Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Paul-André Meyer

Sur une transformation du mouvement brownien due à Jeulin et Yor

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 28 (1994), p. 98-101

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1994__28__98_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur une transformation du mouvement brownien due à Jeulin et Yor

(exposé de P.A. Meyer)

Mon point de départ sera le résultat suivant de Jeulin et Yor, très simple mais toujours étonnant. Soit (B_t) un mouvement brownien issu de 0, de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$. Alors *le processus*

$$B'_t = B_t - \int_0^t \frac{B_s}{s}\, ds$$

est un mouvement brownien dans sa filtration naturelle $(\mathcal{F}'_t)$. L'intégrale au second membre étant absolument convergente, le processus correspondant est à variation finie, donc B' ne peut être une martingale de la filtration $(\mathcal{F}_t)$. Par conséquent, la filtration $(\mathcal{F}'_t)$ engendrée par B' est strictement plus petite que $(\mathcal{F}_t)$ — et en effet, *à chaque instant la v.a.* $\mathcal{F}_t$*-mesurable* B_t *est indépendante de la tribu* $\mathcal{F}'_t$. Je me propose de montrer, en m'inspirant de Pardoux [2], qu'un phénomène analogue se produit pour beaucoup de diffusions. Dans le cas des diffusions unidimensionnelles, ce résultat figure dans un travail non encore publié de Jeulin–Yor.

1. On considère une diffusion sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, solution de l'éds

$$(1) \qquad X^i_t = X^i_0 + \sum_\alpha \int_0^t a^i_\alpha(s,X_s)\, dB^\alpha_s + \int_0^t b^i(s,X_s)\, ds \quad ;$$

ici $i=1,\ldots,d$, $\alpha=1,\ldots,\ell$; les a_α sont des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$ dépendant du temps ; enfin la v.a. X_0 est indépendante de B. On suppose pour commencer que les coefficients a^i_α sont assez réguliers, que l'équation admet une solution non explosive, et que la loi μ_t de X_t admet une densité p_t strictement positive, continue avec des dérivées partielles premières bornées. Des conditions suffisantes bien connues sur les coefficients (Hörmander...) permettent d'affirmer qu'il en est ainsi.

On se propose de retourner le temps : on pose $\widehat{X}_t = X_{1-t}$, et $\widetilde{B}_t = B_{1-t} - B_1$. On désigne par $\mathcal{F}_t$ la filtration engendrée par les v.a. X_s, B_s $(s \le t)$: X_0 et les B_s suffisent puisque la solution est forte. De même, $\widehat{\mathcal{F}}_{1-t}$ est engendrée par les v.a. X_s, $B_s - B_t$ avec $t \le s \le 1$; elle est aussi engendrée par X_t et les v.a. $B_s - B_t$ (ou les v.a. $B_s - B_1$). Pour toute v.a. k de cette tribu on a $\mathbb{E}[k \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[k \mid X_t]$.

Les hypothèses faites sur la mesure μ_t entraînent une formule d'intégration par parties, où ξ est un champ de vecteurs

$$(2) \qquad \int (\xi f)\, \mu_t = -\int f\, \frac{\operatorname{div}(p_t \xi)}{p_t}\, \mu_t ,$$

ou encore, $\mathbb{E}[\xi f \circ X_t] = -\mathbb{E}[(f \operatorname{div}(p_t\xi)/p_t) \circ X_t]$.

On a alors le résultat suivant (d'après Pardoux, mais beaucoup plus simple en vertu des hypothèses faites sur la densité).

