SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

T.J. RABEHERIMANANA

SERGUEY NIKOLAIEVITCH SMIRNOV

Petites perturbations de systèmes dynamiques et algèbres de Lie nilpotentes. Une extension des estimations de Doss et Stroock

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 28 (1994), p. 49-72

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1994__28__49_0>

Petites perturbations de systèmes dynamiques
et Algèbres de Lie Nilpotentes.
Une extension des estimations de Doss & Stroock.

par

T.J. RABEHERIMANANA * et S.N. SMIRNOV **

Abstract: In this paper, we study a problem of large deviations related to asymptotic behavior, when $\varepsilon \searrow 0$, of the diffusion- process X^{ε}, with generator

$$\mathcal{L}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l} \tilde{A}_j^2 + A_0; \quad A_1,\dots,A_n, \ \tilde{A}_1,\dots,\tilde{A}_l \text{ and } A_0$$

are regular vector fields on $\mathbb{R}^d$. We prove under the condition of nilpotence of Lie's Algebra $\mathcal{L}(A_1,\dots,A_n)$, generated by vector fields $A_1,\dots,A_n$ a large deviations principle, which yields the speed of convergence of X^{ε} towards X^0 on an appropriate space, this principle being valid even when the limit diffusion is non degenerate, extending a Doss-Stroock's result. We apply these results to the analysis of the speed of convergence towards o of the difference process $\bar{X}^{\varepsilon} = X^{\varepsilon} - X^0$, when $\varepsilon \searrow 0$, using the contraction principle.

Résumé: Dans cet article, nous étudions un problème de grandes déviations associé au comportement asymptotique, quand $\varepsilon \searrow 0$, d'un processus de diffusion perturbé X^{ε}, gouverné par l'opérateur:

$$\mathcal{L}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l} \tilde{A}_j^2 + A_0; \quad A_1,\dots,A_n, \ \tilde{A}_1,\dots,\tilde{A}_l \text{ et } A_0 \text{ sont}$$

des champs de vecteurs réguliers sur $\mathbb{R}^d$. Sous la condition de nilpotence de l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs $A_1,\dots,A_n$, nous démontrons un principe de grandes déviations qui rend compte de la vitesse de convergence de X^{ε} vers X^0 sur un espace approprié, valable même quand la diffusion limite est non dégénérée, généralisant un résultat de Doss-Stroock. Nous appliquons ces résultats à l'analyse de la vitesse de convergence vers o du processus difference $\bar{X}^{\varepsilon} = X^{\varepsilon} - X^0$, quand $\varepsilon \searrow 0$, à l'aide du principe classique des contractions.

Section 0. Déclaration d'intention.

Dans $\mathbb{R}^d$ considérons d'une part la diffusion $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$, solution de l'E.D.S.

$$(1) \quad dX_t = \sum_{j=1}^{l} \tilde{A}_j(X_t) \circ d\tilde{B}_t^j + A_0(X_t)\, dt \; ; \; X_0 = x,$$

Ici les A_0 et $\tilde{A}_j$ sont $(l+1)$- champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$. $\tilde{B}=(\tilde{B}_t^j)_{j=1,\dots,l}$ est un mouvement brownien, issu de 0 à valeurs dans $\mathbb{R}^l$. La notation "$\circ$" désigne la différentielle au sens de Stratonovich.

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, considérons une petite perturbation (2) de l'équation (1):

$$(2)\ dX_t^\varepsilon = \sum_{j=1}^{l} \tilde{A}_j^\varepsilon(X_t^\varepsilon) \circ d\tilde{B}_t^j + A_0^\varepsilon(X_t^\varepsilon)\, dt + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} A_k^\varepsilon(X_t^\varepsilon)\, dB_t^k \ ;\ X_0^\varepsilon = x^\varepsilon$$

où les A_0^ε, A_k^ε et $\tilde{A}_j^\varepsilon$ sont (n+l+1)-champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$, $B=(B_t^k)_{k=1,\dots,n}$ est un mouvement brownien issu de 0 à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, indépendant de $\tilde{B} = (\tilde{B}_t^j)_{j=1,\dots,l}$.

Dans la suite, si u est un entier naturel, ${}^u\Omega_{T,x}$ désigne l'espace des fonctions continues de [0,T] dans $\mathbb{R}^u$, issues de x à l'instant 0. Cet espace est équipé de la topologie de la convergence uniforme et de sa tribu borélienne. ${}^uH_{T,0}$ désigne le sous-espace de ${}^u\Omega_{T,0}$ constitué des fonctions absolument continues avec une dérivée de carré intégrable. On le munit d'une structure hilbertienne en posant $(f,g)=\int_0^T \dot{f}_s.\dot{g}_s ds$ (espace de Caméron-Martin).

Le but principal de cet article est d'étudier, sous une condition assez générale, la vitesse de convergence du processus X^ε, solution de (2) vers le processus X^0, solution de (1) et de formuler un « bon » principe de grandes déviations, qui étende les estimations bien connues de Wentzell & Freidlin [11] lorsque les champs de vecteurs $\tilde{A}_j^\varepsilon$ pour $j \in \{ 1,\dots,l \}$ sont tous nuls . Doss & Stroock [1] montrent que pour formuler dans ce cadre un bon principe de grandes déviations, y compris dans le cas où le processus non perturbé est non dégénéré, il est nécessaire de se placer sur un espace approprié contenant en un sens l'espace canonique ${}^d\Omega_{T,x}$. Plus précisément, ils introduisent l'espace $\mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1({}^d\Omega_T))$ et, en considérant le comportement, quand ε tend vers 0, de la loi conditionnelle $R^{\varepsilon,\cdot}(d\omega)$ du processus X^ε sachant εB , ils formulent un« bon » principe de grandes déviations pour la loi Q_ε de la v.a. $\mathcal{X}_\varepsilon(\omega) = R^{\varepsilon,\varepsilon B(\omega)}$ sous la condition que l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs $A_1,\dots,A_n$ est commutative. Ils posent alors la question de savoir si leur résultat de grandes déviations pour la loi Q_ε est toujours valable sans la condition de « commutativité de l'algèbre ».

Nous donnons dans cet article une réponse partielle à ce problème, en supposant que l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs $A^\varepsilon_{k,k=1,\dots,n}$ est nilpotente d'ordre p.

Dans le cas nilpotent, X^ε, solution de (2) est, suivant Yamato [2] une fonctionnelle régulière du couple ($D^\varepsilon,Y^\varepsilon$) où Y^ε désigne une famille finie d'intégrales itérées du mouvement brownien εB et D^ε est solution d'une équation différentielle stochastique relativement à $\tilde{B}$ dont les coefficients dépendent continûment des trajectoires de Y^ε. Nous étudions le comportement, quand ε tend vers 0, de la loi conditionnelle $L^{\varepsilon,\cdot}(d\omega)$ du processus X^ε sachant ces intégrales itérées Y^ε, en introduisant l'espace

$M_1(M_1({}^d\Omega_{T,x}))$. En considérant une version régulière de la loi conditionnelle de X^ε sachant εB, on voit facilement que $R^{\varepsilon,\varepsilon B} = L^{\varepsilon,Y^\varepsilon} = L^{\varepsilon,\Theta(\varepsilon B)}$ p.s. où Θ est une fonctionnelle mesurable telle que $Y^\varepsilon = \Theta(\varepsilon B)$. Le principe classique de contraction joint au principe de grandes déviations pour Y^ε nous permettent alors d'affirmer que les résultats de grandes déviations formulés par Doss & Stroock [1] pour la loi Q_ε ($\varepsilon \searrow 0$)de la variable aléatoire $\mathcal{X}_\varepsilon(\omega) = R^{\varepsilon,\varepsilon B(\omega)}$ sont encore valables dans le cas nilpotent. La question se pose de savoir si le résultat de grandes déviations pour la loi Q_ε est toujours valable sans la condition de « nilpotence de l'algèbre »

Dans la section 1, nous donnons une nouvelle démonstration de la minoration pour les ouverts de l'espace canonique ${}^d\Omega_{T,x}$. Signalons que cette minoration est déjà obtenue dans [5] et [1] sous une condition générale.

Dans la section 2, nous établissons le résultat principal de notre article concernant le principe de grandes déviations associé à Q_ε ($\varepsilon \searrow 0$) et nous en déduisons comme, en Doss & Stroock [1] une majoration pour les fermés dans l'espace canonique ${}^d\Omega_{T,x}$.

La section 3 est consacrée à l'étude des bornes de déviations du processus-différence $\bar{X}^\varepsilon = X^\varepsilon - X^0$. L'idée est ici d'appliquer en quelque sorte le principe de contraction, cf [3] en considérant le couple $C^\varepsilon = (X^\varepsilon, X^0)$.

Signalons que dans la littérature, on peut citer aussi [4], [5] et [6] pour l'étude, sous des conditions particulières, des bornes de déviations du processus X^ε défini par (2) , sur l'espace canonique ${}^d\Omega_{T,x}$.

Section 1 Minoration

Condition S1

Nous supposons vérifiées les conditions suivantes:

1) $\forall\ \varepsilon \geq 0$, l'application A_0^ε de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ est lipchitzienne et bornée.

