{\varepsilon^{\beta-1}}\{u^\lambda(\varepsilon x-\varepsilon z)-u^\lambda(\varepsilon x)-u^\lambda(\varepsilon z)+u^\lambda(0)\}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^{\beta-1}}\{\,(u^\lambda(\varepsilon x-\varepsilon z)-u^\lambda(0))-(u^\lambda(\varepsilon x)-u^\lambda(0))-(u^\lambda(\varepsilon z)-u^\lambda(0))\,\}$$

On calcule : $\frac{1}{\varepsilon^{\beta-1}}(u^{\lambda}(0) - u^{\lambda}(\varepsilon x))$.

Grâce aux propriétés de scaling de X, on a :

$$\left.\begin{aligned} p_t(x) &= \frac{1}{|x|}\, p_{t/|x|^{\beta}}(1) \\ p_t(0) &= \frac{1}{|x|}\, p_{t/|x|^{\beta}}(0) \end{aligned}\right. \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ \forall\, t > 0 .$$

$$\frac{1}{\varepsilon^{\beta-1}}(u^{\lambda}(0) - u^{\lambda}(\varepsilon x)) = \frac{1}{\varepsilon^{\beta}}\frac{1}{|x|}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\left(p_{t/|\varepsilon x|^{\beta}}(0) - p_{t/|\varepsilon x|^{\beta}}(1)\right)dt$$

$$= |x|^{\beta-1}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t|\varepsilon x|^{\beta}}(p_t(0) - p_t(1))dt.$$

On obtient : $\frac{1}{\varepsilon^{\beta-1}}(u^{\lambda}(0) - u^{\lambda}(\varepsilon x)) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} c_{\beta}\, |x|^{\beta-1}$.

(b) Pour x et y fixés, on calcule : $\frac{1}{\varepsilon^{\beta-1}}(u^{\lambda}(y) - u^{\lambda}(\varepsilon x+y))$

$$\frac{1}{\varepsilon^{\beta-1}}(u^{\lambda}(y) - u^{\lambda}(\varepsilon x+y)) = \frac{1}{\varepsilon^{\beta-1}}(u^{\lambda}(y) - u^{\lambda}(0)) + \frac{1}{\varepsilon^{\beta-1}}(u^{\lambda}(0) - u^{\lambda}(\varepsilon x+y))$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon^{\beta-1}}\left(|\varepsilon x+y|^{\beta-1} e^{-\lambda t|\varepsilon x+y|^{\beta}} - |y|^{\beta-1}e^{-\lambda t|y|^{\beta}}\right)(p_t(0) - p_t(1))dt .$$

On suppose $y > 0$. Pour ε suffisamment petit : $|\varepsilon x+y| = \varepsilon x+y$

$$\frac{1}{\varepsilon^{\beta-1}}\left((\varepsilon x+y)^{\beta-1} e^{-\lambda t(\varepsilon x+y)^{\beta}} - y^{\beta-1} e^{-\lambda t y^{\beta}}\right)$$

$$= y^{\beta-2} e^{-\lambda t y^{\beta}}\left(\beta-1 - \lambda t\beta y^{\beta} + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) \times \varepsilon^{2-\beta}.$$

On obtient le lemme suivant :

<u>Lemme 3.2</u> : *Pour* $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}^*$

- *si* $\beta < 2$ $\quad \frac{u^{\lambda}(y)-u^{\lambda}(\varepsilon x+y)}{\varepsilon^{\beta-1}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

- *si* $\beta = 2$ $\quad \frac{u^{\lambda}(y)-u^{\lambda}(\varepsilon x+y)}{\varepsilon^{\beta-1}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} x\ \mathrm{sgn}(y)\ f_{\lambda}(y^2)$

$$\text{avec} \quad f_\lambda(y^2) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t y^2}(1-2\lambda t y^2)(p_t(0) - p_t(1))dt \ .$$

Au vu du lemme 3.2, (b) est immédiat .

$$(c) \quad < \left(\frac{\phi_{\varepsilon x+y} - \phi_y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\right) \left(\frac{\phi_{\varepsilon x'+y'} - \phi_{y'}}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\right) >$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^{\beta-1}} \{u^\lambda(\varepsilon(x-x') + y-y') - u^\lambda(\varepsilon x'+y'-y)) - u^\lambda(\varepsilon x+y-y')) + u^\lambda(y-y')\}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^{\beta-1}} \{u^\lambda(\varepsilon(x-x') + y-y') - u^\lambda(y-y')) + (u^\lambda(y-y') - u^\lambda(\varepsilon x'+y'-y))$$

$$+ (u^\lambda(y-y') - u^\lambda(\varepsilon x+y-y'))\}$$

Dans tous les cas, grâce au lemme 3.2, la limite de cette somme quand ε tend vers zéro, est nulle.