THÉORÈME 1. *Le processus suivant est un mouvement brownien ℓ-dimensionnel de la filtration* $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$

$$(3)\qquad \widehat{B}^\alpha_t = \widetilde{B}^\alpha_t - \int_0^t \frac{\operatorname{div} pa_\alpha}{p}(1-s,\widehat{X}_s)\,ds\ ;\alpha=1,2\ldots,\ell\ .$$

DÉMONSTRATION. Fixons $t\in[0,1]$. Soient $g\in\mathcal{C}^\infty_c$ et $g(r,x)=\mathbb{E}[g(X_t)\,|\,X_r=x]=P_{t-r}(x,g)$ pour $r\le t$. Si les coefficients sont réguliers, $g(r,x)$ est de classe $C^{2,1}$ et on peut appliquer la formule d'Ito à la martingale $g(r,X_r)$ entre $s<t$ et t, pour obtenir

$$g(t,X_t)-g(s,X_s)=\sum_{i,\alpha}\int_s^t a^i_\alpha D_i g(r,X_r)\,dB^\alpha_r=\sum_\alpha\int_0^t a_\alpha g(r,X_r)\,dB^\alpha_r$$

(on peut sans doute présenter cela en utilisant moins de régularité, à l'aide de la représentation prévisible de la martingale $g(r,X_r)$). En intégrant par parties selon (2), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(B^\alpha_t-B^\alpha_s)\,g(X_t)] &= \mathbb{E}[\int_s^t a_\alpha g(r,X_r)\,dr]\\ &= -\int_s^t dr\,\mathbb{E}[g_r(X_r)\,\frac{\operatorname{div}(p_r a_\alpha(r,\cdot))}{p_r}(X_r)]\ .\end{aligned}$$

On peut de nouveau remplacer $g(r,X_r)$ par $g(X_t)$ du côté droit. Ainsi

$$\mathbb{E}[(B^\alpha_t-B^\alpha_s)\,g(X_t)] = -\mathbb{E}[(\int_s^t \frac{\operatorname{div}(p_r a_\alpha(r,\cdot))}{p_r}(X_r)\,dr)\,g(X_t)\,]\ .$$

Ceci établi pour $g\in\mathcal{C}^\infty_c$ s'étend à g borélienne bornée. Si k est une v.a. appartenant à $\widehat{\mathcal{F}}_{1-t}$, on peut calculer $\mathbb{E}[(B^\alpha_t-B^\alpha_s)\,k]$ en conditionnant d'abord par rapport à $\mathcal{F}_t$ — et donc à X_t en utilisant une remarque faite plus haut. On est alors ramené au calcul précédent.On voit que, par rapport aux tribus du futur, le brownien (réel) retourné $(\widetilde{B}^\alpha)$ est une semimartingale admettant pour dérive $\operatorname{div}(pa_\alpha)/p$, pris au point $(1-s,X_{1-s})$. Enfin, les diverses composantes de (3) ont des variations quadratiques mutuelles nulles, et forment donc un brownien vectoriel. □

Le mouvement brownien $\widehat{B}$ de (3) est indépendant de la v.a. $\widehat{\mathcal{F}}_0$-mesurable X_1. Si l'on retourne le temps à nouveau, on obtient encore un mouvement brownien indépendant de X_1, de composantes

$$(4)\qquad B'^\alpha_t+\int_0^t\frac{\operatorname{div}(pa_\alpha)}{p}(s,X_s)\,ds\ .$$

Ce processus ne dépend pas explicitement de l'intervalle $[0,1]$ sur lequel on a travaillé, donc en fait la tribu $\mathcal{T}(B'_s,\ s\le t)$ est indépendante de la tribu $\mathcal{T}(X_s,\ s\ge t)$, et en particulier de X_t : c'est la généralisation aux diffusions du mouvement brownien de Jeulin–Yor.

2 On va montrer, en suivant toujours Pardoux, que le processus retourné $\widehat{X}$ est solution forte d'une éds relativement aux mouvements browniens $\widehat{B}^\alpha$, avec donnée initiale X_1. Il en résulte que le "mouvement brownien de Jeulin–Yor" et la v.a. X_1 engendrent la tribu $\mathcal{F}_1$.