2) $\forall\ \varepsilon \geq 0$, l'application A^ε de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^n$, ensemble des matrices à d lignes et n colonnes (resp. $\tilde{A}^\varepsilon$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^1$, ensemble des matrices à d lignes et 1 colonnes) est de classe C_b^2 (resp. $\tilde{A}^\varepsilon$), c'est-à- dire que les dérivées de A^ε d'ordre ≤ 2 sont continues et bornées (resp. $\tilde{A}^\varepsilon$). Nous faisons la convention suivante: la dérivée d'ordre 0 est égale à la fonction elle-même.

3) $\forall\ j \in \{0,1,2\}$ les dérivées $D^jA_0^\varepsilon$, D^jA^ε et $D^j\tilde{A}^\varepsilon$ convergent uniformément sur $\mathbb{R}^d$, respectivement vers D^jA_0 ,D^jA et $D^j\tilde{A}$ quand ε tend vers 0.

Soient $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ et β_x^ε l'application de ${}^nH_{T,0} \times {}^1H_{T,0}$ dans

${}^{d}\Omega_{T,x}$ défini de la façon suivante:

(3) $\varphi_t = \beta_x^{\varepsilon}(g,\tilde{g})_t$

si, et seulement si,

$\varphi_t = x + \int_0^t \tilde{A}^{\varepsilon}(\varphi_s)d\tilde{g}_s + \int_0^t A_0^{\varepsilon}(\varphi_s)ds + \int_0^t A^{\varepsilon}(\varphi_s)dg_s,\ t \in [0,T]$

On désignera de même, par β_x la solution de (3), quand on remplace les coefficients A_0^{ε}, A^{ε} et $\tilde{A}^{\varepsilon}$ par leurs limites respectives A_0, A et $\tilde{A}$ lorsque ε tend vers 0.

Dans la suite, $\tilde{\lambda}$ désigne la fonctionnelle d'action correspondant au mouvement brownien $\varepsilon B = (\varepsilon B_t)_{t\in[0,T]}$. Par le théorème de Schilder,

$$(4)\ \tilde{\lambda}(g) = \begin{cases} \frac{1}{2}\|g\|^2_{{}^{n}H_{T,0}} & \text{si } g \in {}^{n}H_{T,0} \\ +\infty \text{ sinon.} & \end{cases}$$

$\tilde{\Lambda}({}^{n}A) = \inf \{ \tilde{\lambda}(g),\ g \in {}^{n}A \}$ si ${}^{n}A$ est un borélien de ${}^{n}\Omega_{T,0}$.

Ensuite, nous considérons la fonctionnelle λ_X de ${}^{d}\Omega_{T,x}$ dans $\overline{\mathbb{R}}^{+}$ définie de la façon suivante pour tout $\psi \in {}^{d}\Omega_{T,x}$

(5) $\lambda_x(\psi) = \inf \{\tilde{\lambda}(g)$ où $g \in {}^{n}H_{T,0}$ est tel qu'il existe $\tilde{g} \in {}^{1}H_{T,0}$ vérifiant $\psi = \beta_x(g,\tilde{g})$ }.

Nous faisons la convention: $\inf \{\emptyset\} = +\infty$. $\Lambda_x({}^{d}A) = \inf \{ \lambda_x(\psi)$, lorsque ψ parcourt ${}^{d}A$ } si ${}^{d}A$ est un borélien de ${}^{d}\Omega_{T,x}$.

Considérons le processus $X^g = (X_t^g)_{t\in[0,T]}$ pour chaque $g \in {}^{n}H_{T,0}$, solution de:

(6) $X_t^g = x + \int_0^t \tilde{A}(X_s^g)\circ d\tilde{B}_s + \int_0^t A_0(X_s^g)ds + \int_0^t A(X_s^g)dg_s$.

Posons:

(7) $S_x(g) = \{ \beta_x(g,\tilde{g})$ lorsque $\tilde{g} \in {}^{1}H_{T,0}$ }

Par le théorème du support topologique de Stroock-Varadhan [7],

(8) Supp $X^g = \overline{S_x(g)}$. Ici, $\bar{A}$ désigne la fermeture de A.

En général, λ_x n'est pas une fonctionnelle d'action satisfaisante, cf Doss H. & Stroock D.W. [1].

On considèrera le processus $X^{\varepsilon} = (X_t^{\varepsilon})_{t\in[0,T]}$, solution de (2), comme une variable aléatoire à valeurs dans l'espace de Banach ${}^{d}\Omega_{T,x}$.

<u>Lemme 1</u> [8] $\int |ab|\, dP \geq (\int |a|^p\, dP)^{(1/p)} \times (\int |b|^q\, dP)^{(1/q)}$, où p et q sont tels que $p^{-1} + q^{-1} = 1$ et $p < 1$.

Démonstration

Le lemme se déduit de l'inégalité de Hölder,

$* \int |uv|\, dP \le \left(\int |u|^l\, dP \right)^{(1/l)} \times \left(\int |v|^{l'} dP \right)^{(1/l')}$ où $l^{-1} + l'^{-1} = 1$ et $l > 1$.

En effet, en prenant $u = (ab)^k$, $l = k^{-1} > 1$, $v = b^{-k}$ on a:

$ab = u^l$, $a^k = uv$ et $b^{k'} = v^{l'}$ où $k' = -kl$ avec $l^{-1} + (l')^{-1} = 1$.

D'après *, $\int |a|^k\, dP \le \left(\int |ab|\, dP \right)^{(1/l)} \times \left(\int |b|^{k'} dP \right)^{(1/l')}$

D'où $\int |a|^k\, dP \times \left(\int |b|^{k'}\, dP \right)^{-(1/l')} \le \left(\int |ab|\, dP \right)^{(1/l)}$

$$\left(\int |a|^k\, dP\right)^l \times \left(\int |b|^{k'}\, dP \right)^{-(l/l')} \le \left(\int |ab|\, dP \right).$$

$$\left(\int |a|^{(1/l)}\, dP\right)^l \times \left(\int |b|^{-(l'/l)}\, dP \right)^{-(l/l')} \le \left(\int |ab|\, dP \right).$$

Il suffit de poser $p = l^{-1}$, $q = -\, l' \times l^{-1}$.

On a bien: $p^{-1} + q^{-1} = l - l(l')^{-1} = (ll' - l)\,(l')^{-1} = 1$.

Théorème 2

Sous la condition S 1, soient ${}^dO$ un ouvert de ${}^d\Omega_{T,x}$ et $\Lambda_x({}^dO)$ définie dans (5). Alors nous avons:

(9) $\Lambda_x({}^dO) = \inf\{\ \tilde\lambda(g)$ où $g \in {}^nH_{T,0}$ est tel que $P\ (X^g \in {}^dO) > 0$, le processus X^g étant défini par (6).

De plus, nous avons la minoration suivante:

$$(10)\quad \liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} P(X^\varepsilon \in {}^dO) \ge -\Lambda_x({}^dO).$$

Démonstration

Soit ${}^dO$ un ouvert de ${}^d\Omega_{T,x}$.

L'assertion (9) est une conséquence du fait que, d'après la définition (5) de $\Lambda_x({}^dO)$, on peut écrire $\Lambda_x({}^dO) = \inf\{\ \tilde\lambda(g)$ où $g \in {}^nH_{T,0}$ est tel que $S_x(g) \cap {}^dO \neq \emptyset\ \}$; la propriété (8) montre, de plus, que $\forall\ g \in {}^nH_{T,0}$: $S_x(g) \cap {}^dO \neq \emptyset \Leftrightarrow P\ (X^g \in {}^dO) > 0$, voir [1].

Posons $\bar B = B - g/\varepsilon$.

Par Girsanov,

$$\frac{d\bar P}{dP} = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \dot g_s\, dB_s - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T |\dot g_s|^2\, ds \right).$$

D'où

$$P(X^\varepsilon \in {}^dO) = E\left\{ 1_{\{x^\varepsilon + \varepsilon\int_0^{\cdot} A^\varepsilon(X_s^\varepsilon)\circ dB_s + \int_0^{\cdot} \tilde A^\varepsilon(X_s^\varepsilon)\circ d\tilde B_s + \int_0^{\cdot} A_0^\varepsilon(X_s^\varepsilon)\, ds \in {}^dO\}} \right\}$$

$$= \bar E\left[\text{——}\|\text{——}\ \frac{dP}{d\bar P} \right]$$

$$= \exp - \left(\frac{\int_0^T |\dot g_s|^2 \, ds}{2\,\varepsilon^2} \right) \quad \bar E \Big\{ 1_{\{x^\varepsilon + \varepsilon \int_0^\cdot A^\varepsilon(X_s^\varepsilon) \circ d\bar B_s + \int_0^\cdot A^\varepsilon(X_s^\varepsilon)\, dg_s + \int_0^\cdot \tilde A^\varepsilon(X_s^\varepsilon) \circ d\tilde B_s + \int_0^\cdot A_0^\varepsilon(X_s^\varepsilon)\, ds \in {}^d O\}}$$

$$\times \exp - \frac{\int_0^T \dot g_s \, d\bar B_s}{\varepsilon} \Big\}$$

où 1_A est la fonction indicatrice de A. Grâce au lemme 1,

$$\geq \exp - \left(\frac{\int_0^T |\dot g_s|^2 \, ds}{2\,\varepsilon^2} \right) \Big\{ \bar E \Big\{ 1_{\{x^\varepsilon + \varepsilon \int_0^\cdot A^\varepsilon(X_s^\varepsilon) \circ d\bar B_s + \int_0^\cdot A^\varepsilon(X_s^\varepsilon)\, dg_s + \int_0^\cdot \tilde A^\varepsilon(X_s^\varepsilon) \circ d\tilde B_s + \int_0^\cdot A_0^\varepsilon(X_s^\varepsilon)\, ds \in {}^d O\}} \Big\}\Big\}^{1/p}$$

$$\times \underbrace{\Big\{ \bar E \Big\{ \exp - q \frac{\int_0^T \dot g_s \, d\bar B_s}{\varepsilon} \Big\}\Big\}^{1/q}}_{\displaystyle \exp \left(q \frac{\int_0^T |\dot g_s|^2 \, ds}{2\,\varepsilon^2} \right)}$$