Grace à (a), (b), et (c) on a obtient la convergence en loi suivante :

$$\left(\left(\frac{\phi_{\varepsilon x+y} - \phi_y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}} \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{A}\right), \ \left(\frac{\phi_{\varepsilon x+y} + \phi_y + 2\alpha}{2} \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{A}\right), \ (\phi_x ; \ x \in \mathbb{R})\right)$$

$$\Big\downarrow (d) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0$$

$$\left(\left(\sqrt{c_\beta}\ B_1^{[y]}(x), \ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{A}\right), \ (\tilde{\phi}_y ; \ y \in \mathbb{A}) \ , \ (\phi_x ; \ x \in \mathbb{R})\right)$$

où pour tout y, $B^{[y]}$ est un drap brownien fractionnaire d'indice β-1.

Les processus $B^{[y]}$,y variant dans $\mathbb{A}$, étant tous indépendant entre eux et indépendant de ϕ.

En particulier, on a :

$$\left(\frac{\tilde{\phi}^2_{\varepsilon x+y} - \tilde{\phi}^2_y}{2\,\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}} \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{A}\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{(d)} \left(\sqrt{c_\beta}\ B^{[y]}_{\tilde{\phi}^2_y}(x) \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{A}\right)$$

Ce résultat reste vrai sous la mesure $\langle \frac{\tilde{\phi}_0}{\alpha} \ , \ \cdot \ \rangle$.

Il s'agit maintenant de trouver un processus aléatoire Y indépendant de $\tilde{\phi}^2$ et tel que :

$$Y + \tilde{\phi}^2 \overset{(d)}{=} \tilde{\phi}^2 \quad \text{sous} \quad \langle \frac{\tilde{\phi}_0}{\alpha}, \cdot \rangle.$$

La solution est donnée par le Théorème 1.3 ; on a :

$$2L_T^y + \tilde{\phi}_y^2 \overset{(d)}{=} \tilde{\phi}_y^2 \quad \text{sous} \quad \langle \frac{\tilde{\phi}_0}{\alpha}, \cdot \rangle$$

On a donc :

$$\bar{B}^{[y]}_{2L_T^y} + B^{[y]}_{\tilde{\phi}_y^2} \overset{(d)}{=} B^{[y]}_{\tilde{\phi}_y^2} \quad \text{sous} \quad \langle \frac{\tilde{\phi}_0}{\alpha}, \cdot \rangle$$

où $(\bar{B}^{[y]};y\in\mathbb{A})$ est une copie indépendante de $(B^{[y]};y\in\mathbb{A})$, et indépendante de L_T.

D'où :

$$\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\left(L_T^{\varepsilon x+y} - L_T^y \quad ; \ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{A}\right)\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{(d)} \left(\sqrt{c_\beta}\, B^{[y]}_{2L_T^y}(x) \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{A}\right).$$

Remarquons que $(B^{[y]};y\in\mathbb{A})$ étant indépendante de L_T, elle est indépendante de $T = \int_{\mathbb{R}} L_T^x\, dx$. On en déduit que pour presque tout $t>0$, on a :

$$\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\left(L_t^{\varepsilon x+y} - L_t^y \quad ; \ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{A}\right)\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{(d)} \left(\sqrt{c_\beta}\, B^{[y]}_{2L_t^y}(x) \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{A}\right)$$

avec $(B^{[y]};y\in\mathbb{A})$ indépendante de L_t.

Par scaling, ce résultat s'étend à tout $t>0$.

2) Montrons que :

$$\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\left(L_t^{\varepsilon x+y} - L_t^y \quad ;(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{A};t>0\right)\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{(d)} \left(\sqrt{c_\beta}\, B^{[y]}_{2L_t^y}(x) \ ;(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{A};t>0\right)$$

avec B indépendant de L .

Nous commençons par montrer la convergence fini-dimensionnelle en t.