THÉORÈME 2. *Le processus $\widehat{X}_t$ est solution de l'éds*

$$\widehat{X}_t^i = \widehat{X}_0^i + \sum_\alpha \int_0^t a_\alpha^i(1-s,\widehat{X}_s)\,d\widehat{B}_s^\alpha + \int_0^t \widehat{b}^i(1-s,\widehat{X}_s)\,ds\ , \tag{5}$$

où la nouvelle dérive $\widehat{b}$ satisfait à

$$b_{1-s}^i + \widehat{b}_s^i = \sum_k D_k c_{1-s}^{ki} + c_{1-s}^{ik} D_k \log p_{1-s} = \frac{1}{p} \sum_k D_k(pc^{ki})\,\big|_{1-s}\ . \tag{6}$$

Les $c^{ki} = \sum_\alpha a_\alpha^k a_\alpha^i$ sont les termes du second ordre dans l'expression du générateur. La structure de flot stochastique (le choix précis des a_α^i) intervient dans la formule (5), mais non dans (6) — on le sait depuis Kolmogorov.

DÉMONSTRATION. Mettons l'éds (1) sous forme d'intégrales stochastiques en arrière (indiquées par un $\widehat{d}$), en conservant d'abord le sens du temps (et en omettant la coordonnée de temps de la notation pour alléger)

$$\begin{aligned} X_t^i &= X_0^i + \sum_\alpha \int_0^t a_\alpha^i(X_s)\,\widehat{d}B_s^\alpha + \int_0^t b^i(X_s)\,ds - \sum_{\alpha,k} d\!< a_\alpha^i(X_s), B_s^\alpha > \\ &= X_0^i + \int_0^t a_\alpha^i(X_s)\,\widehat{d}B_s^\alpha + \int_0^t (b^i - \sum_{\alpha,k} a_\alpha^k D_k a_\alpha^i)(X_s)\,ds \end{aligned}$$

Maintenant, retournons le temps

$$\widehat{X}_t^i = \widehat{X}_0^i + \sum_\alpha \int_0^t a_\alpha^i(1-s,\widehat{X}_s)\,d\widetilde{B}_s^\alpha + \int_0^t (\sum_{\alpha,k} a_\alpha^k D_k a_\alpha^i - b^i)(1-s,\widehat{X}_s)\,ds$$

et en introduisant le brownien $\widehat{B}_s$, le second membre s'écrit

$$\widehat{X}_0^i + \sum_\alpha \int_0^t a_\alpha^i(1-s,\widehat{X}_s)\,d\widehat{B}_s + \int_0^t (\sum_{\alpha,k} a_\alpha^k D_k a_\alpha^i + \sum_\alpha \frac{a_\alpha^i \operatorname{div}(pa_\alpha)}{p} - b^i)(1-s,\widehat{X}_s)\,ds$$

Il ne reste plus qu'à bien transformer la dérive.

EXEMPLE. Nous nous plaçons sur $\mathbb{R}$, en considérant l'éds triviale $X_t = x_0 + B_t$. Alors on a sur $[0,1]$

$$\widehat{X}_t = \widehat{X}_0 + \widehat{B}_t + \int_0^t \widehat{b}(s,\widehat{X}_s)\,ds$$

avec $\widehat{b}(s,x) = -D\log p(1-s,x) = -D(x-x_0)^2/2(1-s)$. Ainsi, le processus

$$\widehat{X}_t - \widehat{X}_0 - \int_0^t \frac{\widehat{X}_1 - \widehat{X}_s}{1-s}\,ds$$

est un mouvement brownien. On retrouve une formule bien connue sur le pont.

REMARQUE. Du point de vue probabiliste, on ne voit pas bien pourquoi il faudrait que les mesures μ_t soient absolument continues. Cela suggère que, même lorsque les mesures μ_t ne sont pas absolument continues, leur classe d'équivalence peut être préservée par les transformations *des flots a_α définissant l'équation.*

REFERENCES

[1] HAUSSMANN (U.G.) et PARDOUX (E.). Time reversal of diffusions, *Ann. Prob.*, **14**, 1986, 1188–1205.

[2] PARDOUX (E.). Grossissement d'une filtration et retournement du temps d'une diffusion, *Sém. Prob. XX*, LN **1204**, 1986, 48–55.