Donc

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} P(X^\varepsilon \in {}^d O)$$

$$\geq -\frac{1}{2} \int_0^T |\dot g_s|^2 \, ds + \liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} P(X^g \in {}^d O) + \frac{1}{2} q \int_0^T |\dot g_s|^2 ds$$

(car $Z_t^\varepsilon = x^\varepsilon + \varepsilon \int_0^\cdot A^\varepsilon(Z_s^\varepsilon) \circ d\bar B_s + \int_0^\cdot A^\varepsilon(Z_s^\varepsilon) dg_s + \int_0^\cdot \tilde A^\varepsilon(Z_s^\varepsilon) \circ d\tilde B_s + \int_0^\cdot A_0^\varepsilon(Z_s^\varepsilon) ds \longrightarrow X^g$ en probabilité (et même p.s.) quand $\varepsilon \to 0$).

$$= -\frac{1}{2} \int_0^T |\dot g_s|^2 \, ds + \frac{1}{2} q \int_0^T |\dot g_s|^2 \, ds$$

$$= -\frac{1}{1-p} \times \frac{1}{2} \int_0^T |\dot g_s|^2 \, ds$$

dont le sup pour $0<p<1$ est $-\frac{1}{2} \int_0^T |\dot g_s|^2 \, ds$.

Section 2. Principe de Grandes Déviations associé à Q_ε. Majoration.

L'espace vectoriel engendré par tous les champs de vecteurs de la forme $[\ldots [[A_{i_1}, A_{i_2}], A_{i_3}] \ldots, A_{i_k}]$, $i_1, i_2, \ldots \in \{1, \ldots, n\}$ est appelé l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs $A_1, \ldots, A_n$ et on note $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_1, \ldots, A_n)$.

Considérons la chaîne de sous-algèbre de $\mathcal{L}$:
$\mathcal{L}^1 = [\mathcal{L}, \mathcal{L}], \ldots, \mathcal{L}^{m+1} = [\mathcal{L}, \mathcal{L}^m]$.

Si $\mathcal{L}^p = \{0\}$ pour un certain entier p, alors l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est nilpotente d'ordre p, cf. Kunita [9].

Condition S 2.

En plus de la condition S 1, nous supposons que: $\forall\, \varepsilon \geq 0$, l'algèbre de Lie $\mathcal{L}^\varepsilon = \mathcal{L}^\varepsilon(A_1^\varepsilon, \ldots, A_n^\varepsilon)$ engendrée par les champs de vecteurs $A_1^\varepsilon, \ldots$ et A_n^ε est nilpotente d'ordre p. De plus, ces champs sont de classe C_b^∞.

S 2-1 Théorème de représentation *(lemme 3, théorème 4)*

Avant de donner le théorème de représentation de la solution de (2) sous la condition S 2, nous allons rappeler les notations et certains résultats de Yamato [2].

(11) Posons $E = \{1, 2, \ldots, n\}$

$E(p) = \{\ I = (i_1, \ldots, i_a);\ i_1, \ldots, i_a \in E,\ 1 \leq a \leq p\ \}$, $p = 1, 2, \ldots, n$

$E(\infty) = \bigcup_{p=1}^{\infty} E(p)$

(12) $[X, Y] = XY - YX$

Définissons par récurrence des champs de vecteurs A_I^ε pour $I \in E(\infty)$

(13) $A^\varepsilon_{(i_1, \ldots, i_n)} = [A^\varepsilon_{(i_1, \ldots, i_{n-1})}, A^\varepsilon_{i_n}]$

Nous supposons que $\forall\, \varepsilon \geq 0$, les composantes de A_I^ε, $I \in E(\infty)$ sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}^d$. Nous définissons aussi la famille des intégrales itérées B_t^I, $t \geq 0$ par récurrence

(14) $B_t^{(i_1, \ldots, i_n)} = \int_0^t B_s^{(i_1, \ldots, i_{n-1})} \circ dB_s^{i_n}$. Avec la convention $B_t^0 = t$, $t \geq 0$.

On écrira aussi:

(15) $A^{\varepsilon}_{i_1,\dots,i_n}$ et $B_t^{i_1,\dots,i_n}$ au lieu de $A^{\varepsilon}_{(i_1,\dots,i_n)}$ et $B_t^{(i_1,\dots,i_n)}$

Nous fixons un entier positif p. L'ensemble $\{y = (y^I),\ I \in E(p)\}$ sera identifié à $\mathbb{R}^m$ avec m = Cardinal de E(p).

On définit aussi les champs de vecteurs Q_i, $i \in E$ sur $\mathbb{R}^m$ par:

$$(16)\quad Q_i = \frac{\partial}{\partial y^i} + \sum_{\substack{a+1\le p\\ j_1,\dots,j_a\in E}} y^{j_1,\dots,j_a}\frac{\partial}{\partial y^{j_1,\dots,j_a,i}}$$

Soient $\mathbb{R}(E)$ l'espace linéaire de base E et $\mathbb{T}(E)$ l'algèbre tensorielle basée sur $\mathbb{R}(E)$, c'est-à-dire:

(17) $\mathbb{T}(E) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}(E) \oplus (\mathbb{R}(E) \otimes \mathbb{R}(E)) \oplus \dots$

Définissons le crochet dans $\mathbb{T}(E)$ par:

(18) $[a,b] = a \otimes b - b \otimes a,\ a,b \in \mathbb{T}(E)$.

Soit $\mathbb{L}(E)$ la sous-algèbre de Lie de $\mathbb{T}(E)$ engendrée par E. $\mathbb{L}(E)$ et T(E) sont des algèbres de Lie libres engendrées par E.

Nous définissons $[i_1,\dots,i_a] \in \mathbb{L}(E)$ pour $(i_1,\dots,i_a) \in E(\infty)$, par récurr ence

(19) $[i_1,\dots,i_a] = [[i_1,\dots,i_{a-1}],i_a]$. Chaque $[i_1,\dots,i_a]$ est exprimé par

$$(20)\quad [i_1,\dots,i_a] = \sum_{(j_1,\dots,j_b)\in E(\infty)} C^{j_1,\dots,j_b}_{i_1,\dots,i_a}\, j_1 \otimes \dots \otimes j_b$$

et ces coefficients sont uniquement déterminés par la relation (20). Nous appelons par C(E,p) les matrices C^J_I, $I,J \in E(p)$.

Puique $C^j_i = \delta^j_i$, $i,j \in E$, nous pouvons toujours choisir un sous-ensemble F de E(p) vérifiant la propriété P.

Propriété P.

F est un sous-ensemble maximal de E(p) tel que les vecteurs-colonnes de $C(E,p) = (C^J_I)$ pour $J \in F$ sont linéairement indépendants.

Soit r le rang de la matrice C(E,p) et fixons une bijection:

ν: $F + E(p) \setminus F + \{1,\dots,d\} \longrightarrow \{1,\dots; m+d\}$ avec

$\nu(F) = \{1,\dots,r\}$, $\nu(E(p)\setminus F) = \{r+1,\dots,m\}$,

$\nu\{1,\dots,d\} = \{m+1,\dots,m+d\}$ où $F + E(p)\setminus F + \{1,\dots,d\}$ est la somme directe de ces ensembles.

Soit F un sous-ensemble de E(p) vérifiant la propriété P. On choisit un sous-ensemble G de E(p) avec r éléments de telle façon que la matrice $C(G,F) = (C^J_I)_{I\in G,\,J\in F}$ soit inversible.

Pour chaque $I \in E(p)$, soit $Q_I^J(y)$, $J \in E(p)$ les composantes de Q_I. Posons $Q(G,F) = (Q_I^J)_{I\in G, J\in F}$. On note $R = (R_I^J)_{I\in F, J\in G}$ la matrice inverse de $Q(G,F)$.