Soient $t,s > 0$ et $y_1,y_2,\dots,y_n$ n réels distincts fixés. On considère F_1 et F_2 fonctionnelles bornées sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telles que pour $i = 1,2$:

$F_i(X) = \exp\left(- \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} X_{x,y_k}\, d\mu_{i_k}(x,y_k)\right)$ où pour tout k ,μ_{i_k} est une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}^2$.

$$E_o\left(F_1\left(\frac{L_t^{\varepsilon x+y}-L_t^y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ F_2\left(\frac{L_{t+s}^{\varepsilon x+y}-L_{t+s}^y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\right)$$

$$= E_o\left(F_1F_2\left(\frac{L_t^{\varepsilon x+y}-L_t^y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ F_2\left(\frac{L_s^{\varepsilon x+y}-L_s^y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ o\ \theta_t\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} P_o(X_t\in da)\ E_o\left(F_1F_2\left(\frac{L_t^{\varepsilon x+y}-L_t^y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\Big|X_t=a\right)$$

$$E_a\left(F_2\left(\frac{L_s^{\varepsilon x+y}-L_s^y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\right).$$

Pour tout $a\in\mathbb{R}$, on a :

$$E_a\left(F_2\left(\frac{L_s^{\varepsilon x+y}-L_s^y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\right)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} E_a\left(F_1F_2\left(\sqrt{c_\beta}\ B^{[y]}_{2L_s^y}(x)\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\right)$$

et

$$E_o\left(F_1F_2\left(\frac{L_t^{\varepsilon x+y}-L_t^y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\Big|X_t=a\right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} E_o\left(F_1F_2\left(\sqrt{c_\beta}\ B^{[y]}_{2L_t^y}(x)\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\Big|X_t=a\right)$$

En utilisant le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient :

$$E_o\left(F_1\left(\frac{L_t^{\varepsilon x+y}-L_t^y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ F_2\left(\frac{L_{t+s}^{\varepsilon x+y}-L_{t+s}^y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}};\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\right)$$

$$\Big\downarrow\ \varepsilon\to 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} P_o(X_t\in da)\ E_o\left(F_1F_2\left(\sqrt{c_\beta}\ B^{[y]}_{2L_t^y}\ ,\ y\in\mathbb{R}\right)\Big|X_t=a\right).E_a\left(F_2\left(\sqrt{c_\beta}\ \overline{B}^{[y]}_{2L_t^y}\ ,\ y\in\mathbb{R}\right)\right)$$

(où $\bar{B}$ est une copie indépendante de B, indépendante de X)
La limite ci-dessus s'écrit aussi :

$$E_0\left[F_1\left(\sqrt{c_\beta}\, B^{[y]}_{2L^y_t},\ y \in \mathbb{R}\right) F_2\left(\sqrt{c_\beta}\left(B^{[y]}_{2L^y_t} + \bar{B}^{[y]}_{2L^y_s o\theta_t}\ ;\ y \in \mathbb{R}\right)\right)\right]$$

et est donc égale à : $E_0\left[F_1\left(\sqrt{c_\beta}\, B^{[y]}_{2L^y_t},\ y \in \mathbb{R}\right) F_2\left(\sqrt{c_\beta}\, B^{[y]}_{2L^y_{t+s}}\ ;\ y \in \mathbb{R}\right)\right]$

avec $(B^{[y]}_t,\ y\in\mathbb{R}; t>0)$ indépendant de (L_t, L_{t+s}).
On étend aisément la démonstration à une suite finie de temps $(t_i)_{1\le i\le n}$.

Il reste à prouver que pour tout y, la famille $\left(\dfrac{L^{\varepsilon x+y}_t - L^y_t}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\ ;\ x\in\mathbb{R}\ ,\ t>0\right)$

est tendue. On utilise pour cela, les lemmes 1 et 2 établis par Rosen dans [R], pour obtenir immédiatement :

$$(*) \qquad E_0(L^x_t - L^y_t)^{2k} \le c_k\, |x-y|^{k(\beta-1)}\, t^{k(1-\frac{1}{\beta})}$$
$$\forall x,y \in \mathbb{R}\ ,\ \forall t > 0,\ \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Pour (x,t) et $(x',t+s)$ dans un compact de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, on a :

$$E_0\left[\left(L^{\varepsilon x+y}_{t+s} - L^y_{t+s}\right) - \left(L^{\varepsilon x'+y}_t - L^y_t\right)\right]^{2k}$$

$$\le cE_0\left[\left(L^{\varepsilon x+y}_{t+s} - L^{\varepsilon x'+y}_{t+s}\right)^{2k} + cE_0\left[\left(L^{\varepsilon x'+y}_s - L^y_s\right) o\ \theta_t\right]^{2k}\right.$$

$$\le c\, \varepsilon^{k(\beta-1)} \left\{|x-x'|^{k(\beta-1)} + s^{k(1-\frac{1}{\beta})}\right\} \qquad \text{grâce à } (*)$$