Soit μ la bijection réciproque de ν définie après la propriété P. Nous définissons $T_\rho^{\varepsilon,i}(z)$, $z \in \mathbb{R}^{m+d}$ pour chaque $i \in \{ r+1,..,m+d \}$, $\rho \in \{ 1,.. ,r \}$ par:

$$(21)\quad T_\rho^{\varepsilon,i}(z) = \begin{cases} \sum_{I\in G} R^I_{\mu(\rho)}\,(z^1,..,z^m)\, Q_I^{\mu(i)}\,(z^1,..,z^m) \text{ si } r+1\le i\le m \\ \sum_{I\in G} R^I_{\mu(\rho)}\,(z^1,..,z^m)\, A_I^{\varepsilon,\mu(i)}(z^{m+1},..,z^{m+d}),\ m+1\le i\le m+d \end{cases}$$

Sous la condition S2, le système d'équations aux différentielles totales

$$(22)\quad dv^{\varepsilon,i} = \sum_{\rho=1}^{r} T_\rho^{\varepsilon,i}(u^1,..,u^r,v^{\varepsilon,r+1},..,v^{\varepsilon,m+d})du^\rho, r+1\le i\le m+d$$

avec la conditon initiale

$$(23)\quad v^\varepsilon(q^1,..,q^r) = (q^{r+1},..,q^{m+d})$$

a une solution unique définie sur $\mathbb{R}^r$ pour chaque $q = (q^1,..,q^{m+d}) \in \mathbb{R}^{m+d}$.

La solution de (22) et de (23) nous donne une fonction $f^\varepsilon(q,u)= (f^{\varepsilon,i}(q,u)), r+1\le i\le m+d$, $q \in \mathbb{R}^{m+d}$, $u \in \mathbb{R}^r$, définie par:

$$(24)\quad f^{\varepsilon,i}(q,u) = u^i\ ,\ 1\le i\le r\ ;\quad f^{\varepsilon,i}(q,u)=v^{\varepsilon,i}\ ,r+1\le i\le m+d$$

Posons:

$Y_t = (B_t^I)_{I\in F} = B_t^F$

Y_t est solution de l'équation différentielle stochastique:

$$(25)\qquad dY_t^I=\sum_{j\in E} Q_j^I(Y_t)\circ dB_t^j\ \ I \in F\ ;\ Y_0 = 0$$

Considérons la fonction f^ε définie par (24). Dans la suite nous écrirons respectivement $\partial_1 f^\varepsilon,...,\partial_{m+d} f^\varepsilon, \partial_{m+d+1} f^\varepsilon,...,\partial_{m+d+r} f^\varepsilon$ les différentes dérivées partielles de f^ε par rapport aux variables $z^1,..,z^{m+d},u^1,..$et u^r.

Posons:

(26) $h^\varepsilon=(f^{\varepsilon,m+1},..,f^{\varepsilon,m+d})$. Nous rappelons une propriété de h^ε (pour les autres cf Yamato [2])

(26') $\sum_{j=1} \partial_{m+i} h^{\varepsilon,j}(f^\varepsilon(0,x,u);0)\ \partial_{m+j} h^{\varepsilon,k}(0,x,u) = \delta_i^k$ pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$, $u \in$

$\mathbb{R}^r$ et $1\le i,\ k\le d$.

Pour chaque $g \in {}^nH_{T,0}$, soit Θ l'application de ${}^nH_{T,0}$ dans ${}^r\Omega_{T,0}$ définie par:

$\Theta(g) = U$, si U est solution de:

(27) $$dU^I_t = \sum_{j\in E} Q^I_j(U_t)dg^j_t,\ I \in F\ ;\ U_0 = 0.$$

La résolution de (27) nous permet d'écrire dans ce cas:

(28) $U = \Theta(g) = g^F$.

Posons

(29) ${}^rH'_{T,0} = \{\ U\in {}^rH_{T,0}$ tel qu'il existe $g\in {}^nH_{T,0}$ avec $U = (g^I)_{I\in F}\}$.

Par le théorème du support de Stroock-Varadhan,

(30) Supp $Y = \overline{{}^rH'_{T,0}}$, où Y est défini par (25).

Nous posons

(31) ${}^r\Omega'_{T,0}$ = Supp Y.

Pour chaque $U \in {}^rH'_{T,0}$, définissons une application $(\beta^\varepsilon_x)'$ de ${}^rH'_{T,0} \times {}^1H_{T,0}$ dans ${}^d\Omega_{T,x}$ par:

(32) $(\ \varphi_t) = (\beta^\varepsilon_x)'(U,\tilde g)_t$

si, et seulement si,

$\varphi_t = \beta^\varepsilon_x(g,\tilde g)_t$ où β^ε_x est définie par (3) lorsque $U = \Theta(g) = g^F$.

<u>Lemme 3</u>

Sous la condition S 2, pour tout $\varepsilon\ge 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonctionnelle $(\beta^\varepsilon_x)'$, déterminée par (32), admet un prolongement unique, défini sur ${}^r\Omega'_{T,0} \times {}^1H_{T,0}$ à valeurs dans ${}^d\Omega_{T,x}$, tel que, pour tout $\tilde g \in {}^1H_{T,0}$, l'application:

$U \in {}^r\Omega'_{T,0} \longrightarrow (\beta^\varepsilon_x)'(U,\tilde g) \in {}^d\Omega_{T,x}$ soit continue pour la norme uniforme.

Le prolongement $(\beta^\varepsilon_x)'$ est défini par la formule explicite:

(33) $(\beta^\varepsilon_x)'(U,\tilde g)_t = h^\varepsilon(\underbrace{0,\dots,0}_{m},D^{\varepsilon,U}_t;U_t)_{t\in[0,T]}\ (U,\tilde g)\in {}^r\Omega'_{T,0}\times{}^1H_{T,0}$, où $D^{\varepsilon,U} = (D^{\varepsilon,U}_t)_{t\in[0,T]}$ est solution de l'équation différentielle ordinaire:

$$dD^{\varepsilon,U}_t = \sum_{1\le i\le d} [\ A^{\varepsilon,i}_0\ (h^\varepsilon(\underbrace{0,\dots,0}_{m},D^{\varepsilon,U}_t;U_t))\ \times$$

$$\partial_{m+i}h^\varepsilon(f^\varepsilon(\underbrace{0,\dots,0}_{m},D^{\varepsilon,U}_t;U_t);\underbrace{0,\dots,0}_{r})\ dt$$

$$+ \sum_{1\le j\le l} \Big[\tilde{A}_j^{\varepsilon,i} \big(h^{\varepsilon}(\underbrace{0,\dots,0}_{m},D_t^{\varepsilon,U};U_t)\big) \times$$

$$\partial_{m+i} h^{\varepsilon}(f^{\varepsilon}(\underbrace{0,\dots,0}_{m},D_t^{\varepsilon,U};U_t);\underbrace{0,\dots,0}_{r})\, d\tilde{g}_t^{j} \Big] \Big] \; ; D_0^{\varepsilon,U} = x,$$

h^{ε}et f^{ε} sont définies respectivement par (26) et (24).

Démonstration

Soit donc $(U,\tilde{g}) \in {}^{r}H'_{T,0} \times {}^{l}H_{T,0}$. U vérifie donc (27) ou (28).

En posant $D_t^{\varepsilon,U} = \psi^{\varepsilon}(\ \varphi,\ U_{.})_t$ et $\varphi_t = h^{\varepsilon}(\ 0,D_t^{\varepsilon,U};U_t)$, nous avons d'une part en dérivant par rapport à $z_{m+1},\dots,z_{m+d}$

$$\sum_{i=1}^{d} \partial_{m+i} h^{\varepsilon,j}(0,\dots,0,D_t^{\varepsilon,U};U_t))\, dD_t^{\varepsilon,U,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \partial_{m+i} h^{\varepsilon,j}(0,\dots,0,D_t^{\varepsilon,U};U_t) \Big[\sum_{k=1}^{d} \big(A_0^{\varepsilon,k} \ (h^{\varepsilon}(0,\dots,0,D_t^{\varepsilon,U};U_t)) \times$$

$$\partial_{m+k}\, h^{\varepsilon,i}(f^{\varepsilon}(0,\dots,0,D_t^{\varepsilon,U};U_t);0,\dots,0)\, dt +$$

$$\sum_{k'=1}^{l} \tilde{A}_{k'}^{\varepsilon,k} \ (h^{\varepsilon}(0,\dots,0,D_t^{\varepsilon,U};U_t)) \times$$

$$\partial_{m+k} h^{\varepsilon}(f^{\varepsilon}(0,\dots,0,D_t^{\varepsilon,U};U_t);0,\dots,0)\, d\tilde{g}_t^{k'} \big) \Big]$$

par (26')

$$= \sum_{k=1}^{d} \Big[\delta_k^j\, A_0^{\varepsilon,k} \ (h^{\varepsilon}(0,\dots,0,D_t^{\varepsilon,U};U_t))\, dt + \sum_{k'=1}^{l} \delta_k^j\, \tilde{A}_{k'}^{\varepsilon,k} \ (h^{\varepsilon}(0,\dots,0,D_t^{\varepsilon,U};U_t))$$

$$d\tilde{g}_t^{k'} \Big]$$

$$= A_0^{\varepsilon,j} \ (h^{\varepsilon}(0,\dots,0,D_t^{\varepsilon,U};U_t))\, dt + \sum_{k'=1}^{l} \tilde{A}_{k'}^{\varepsilon,j} \ (h^{\varepsilon}(0,\dots,0,D_t^{\varepsilon,U};U_t))\, d\tilde{g}_t^{k'},$$

et d'autre part en dérivant par rapport à $u_1,\dots,u_\rho$

$$\sum_{1\le\rho\le r} \partial_{m+d+\rho} h^{\varepsilon,j}(0,\dots,0,D_t^{\varepsilon,U};U_t)\, dg_t^{\mu(\rho)} \quad (\mu \text{ est définie avant } (21))$$

$$= \sum_{1\le\rho\le r,\, i\in E} \{ T_\rho^{\varepsilon,m+j}(f^\varepsilon(0,D_t^{\varepsilon,U};U_t))\ Q_i^{\mu(\rho)}(U_t)\ \}\ dg_t^i$$

$$= \sum_{1\le\rho\le r,\, i\in E,\, I\in G} \{ R^I_{\mu(\rho)}(U_t)\ A_I^{\varepsilon,j}\ (h^\varepsilon(0,\dots,0,D_t^{\varepsilon,U};U_t))\ Q_i^{\mu(\rho)}(U_t)\ \}\ dg_t^i$$

$$= \sum_{1\le i\le n}^{l} A_i^{\varepsilon,j}\ (h^\varepsilon(0,\dots,0,D_t^{\varepsilon,U};U_t))\ dg_t^i.$$

La propriété de continuité se lit ensuite dans la représentation explicite donnant $h^\varepsilon(0,\dots,0,D_t^{\varepsilon,U};U_t)$ qui est bien définie pour tout $(U,g) \in {}^r\Omega'_{T,0} \times {}^lH_{T,0}$.