C'est une condition suffisante pour affirmer que la famille des lois de probabilité de $\left(\dfrac{L^{\varepsilon x+y}_t - L^y_t}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\ ;\ x\in\mathbb{R}\ ,\ t>0\right)$ est faiblement relativement compacte (voir par exemple [R-Y] p.492).

Sachant que B est indépendante de $(L^x_t; x\in\mathbb{R}; t>0)$, B est également indépendante de $\left(\int_{\mathbb{R}} x\, L^x_t\, dx\ ;\ t>0\right)$ et de $\left(\int_0^{+\infty} g(t)dt \int_{\mathbb{R}} x\, L^x_t\, dx\ ;\ g\in\mathcal{C}\right)$. Pour toute fonction g continue à support compact, on a :

$$\int_0^{+\infty} g(t)dt \int_{\mathbb{R}} x\, L_t^x\, dx = \int_0^{+\infty} X_s ds \int_s^{+\infty} g(t)dt.$$

D'où B est indépendante de $\left(\int_0^{+\infty} G(s)X_s ds\ ;\ G\in\mathcal{C}^1\right.$ et G à support compact).

On en déduit que B est indépendante de X.

IV - Loi d'un accroissement du temps local d'un processus de Markov symétrique.

Marcus et Rosen donnent dans [M-R 2] une version sans conditionnement du théorème d'isomorphisme de Dynkin, valable uniquement pour un processus de Markov tué en un temps exponentiel indépendant. Cette version leur permet de calculer la transformée de Laplace d'un accroissement du temps local en un temps exponentiel indépendant. Grâce au Théorème 1.3 , nous étendons leur résultat à tout temps terminal T ainsi qu'au dernier instant d'atteinte de zéro avant T .

On reprend les notations de l'exemple 1.2. De plus , on pose:

$g_\xi = \sup\{t<\xi\ :\ X_t=0\}$ et $\ell^x = L_\xi^x - L_{g_\xi}^x$. ℓ représente donc le processus des temps locaux accumulés au cours de la dernière excursion à partir de 0. Pour x et y fixés dans $\mathbb{R}^2$, on notera :

$$\begin{cases} a^2 = g(x,x) + g(y,y) - 2g(x,y) \\ b^2 = g(x,x) + g(y,y) + 2g(x,y) \\ c\ = (g(0,x) - g(0,y))b^2 + (g(0,x) + g(0,y))a^2 \end{cases}$$

Théorème 4.1 :

(1) *Les processus* $(\ell^x,\ x\in\mathbb{R})$ *et* $(L_{g_\xi}^x\ ,\ x\in\mathbb{R})$ *sont indépendants.*

(2) *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$:

$$E_0\left[e^{\theta L_\xi^x}\right] = \left(1 - \frac{g(0,x)}{g(x,x)}\right) + \frac{g(0,x)}{g(x,x)}\left(\frac{1}{1-\theta g(x,x)}\right)$$

$$E_0\left[e^{\theta L^x_{g_\xi}}\right] = \left(1 - \frac{g^2(0,x)}{g(x,x)\,g(0,0)}\right) + \frac{g^2(0,x)}{g(0,0)\,g(x,x)}\left(\frac{1}{1-\theta g(x,x)}\right).$$

D'où : $$E\left[e^{\theta \ell^x}\right] = \frac{1 + (g(x,x) - g(0,x))\theta}{1 + \left(g(x,x) - \frac{g^2(0,x)}{g(0,0)}\right)\theta}.$$

(3) *Pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$E_0\left[e^{\theta(L^x_\xi - L^y_\xi)}\right] = 1 + \frac{\theta\left(g(0,x)-g(0,y) + \frac{\theta a^2}{2}(g(0,x)+g(0,y)\right)}{1 - \frac{\theta^2a^2b^2}{4}}$$

$$E_0\left[e^{\theta(L^x_{g_\xi} - L^y_{g_\xi})}\right] = 1 + \frac{\frac{\theta}{2}\left(g^2(0,x)-g^2(0,y) + \frac{\theta}{2}c\right)}{\left(1 - \frac{\theta^2a^2b^2}{4}\right)g(0,0)}.$$

D'où : $$E\left[e^{\theta(\ell^x-\ell^y)}\right] = \frac{1 + (g(0,x)-g(0,y))\theta + \frac{\theta^2a^2}{2}\left((g(0,x)+g(0,y)) - \frac{b^2}{2}\right)}{1 + \left(\frac{g^2(0,x)-g^2(0,y)}{2g(0,0)}\right)\theta + \frac{\theta^2}{4g(0,0)}(c - a^2b^2)}.$$

Démonstration :

(1) C'est le résultat d'une utilisation simple des formules clés de la théorie des excursions. Soit $H_t = \int_{\mathbb{R}} L^x_t\, f(x)dx$; pour f fonction mesurable bornée positive. M désigne l'ensemble des extrémités gauches des excursions de X autour de 0, R le temps de vie de l'excursion et ${}^*P^0$ la mesure des excursions de X autour de 0.

$$E_0\left[e^{i\lambda H_{g_\xi} + i\mu(H_\xi - H_{g_\xi})}\right] = E_0\left[\sum_{s\in M} e^{i\lambda H_s} e^{i\mu H_R\circ\theta_s} 1_{(R\circ\theta_s = \infty)}\right]$$

$$= E_0\left[\int_0^\infty e^{i\lambda H_s}\, {}^*P^0\left(e^{i\mu H_R} 1_{(R=\infty)}\right) dL^0_s\right]$$

$$= {}^*P^0\left(e^{i\mu H_R} 1_{(R=\infty)}\right) \times E_0\left(\int_0^\infty e^{i\lambda H_s}\, dL^0_s\right).$$

(2) $$E_0\left[e^{\theta L_\xi^x}\right] = P_0(L_\xi^x = 0) + E_0\left(e^{\theta L_\xi^x} \mid L_\xi^x > 0\right) P_0(L_\xi^x > 0)$$

$$P_0(L_\xi^x > 0) = \frac{g(0,x)}{g(x,x)} \qquad ; \ E_0(L_\xi^x) = g(0,x)$$

On sait que conditionnellement à $L_\xi^x > 0$, L_ξ^x suit une loi exponentielle.

D'où : $$E_0\left[e^{\theta L_\xi^x}\right] = \left(1 - \frac{g(0,x)}{g(x,x)}\right) + \frac{g(0,x)}{g(x,x)} \left(\frac{1}{1 - \theta g(x,x)}\right).$$

Le raisonnement précédent n'est plus utilisable sous $\tilde{P}_{0,0}$, la loi de X n'étant plus homogène. Mais on remarque que :

$$\tilde{P}_{0,0}\left(e^{\theta L_\xi^x}\right) = E_0\left(e^{\theta L_{g_\xi}^x}\right).$$

On utilise donc le théorème d'isomorphisme :

$$\tilde{P}_{0,0}\left(e^{\theta L_\xi^x}\right) \times \langle e^{\theta \frac{G_x^2}{2}} \rangle = \frac{1}{\langle G_0^2 \rangle} \langle G_0^2 \, e^{\theta \frac{G_x^2}{2}} \rangle$$

Pour calculer le membre de droite dans l'équation ci-dessus, il suffit alors de définir ρ variable gaussienne centrée indépendante de G_x , en posant : $$G_0 = \frac{\langle G_0, G_x \rangle}{\langle G_x^2 \rangle} G_x + \rho .$$

On obtient $E\left(e^{\theta \ell^x}\right)$ en remarquant que : $L_\xi^x = L_{g_\xi}^x + \ell^x$, et en utilisant (1)

(3) On pose $\tilde{G} = G + \varepsilon$. En utilisant le Théorème 1.3, on a :

$$E_0\left(e^{\theta (L_\xi^x - L_\xi^y)}\right) = \frac{\langle (G_0+\varepsilon) \, e^{\frac{\theta}{2}(\tilde{G}_x^2 - \tilde{G}_y^2)} \rangle}{\varepsilon \langle e^{\frac{\theta}{2}(\tilde{G}_x^2 - \tilde{G}_y^2)} \rangle}$$

On remarque que : $\tilde{G}_x^2 - \tilde{G}_y^2 = \left(\tilde{G}_x - \tilde{G}_y\right) \left(\tilde{G}_x - \tilde{G}_y\right) = \phi \, (\psi + 2\varepsilon).$

ϕ et ψ sont deux gaussiennes centrées indépendantes.