Pour tout $\varepsilon>0$ et $g\in {}^nH_{T,0}$, soit $X^{\varepsilon,g} = (X_t^{\varepsilon,g})_{t\in[0,T]}$ la solution de

$$(34)\quad X_t^{\varepsilon,g} = x^\varepsilon + \sum_{1\le k\le n} \int_0^t A_k^\varepsilon(X_s^{\varepsilon,g})\ dg_s^k + \sum_{1\le j\le l} \int_0^t \tilde{A}_j^\varepsilon(X_s^{\varepsilon,g}) \circ d\tilde{B}_s^j + \int_0^t A_0^\varepsilon(X_s^{\varepsilon,g})\ ds.$$

<u>Théorème</u> 4.

Sous la condition S 2, pour tout $\varepsilon>0$, soient $X^\varepsilon = (X_t^\varepsilon)$ la solution de (2) et $X^{\varepsilon,g} = (X_t^{\varepsilon,g})$ la solution de (34).

On a les représentations suivantes:

$$(35)\quad X_t^\varepsilon = h^\varepsilon\ (0,\bar{D}_t^{\varepsilon,((\varepsilon B).)^F};((\varepsilon B)_t)^F)$$

$$(36)\quad X_t^{\varepsilon,g} = h^\varepsilon\ (0,\bar{D}_t^{\varepsilon,g.^F};(g)_t^F)$$

où le processus $\bar{D}_t^{\varepsilon,*.^F}$ est solution de:

$$(37)\ d\bar{D}_t^{\varepsilon,*.^F} = \sum_{1\le i\le d} [\ A_0^{\varepsilon,i}\ (h^\varepsilon\ (0,\bar{D}_t^{\varepsilon,*.^F};(*)_t^F))\ \times$$

$$\partial_{m+i} h^\varepsilon(f^\varepsilon\ (0,\bar{D}_t^{\varepsilon,*.^F};(*)_t^F);0)\ dt$$

$$+ \sum_{1\le j\le l} [\ \tilde{A}_j^{\varepsilon,i}\ (h^\varepsilon\ (0,\bar{D}_t^{\varepsilon,*.^F};(*)_t^F))\ \times$$

$$\partial_{m+1} h^{\varepsilon}(f^{\varepsilon}(0,\overline{D}_t^{\varepsilon,*.^F};(*)_t^F);0) \circ d\tilde{B}_t^j\ ]\ ]\ ;\ \overline{D}_t^{\varepsilon,*.^F} = x^{\varepsilon}.$$

h^{ε} et f^{ε} sont définies comme dans le lemme 3 avec $*$ = εB ou g.

Démonstration.

On utilise la formule d'Ito_F pour l'intégrale de Stratonovich pour vérifier que h^{ε} $(0,\overline{D}_t^{\varepsilon,((\varepsilon B).)^F};((\varepsilon B)_t)^F)$ définie par (35) et h^{ε} $(0,\overline{D}_t^{\varepsilon,g.^F};(g)_t^F)$ définie par (36) sont les solutions respectives de (2) et (34).

(38) Remarque

Puisque les solutions de (2) et de (34) sont repectivement paramétrées par Y^{ε} = $(\varepsilon B)^F$et $U = g^F$, nous les notons respectivement par $X^{\varepsilon,Y^{\varepsilon}}$ et $X^{\varepsilon,U}$.

S 2-2 Grandes déviations de $Y^{\varepsilon} = (\varepsilon B)^F$.

D'après (25),Y_t^{ε} est solution de l'E.D.S.

(39) $dY_t^{\varepsilon,I}=\varepsilon\sum_{j\in E} Q_j^I(Y_t^{\varepsilon})\circ dB_t^j, I \in F\ ;\ Y_0^{\varepsilon} = 0$

Proposition 5

Soit Y^{ε} la solution de (39). Alors Y^{ε} admet un principe de grandes déviations avec la fonctionnelle d'action ρ définie par:

$$(40)\rho(U)= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^T |\dot{U}_s^i|^2\right) ds\right),\ U \in {}^rH'_{T,0} \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

Et nous avons l'estimation suivante si ${}^rA$ est un borélien de ${}^r\Omega_{T,0}$:

(41) $-\ \tilde{\Lambda}'(\overset{\circ}{{}^rA}) \le \varliminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \text{ Log } P(Y^{\varepsilon} \in {}^rA\ ) \le \varlimsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \text{ Log } P(Y^{\varepsilon} \in {}^rA\ ) \le$

$-\ \tilde{\Lambda}'(\overline{{}^rA})$

où l'on a posé:

(42) $\tilde{\Lambda}'({}^rA) = \inf\{\ \rho(U) \text{ lorsque } U \in {}^rA\ \}$.

Démonstration

La matrice à r lignes et n colonnes (Q_j^I) pour $1\le j\le n$ et $I \in F$ est formée de 0,1 et des fonctions coordonnées y^I pour $I \in F$. Par conséquent, les éléments de cette matrice sont de classe C^1. On est donc dans les conditions d'application du théorème d'Azencott [10]. D'après (29), la fonctionnelle d'action a la forme indiquée par (40).

S 2-3 Grandes déviations de la loi conditionnelle de X^{ε} sachant Y^{ε} = $(\varepsilon B)^F$ puis de X^{ε} sachant εB, par identification.

Remarque R.

Notons encore Θ une extension mesurable de Θ (donnée par (27)) définie sur ${}^n\Omega_{T,0}$ avec la propriété que tous les éléments de ${}^nH_{T,0}$ sont les points de continuité de Θ au sens de Stroock- Varadhan [7], c'est-à-dire: $\Theta(\omega,t) = Y_t(\omega)$ p.s. si Y est solution de (25) avec la propriété suivante:

$\forall\ \alpha > 0,\ P(\ \|\ Y - \Theta(g)\ \| < \alpha\ /\ \|\ B - g\ \| < \delta\ ) \longrightarrow 1$ lorsque $\delta \searrow 0$.

Grâce à ce fait, notons de même β^{ε}_{x} l'extension mesurable de β^{ε}_{x} (donnée par (3)) définie p.s. sur ${}^n\Omega_{T,0}\times {}^1H_{T,0}$ par:

$\varphi_t = \beta^{\varepsilon}_{x}(\omega,\tilde{g})_t$

si, et seulement si,

$\varphi_t = (\beta^{\varepsilon}_{x})'(Y_{.}(\omega),\tilde{g})_t$, où $(\beta^{\varepsilon}_{x})'$ est donnée par le lemme (3).

On désigne par $\mathcal{M}_1({}^d\Omega_T)$ l'espace des mesures de probabilité sur ${}^d\Omega_T$, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}({}^d\Omega_T)$. Cet espace équipé de la topologie de la convergence étroite est métrisable, on peut trouver une distance δ telle que $(\mathcal{M}_1({}^d\Omega_T),\delta)$ soit Polonais.

Théorème 6.

Sous la condition S 2, pour tout $\varepsilon>0$, notons $R^{\varepsilon,g}$ la loi du processus $X^{\varepsilon,g}$, solution de l'E.D.S. définie par (34) pour chaque $g \in {}^nH_{T,0}$. Pour chaque $U \in {}^rH'_{T,0}$, notons $L^{\varepsilon,U}$ la loi du processus défini par (36) et (38), solution de (34). $L^{\varepsilon,U} = L^{\varepsilon,\Theta(g)}$ si $U = \Theta(g)$.

Alors l'application qui à :
$g \in {}^nH_{T,0} \longrightarrow R^{\varepsilon,g}$ dans $\mathcal{M}_1({}^d\Omega_T)$ admet un prolongement mesurable défini p.s. sur l'espace ${}^n\Omega_{T,0}$, noté encore $R^{\varepsilon,g}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_1({}^d\Omega_T)$, avec $R^{\varepsilon,\cdot} = L^{\varepsilon,\Theta(\cdot)}$, où $L^{\varepsilon,*}$ est le prolongement continu sur ${}^r\Omega'_{T,0}$ pour la norme uniforme de l'application qui à:
$U \in {}^rH'_{T,0} \longrightarrow L^{\varepsilon,U}$ défini par (36) et (38), solution de (34) à valeurs dans $\mathcal{M}_1({}^d\Omega_T)$. Le prolongement continu $L^{\varepsilon,*}$ est une version régulière de la loi conditionnelle de $X^{\varepsilon} = (X^{\varepsilon}_t)_{t\in[0,T]}$, sachant $Y^{\varepsilon} = \Theta(\varepsilon B) = ((\varepsilon B)_t)^F_{t[0,T]}$.