On pose : Var $\phi = a^2 = g(x,x) + g(y,y) - 2g(x,y)$

Var $\psi = b^2 = g(x,x) + g(y,y) + 2g(x,y)$.

On calcule facilement : $\dfrac{\langle (G_0+\varepsilon)\, e^{\frac{\theta}{2}\phi(\psi+2\varepsilon)} \rangle}{\varepsilon\, \langle e^{\frac{\theta}{2}\phi(\psi+2\varepsilon)} \rangle}$,

en posant : $G_0 = \dfrac{\langle G_0\, \phi\rangle}{\langle \phi^2\rangle}\, \phi + \dfrac{\langle G_0\, \psi\rangle}{\langle \psi^2\rangle}\, \psi + \rho$

avec ρ gaussienne centrée indépendante de (ϕ,ψ).
De même, par des calculs élémentaires , on obtient la loi de $(L^x_{g_\xi} - L^y_{g_\xi})$

à partir de : $\tilde{P}_{0,0}\left(e^{\theta(L^x_\xi - L^y_\xi)}\right) = \dfrac{\langle (G_0^2\, e^{\frac{\theta}{2}(G_x^2-G_y^2)} \rangle}{\langle e^{\frac{\theta}{2}(G_x^2-G_y^2)} \rangle \langle G_0^2 \rangle}$.

(1) nous donne le dernier résultat.

Remerciements L'idée d'établir les théorèmes limites sur les processus stables à partir du théorème d'isomorphisme revient à Jay Rosen . Je le remercie pour nos nombreuses discussions lors de mon séjour au Technion.

REFERENCES

[D] **E.B. Dynkin** : Local times and quantum fields. *Sem. on Stoch. Processes, Birkhauser eds. P. Huber and M. Rosenblatt (69-89) 1983.*

[E] **N. Eisenbaum** : Dynkin's isomorphism theorem and the Ray-Knight theorems. *Probab.Theory Relat.Fields 99,321-335 (1994).*

[K 1] **F.B. Knight** : Random walks and a sofourn density process of Brownian motions.*Trans. Amer. Math. Soc.,109 (56-86) 1963.*

[K 2] **F.B. Knight** : Essentials of Brownian motion and diffusion. *Mathematical Surveys 18 Amer.Math.Soc.Providence,1981.*

[M-R 1] **M.B. Marcus** and **J. Rosen** : Sample path properties of the local times of strongly symmetric Markov processes via Gaussian processes. *Annals of Proba.,V.20,n°4,(1603-16684),1992.*

[M-R 2] **M.B. Marcus** and **J.Rosen** : Moment generating functions for local times of strongly symmetric Markov processes and random walks. *Proceedings of the conference Probability in Banach Spaces,8. Birkhauser.1992.*

[P-Y] **J. Pitman** and **M. Yor** : Bessel processes and infinitely divisible laws.*In "Stochastic Integrals" D. Williams ed. LNM 851. Springer.1981.*

[Ra] **D.B. Ray** : Sojourn times of a diffusion process.*Ill. J. Maths., 77 (615-630) 1963.*

[R] **J. Rosen** : Second order limit laws for the local times of stable processes. *Sém. de Probabilités XXV.LNM 1485 (407-425).Springer.1991*

[R-Y] **D. Revuz** and **M. Yor** : Continuous martingales and Brownian motion. *Springer-Verlag.1991.Second edition 1994.*

[S] **P. Sheppard** : On the Ray-Knight property of local times. *J. London Math. Soc. 31,(377-384),1985.*

[Y 1] **M. Yor** : Le drap brownien comme limite en loi des temps locaux d'un mouvement brownien linéaire.*Sém. de Probabilités XVII. LNM 986 (89-105).Springer. 1983.*

[Y 2] **M. Yor** : Remarques sur certaines constructions des mouvements browniens fractionnaires.*Sém. de Probabilités XXII.LNM 1321 (217-225).Springer.1988.*