Le prolongement mesurable $R^{\varepsilon,\cdot}$ est une version régulière de la loi conditionnelle de $X^{\varepsilon} = (X^{\varepsilon}_t)_{t\in[0,T]}$, sachant $\varepsilon B = (\varepsilon B_t)_{t\in[0,T]}$ vérifiant la propriété de continuité:

$\forall\ \alpha > 0,\ P\ (\ \delta\ (R^{\varepsilon,\varepsilon B},R^{\varepsilon,g}) \geq \alpha\ /\ \|\ \varepsilon B - g\ \| < \tau\ ) \longrightarrow 0$ quand $\tau \longrightarrow 0$.

Démonstration

Commençons par démontrer les assertions concernant $L^{\varepsilon,*}$.

On utilise le théorème 4. Le processus $\bar{D}^{\varepsilon,U}$ solution de (37) est bien défini pour chaque $U \in {}^r\Omega'_{T,0}$. Notons $L^{\varepsilon,U}$ la loi du processus $(h^{\varepsilon}(0,\bar{D}^{\varepsilon,U}_t;U_t))_{t\in[0,T]}$ pour chaque $U \in {}^rH'_{T,0}$.

Grâce à la propriété de h^{ε} cf. Yamato [2], on vérifie aisément en utilisant l'inégalité de Doob et le lemme de Gronwall, que si une suite U_n d'éléments de ${}^rH'_{T,0}$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers un élément $U \in {}^r\Omega'_{T,0}$, alors L^{ε,U_n} converge uniformément vers $L^{\varepsilon,U}$ dans l'espace $M_1({}^d\Omega_T)$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

La deuxième affirmation est alors une conséquence du théorème 4 et de l'indépendance de la diffusion Y^{ε} et du mouvement brownien $\tilde{B}$.

Remarquons que si $g \in {}^nH_{T,0}$, alors on a:
$R^{\varepsilon,g} = L^{\varepsilon,\Theta(g)} = L^{\varepsilon,U}$.

L'existence du prolongement mesurable de l'application qui à $g \in {}^nH_{T,0} \longrightarrow R^{\varepsilon,g}$ dans $M_1({}^d\Omega_T)$ défini p.s. sur l'espace ${}^n\Omega_{T,0}$ résulte de la remarque **R** et du théorème 4. Et l'on a:
$R^{\varepsilon,\varepsilon B} = L^{\varepsilon,\Theta(\varepsilon B)} = L^{\varepsilon,Y^{\varepsilon}}$.

La propriété de continuité résulte du fait que:
$(\delta\ (R^{\varepsilon,\varepsilon B},R^{\varepsilon,g}) \geq \alpha\ ,\ \| \varepsilon B - g \| < \tau\ ) \subset$
$(\delta\ (L^{\varepsilon,Y^{\varepsilon}},L^{\varepsilon,\Theta(g)}) \geq \alpha\ ,\ \| Y^{\varepsilon} - \Theta(g) \| < \alpha'\ )$
$\cup\ (\| Y^{\varepsilon} - \Theta(g) \| \geq \alpha'\ ,\ \| \varepsilon B - g \| < \tau\ )$. La remarque **R** et les résultats sur $L^{\varepsilon,*}$ nous permettent de conclure.

<u>Théorème</u> 7.

Sous la condition S 2, pour tout $\varepsilon>0$, soit $R^{\varepsilon,\cdot}$ la loi conditionnelle régulière du processus $X^{\varepsilon} = (X^{\varepsilon}_t)_{t\in[0,T]}$, sachant $\varepsilon B = (\varepsilon B_t)_{t\in[0,T]}$ définie dans le théorème 6.

Notons Q_{ε} la loi de la variable aléatoire $\mathcal{X}_{\varepsilon}(\omega) = R^{\varepsilon,\varepsilon B(\omega)}$.

Q_{ε} est un élément de $M_1(M_1({}^d\Omega_T))$ des mesures de probabilités sur $M_1({}^d\Omega_T)$, muni de la topologie de la convergence étroite.

Alors la famille $(Q_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ satisfait à un principe de grandes déviations avec la fonctionnelle d'action:
(43) $i_x(m) = \inf \{ \tilde{\lambda}(g),\ g \in {}^nH_{T,0}$ tel que $R^g_x = m \}$, où R^g_x est la loi du processus défini par (6) et $\tilde{\lambda}$ définie par (4).

<u>Démonstration</u>.

On utilise le principe de contraction, cf. [3].

D'après le théorème 6, on a:
$R^{\varepsilon,\varepsilon B} = L^{\varepsilon,\Theta(\varepsilon B)} = L^{\varepsilon,Y^{\varepsilon}}$. Donc Q_{ε} est identique à la loi $\mathcal{L}_{\varepsilon}$ de la v. a. $L^{\varepsilon,Y^{\varepsilon}(\omega)}$.

Soit donc $U \in {}^{r}\Omega'_{T,0}$ et $L^{\varepsilon,U}$ la loi du processus $(h^{\varepsilon}(0,D_t^{\varepsilon,U};U_t))_{t\in[0,T]}$ défini par (36), (37) et(38). On peut vérifier ,par des arguments classiques en s'appuyant sur le théorème 4, que la famille d'applications continues $(U \in {}^{r}\Omega'_{T,0} \longrightarrow L_x^{\varepsilon,U} \in \mathcal{M}_1({}^{d}\Omega_T))_{\varepsilon>0}$ converge, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, uniformément sur tout ensemble borné de l'espace de Banach ${}^{r}\Omega'_{T,0}$ vers la fonction $(U \in {}^{r}\Omega'_{T,0} \longrightarrow L_x^{U} \in \mathcal{M}_1({}^{d}\Omega_T))$, où L_x^{U} est la loi du processus $(h^{0}(0,D_t^{U};U_t))_{t\in[0,T]}$. On sait, de plus, que si $U \in {}^{r}H'_{T,0}$, L_x^{U} est la loi du processus défini par (6). On est donc dans le cas de l'application du principe des contractions.

En vertu de la proposition 5, il en résulte alors que:

$$
\begin{aligned}
i_x(m) &= \inf \{ \rho(U),\ U \in {}^{r}H'_{T,0} \text{ tel que } L_x^{U} = m \} \\
&= \inf \{ \tilde{\lambda}(g),\ g \in {}^{n}H_{T,0} \text{ tel que } L_x^{\Theta(g)} = m \} \\
&= \inf \{ \tilde{\lambda}(g),\ g \in {}^{n}H_{T,0} \text{ tel que } R_x^{g} = m \}
\end{aligned}
$$

Remarque

Soit $G_x = \{ L^{\varepsilon,g};\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\ ,\ g \in {}^{n}\Omega_{T,0} \} \subseteq \mathcal{M}_1({}^{d}\Omega_T)$ ($\varepsilon_0 > 0$ fixé).

(44)- $\overline{I_x({}^{d}A \cap G_x)}^{\,\circ} \le \varliminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \mathrm{Log}\ Q_{\varepsilon}({}^{d}A) \le \varlimsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \mathrm{Log}\ Q_{\varepsilon}({}^{d}A) \le -I_x(\overline{{}^{d}A \cap G_x})$ où I_x est la fonctionnelle de Cramer associée à i_x défini par (43), les signes $\circ$ et — désignent respectivement l'intérieur et la fermeture dans l'espace G_x, muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{M}_1({}^{d}\Omega_T)$.

Quand les champs de vecteurs $\tilde{A}_j^{\varepsilon}$, $1 \le j \le l$ sont tous nuls, dans ce cas X^{ε}, solution de (2) est une fonctionnelle régulière de Y^{ε}, la proposition 5 jointe au principe des contractions donne le résultat de Freidlin & Wentzell [11].

Nous renvoyons le lecteur à [1] et [12] pour le calcul explicite de $i_x(m)$ donné par (43), sous la condition que la matrice $a = A\ A^*$ est positive.

S 2-4 Majoration

Soit ${}^{d}F$ un fermé de ${}^{d}\Omega_{T,x}$, et pour tout $\delta > 0$ $({}^{d}F)^{\delta}$ le voisinage ouvert d'ordre δ de ${}^{d}F$ dans ${}^{d}\Omega_{T,x}$.

Pour simplifier dans cette section, nous supposons que les champs de vecteurs A_k^ε , $k \in \{1,..,n\}$, $\tilde{A}_j^\varepsilon$, $j \in \{1,..,n\}$et A_0^ε sont indépendants de ε.

Posons

(45) $\pi_x(({}^dF)^\delta) = \{ g \in {}^nH_{T,0}$ tel qu'il existe $\tilde{g} \in {}^1H_{T,0}$ vérifiant $\beta_x(g,\tilde{g}) \in ({}^dF)^\delta \}$, β_x est définie par (3) en faisant $\varepsilon = 0$.

$= \{ g \in {}^nH_{T,0}$ tel que $S_x\ (g) \cap ({}^dF)^\delta \neq \emptyset \}$ où $S_x\ (g)$ est défini par (7).

(45') $= \{ g \in {}^nH_{T,0}$ tel que $P\ \{X^g \in ({}^dF)^\delta\} > 0 \}$, à cause de (8).

(46) $\pi'_x\ (({}^dF)^\delta) = \{ U \in {}^rH'_{T,0}$ tel qu'il existe $\tilde{g} \in {}^1H_{T,0}$ vérifiant $(\beta_x)'(U,\tilde{g}) \in ({}^dF)^\delta \}$, $(\beta_x)'$ est définie par (32) en faisant $\varepsilon = 0$.

$= \{ U \in {}^rH'_{T,0}$ tel que $S'_x\ (U) \cap ({}^dF)^\delta \neq \emptyset \}$ avec

$S'_x\ (U) = \{ (\beta_x)'(U,\tilde{g})$ lorsque $\tilde{g} \in {}^1H_{T,0} \}$

Pour chaque $U = (g^I)_{I\in F} \in {}^rH'_{T,0}$ selon la notation (28), compte tenu de (8), on a:

(47) $\mathrm{Supp}\ X^U = \overline{\{ \beta_x(g,\tilde{g}),\ \tilde{g} \in {}^1H_{T,0} \}} = \overline{\{ (\beta_x)'(U,\tilde{g}),\ \tilde{g} \in {}^1H_{T,0} \}}$.

Il en résulte alors de (47) que l'on a:

(48) $\pi'_x\ (({}^dF)^\delta) = \{ U \in {}^rH'_{T,0}$ tel que $P\ (X^U \in ({}^dF)^\delta) > 0 \}$, où X^U est définie par (34), (35) et (38) en faisant $\varepsilon = 0$.

<u>Théorème</u> 8

Sous la condition S2, soient $X^\varepsilon = (X_t^\varepsilon)_{t\in[0,T]}$ la solution de (2) et ${}^dF$ un fermé de ${}^d\Omega_{T,x}$.

On a:

$$(49)\quad \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \mathrm{Log}\ P\ (X^\varepsilon \in {}^dF) \leq -\tilde{\Lambda}'\ \left(\overline{ U \in \overline{{}^r\Omega'_{T,0}} : L_x^U({}^dF) > 0 } \right)$$

$$\leq -\tilde{\Lambda}'\ \{ \bigcap_{\delta>0} \overline{\pi'_x\ (({}^dF)^\delta)} \}$$

$$\leq -\tilde{\Lambda}\ \{ \bigcap_{\delta>0} \overline{\pi_x\ (({}^dF)^\delta)} \}$$

où $\tilde{\Lambda}'$ est définie par (42) et (40) et $\tilde{\Lambda}$ par (4).

<u>Démonstration</u>

L_x^U étant, pour tout $U \in {}^rH'_{T,0}$ la loi du processus X^U défini par (36), (38) et (34) en faisant $\varepsilon = 0$, on considère le prolongement continu de l'application $U \longrightarrow L_x^U$ défini sur ${}^r\Omega'_{T,0}$ (théorème 6).

Soit ${}^dF$ un fermé de ${}^d\Omega_{T,x}$.

Puisque $Y^\varepsilon = (\varepsilon B)^F$, nous avons:

$P\ (X^\varepsilon \in {}^dF) = P\ (X^{\varepsilon,Y^\varepsilon} \in {}^dF)$ d'après (38):

$$= E\ \{L_x^{Y^\varepsilon}\ ({}^dF)\ \}$$

Donc par la proposition 5,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \text{Log } P\ (X^\varepsilon \in {}^dF) \le -\inf \{\ \rho(V),\ V \in \overline{\{\ U \in {}^r\Omega'_{T,0} \text{ tel que } L_x^U({}^dF) > 0\ \}}\ \}$$

Or

$$\overline{\{\ U \in {}^r\Omega'_{T,0} \text{ tel que } L_x^U({}^dF) > 0\ \}} \subseteq \overline{\{\ U \in {}^r\Omega'_{T,0} : L_x^U(({}^dF)^\delta) > 0\ \}}$$

$$\subseteq \{\ U \in {}^rH'_{T,0} : L_x^U(({}^dF)^\delta) > 0\ \}$$

car l'application : $U \in {}^r\Omega'_{T,0} \longrightarrow L_x^U\ (({}^dF)^\delta)$ est semi-continue inférieurement. Il suffit ensuite de remarquer, en revenant à l'égalité (48) que:

$\{\ U \in {}^rH'_{T,0} : L_x^U(({}^dF)^\delta > 0\ \} = \pi'_x\ (({}^dF)^\delta)$

Les 2 premières inégalités dans (49) sont donc démontrées, compte tenu des propriétés de la fonctionnelle d'action $\rho(.)$ de la diffusion Y^ε.

Il reste à démontrer la dernière inégalité. De l'égalité (45') et (48), on a par identification:

$\pi'_x\ (({}^dF)^\delta) = \Theta\ (\ \pi_x(({}^dF)^\delta)\ )$.

De plus, on a:

$$\bigcap_{\delta>0} \overline{\pi'_x\ (({}^dF)^\delta)} \subset \Theta\ (\ \bigcap_{\delta>0} \overline{\pi_x(({}^dF)^\delta)}\ ), \text{ à cause du fait que } Q_i^j = \delta_i^j.$$

Grâce à ce fait et en revenant à la définition de $\tilde{\Lambda}'$,on a l'assertion.

<u>Retour au problème posé</u>.

(50) Si l'algèbre de Lie est nilpotente d'ordre p, on obtient encore l'équivalent du théorème 4 de Doss & Stroock [1], sous une forme un peu affaiblie mais leur résultat de grandes déviations est toujours valable.

<u>Section 3 Etude des bornes de déviations de</u> $\overline{X}^\varepsilon = X^\varepsilon - X^0$.

On va appliquer les résultats de la section 1 et de la section 2 pour étudier la vitesse de convergence de $\overline{X}^\varepsilon$ vers 0, quand ε tend vers 0.

Nous considérons le couple $C^{\varepsilon}=(X^{\varepsilon},X^{0})$, C^{ε}est solution de l'E.D.S.

(51) $dC^{\varepsilon}_{t} = \varepsilon \sum_{k=1}^{n} E^{\varepsilon}_{k}(C^{\varepsilon}_{t}) \circ dB^{k}_{t} + \sum_{j=1}^{l} \tilde{E}^{\varepsilon}_{j}(C^{\varepsilon}_{t}) \circ d\tilde{B}^{j}_{t} + E^{\varepsilon}_{0}(C^{\varepsilon}_{t})\, dt;$

$C^{\varepsilon}_{0} = (x^{\varepsilon},x^{0})$.

où $E^{\varepsilon}_{k}(x,y) = \begin{bmatrix} A^{\varepsilon}_{k}(x) \\ 0 \end{bmatrix}$ pour chaque $k \in \{1,..n\}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^{d} \times \mathbb{R}^{d}$

$\tilde{E}^{\varepsilon}_{j}(x,y) = \begin{bmatrix} \tilde{A}^{\varepsilon}_{j}(x) \\ \tilde{A}_{j}(y) \end{bmatrix}$ pour chaque $j \in \{1,..l\}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^{d} \times \mathbb{R}^{d}$

$E^{\varepsilon}_{k}(x,y) = \begin{bmatrix} A^{\varepsilon}_{0}(x) \\ A_{0}(y) \end{bmatrix}$ pour chaque $(x,y) \in \mathbb{R}^{d} \times \mathbb{R}^{d}$

Dans le sens des projections, pour chaque $(x,y) \in \mathbb{R}^{d}\times\mathbb{R}^{d}$,on a:
$(x - y) = (p^{1} - p^{2})\,(x,y)$

Il en résulte que:
(52)$\bar{X}^{\varepsilon}=(p^{1}-p^{2})(C^{\varepsilon})$.

<u>Minoration.</u>

Sous la condition S 1, nous définissons les équivalents de (3), (5), (6), (7) et (8) pour le couple défini par (51).

Soient $\varepsilon > 0$, $x\in\mathbb{R}^{2d}$ et ${}^{c}\beta^{\varepsilon}_{\bar{x}}$ l'application de ${}^{n}H_{T,0} \times {}^{l}H_{T,0}$ dans ${}^{2d}\Omega_{T,\bar{x}}$ définie de la façon suivante:

(53) $(\varphi_{t}) = {}^{c}\beta^{\varepsilon}_{\bar{x}}(g,\tilde{g})_{t}$

si, et seulement si:

$$\varphi_{t} = \bar{x} + \int_{0}^{t} E^{\varepsilon}(\varphi_{s})\, dg_{s} + \int_{0}^{t} \tilde{E}^{\varepsilon}(\varphi_{s})\, d\tilde{g}_{s} + \int_{0}^{t} E^{\varepsilon}_{0}(\varphi_{s})\, ds\ ,\ t \in [0,T]\ ,\ \forall\, g \in {}^{n}H_{T,0}$$

et $\tilde{g} \in {}^{l}H_{T,0}$.

On désignera de même, ${}^{c}\beta_{\bar{x}}$ la solution de (53), quand on remplace les coefficients E^{ε}, $\tilde{E}^{\varepsilon}$ et E^{ε}_{0} par leurs limites respectives E, $\tilde{E}$ et E_{0} lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Nous considérons la fonctionnelle ${}^{c}\lambda_{\bar{x}}$ de ${}^{2d}\Omega_{T,\bar{x}}$ dans $\bar{\mathbb{R}}^{+}$ définie de la façon suivant pour tout $\psi \in {}^{2d}\Omega_{T,\bar{x}}$:

(54) ${}^{c}\lambda_{\bar{x}} = \inf \{\tilde{\lambda}(g)$ où $g \in {}^{n}\Omega_{T,0}$ est tel qu'il existe $\tilde{g} \in {}^{1}H_{T,0}$ vérifiant: $\psi = {}^{c}\beta_{\bar{x}}(g,\tilde{g})\}$.

Avec la convention $\inf(\emptyset) = +\infty$

${}^{c}\Lambda_{\bar{x}}({}^{2d}A) = \inf \{ {}^{c}\lambda_{\bar{x}}(\psi)$, lorsque ψ parcourt ${}^{2d}A\}$ si ${}^{2d}A$ est un borélien de ${}^{2d}\Omega_{T,\bar{x}}$.

Considérons, pour chaque $g \in {}^{n}H_{T,0}$ le processus $C^{g} = (C^{g}_{t})$, solution de:

$$(55)\quad C^{g}_{t} = \bar{x} + \int_{0}^{t} E(C^{g}_{s})dg_{s} + \int_{0}^{t} \tilde{E}(C^{g}_{s})\circ d\tilde{B}_{s} + \int_{0}^{t} E_{0}(C^{g}_{s})ds \text{ avec } \bar{x} = (x,x) \in \mathbb{R}^{2d}$$

Posons:

(56) ${}^{c}S_{\bar{x}}(g) = \{ {}^{c}\beta_{\bar{x}}(g,\tilde{g})$ lorsque $\tilde{g}$ parcourt ${}^{1}H_{T,0}\}$.

Par le théorème du support topologique de Stroock-Varadhan,

(57) $\mathrm{Supp}\ C^{g} = \overline{{}^{c}S_{\bar{x}}(g)}$. Ici, $\bar{A}$ désigne la fermeture de A.

Nous définissons aussi une fonctionnelle d'action λ'_{0} de ${}^{d}\Omega_{T,0}$ dans $[0,+\infty]$ pour le processus défini par (52) par:

(58) $\lambda'_{0}(\psi') = \inf \{{}^{c}\lambda_{\bar{x}}(\psi)$ lorsqu' il existe $\psi \in {}^{2d}\Omega_{T,\bar{x}}$ tel que:

$$(p^{1} - p^{2})(\psi) = \psi' \}$$

Nous posons aussi:

(59) $\Lambda'_{0}({}^{d}A) = \inf \{\lambda'_{0}(\psi')$ lorsque $\psi' \in {}^{d}A \}$ si ${}^{d}A$ est un borélien de ${}^{d}\Omega_{T,0}$.

<u>Théorème</u> 9.

Sous la condition S1,

1) Soit ${}^{2d}O$ un ouvert de ${}^{2d}\Omega_{T,\bar{x}}$ et ${}^{c}\Lambda_{\bar{x}}$ définie par la formule (54), alors on a:

${}^{c}\Lambda_{\bar{x}}({}^{2d}O) = \inf \{ \tilde{\lambda}(g)$, où $g \in {}^{n}H_{T,0}$ est tel que $P(C^{g} \in {}^{2d}O) > 0 \}$, C^{g} étant défini par (55).

De plus, on a:

(61) $\lim\inf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{2} \operatorname{Log} P(C^{\varepsilon} \in {}^{2d}O) \geq -{}^{c}\Lambda_{\bar{x}}({}^{2d}O)$.

2) Soit ${}^{d}O$ un ouvert de ${}^{d}\Omega_{T,0}$. On a:

(61) $\lim\inf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{2} \operatorname{Log} P(\bar{X}^{\varepsilon} \in {}^{d}O) \geq -\Lambda'_{0}({}^{d}O)$, où Λ'_{0} est donnée par (59).

<u>Démonstration:</u>

Le point 1) résulte du théorème 1 pour l'équation définie par (51).

Le point 2) résulte du principe des contractions. Il est clair que $p^1 - p^2$ est continue comme étant une différence de projection.

Soit $\psi' \in {}^dO$ arbitraire et $\psi \in {}^{2d}\Omega_{T,\bar{x}}$ telle que $(p^1 - p^2)(\psi) = \psi'$. Il existe un voisinage ouvert V de ψ tel que: $(p^1 - p^2)(V) \subseteq {}^dO$. Donc: $P(\bar{X}^\varepsilon \in {}^dO) \geq P(C^\varepsilon \in V)$.

D'où $\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} P(\bar{X}^\varepsilon \in {}^dO) \geq \liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} P(C^\varepsilon \in V) \geq -{}^c\Lambda_{\bar{x}}(\psi)$.

Ceci étant pour tout ψ telle que $(p^1 - p^2)(\psi) \in {}^dO$. Donc on a (61).

Majoration.

Sous la condition S2, il est clair que l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs $E_1^\varepsilon(x,y), \ldots, E_n^\varepsilon(x,y)$ est aussi nilpotente d'ordre p. Par conséquent, nous avons les équivalents précis du lemme 3 et des théorème 4, 6, 7 et 9 pour le couple C^ε défini par (55) avec les changements évidents.

Ici le prolongement $({}^c\beta^\varepsilon_{\bar{x}})'$ est défini par la formule:

(62) $({}^c\beta^\varepsilon_{\bar{x}})'(U,\tilde{g})_t = {}^ch^\varepsilon(0,\ldots,0,{}^cD_t^{\varepsilon,U};U_t)$, $(U,\tilde{g}) \in {}^r\Omega'_{T,0} \times {}^lH_{T,0}$, où:

${}^cD^{\varepsilon,U}_t = ({}^cD^{\varepsilon,U}_t)_{t\in[0,T]}$ est solution de l'équation différentielle ordinaire:

$$(63)\quad d\,{}^cD_t^{\varepsilon,U} = \sum_{i=1}^{2d} \Big\{ E_0^{\varepsilon,i}({}^ch^\varepsilon(\underbrace{0,\ldots,0}_{m},{}^cD_t^{\varepsilon,U};\ U_t)) \times \partial_{m+i}\,{}^ch^\varepsilon\ ({}^cf^\varepsilon(\underbrace{0,\ldots,0}_{m},{}^cD_t^{\varepsilon,U}$$

$$;\ U_t);\underbrace{0,\ldots,0}_{r})\,dt + \sum_{j=1}^{l} [\ \tilde{E}_j^{\varepsilon,i}\ ({}^ch^\varepsilon\ (\underbrace{0,\ldots,0}_{m},{}^cD_t^{\varepsilon,U};U_t))$$

$$\times\ \partial_{m+i}\ {}^ch^\varepsilon({}^cf^\varepsilon(\underbrace{0,\ldots,0}_{m},{}^cD_t^{\varepsilon,U}\ ;U_t);\underbrace{0,\ldots,0}_{r})\ d\tilde{g}_t^j\ ]\ \Big\}$$

${}^cD_0^{\varepsilon,U} = x \in \mathbb{R}^{2d}$ et ${}^ch^\varepsilon$ est définie comme dans (21) à (26) où l'on a remplacé les champs de vecteurs $A_k^\varepsilon(x)$ sur $\mathbb{R}^d$ par les champs de vecteurs $E_k^\varepsilon(x,y)$ définis sur $\mathbb{R}^{2d}$.

Théorème 10.

Sous la condition S 2, pour tout $\varepsilon>0$, notons ${}^cR^{\varepsilon,g}$ la loi du processus $C^{\varepsilon,g}$, défini pour chaque $g \in {}^nH_{T,0}$. Pour chaque $U \in {}^rH'_{T,0}$, notons ${}^cL^{\varepsilon,U}$ la loi du processus défini comme en (36) et (38), solution de (34) pour le couple C^ε, solution de (51). ${}^cL^{\varepsilon,U} = {}^cL^{\varepsilon,\Theta(g)}$ si $U = \Theta(g)$.

Alors l'application qui à :
$g \in {}^{n}H_{T,0} \longrightarrow {}^{c}R^{\varepsilon,g}$ dans $M_1({}^{2d}\Omega_T)$ admet un prolongement mesurable défini p.s. sur l'espace ${}^{n}\Omega_{T,0}$, noté encore ${}^{c}R^{\varepsilon,g}$ à valeurs dans $M_1({}^{2d}\Omega_T)$, avec ${}^{c}R^{\varepsilon,\cdot} = {}^{c}L^{\varepsilon,\Theta(\cdot)}$, où ${}^{c}L^{\varepsilon,*}$ est le prolongement continu sur ${}^{r}\Omega'_{T,0}$ pour la norme uniforme de l'application qui à:
$U \in {}^{r}H'_{T,0} \longrightarrow {}^{c}L^{\varepsilon,U}$ défini comme dans la formule (36) et (38), solution de (34) à valeurs dans $M_1({}^{2d}\Omega_T)$. Le prolongement continu ${}^{c}L^{\varepsilon,*}$ est une version régulière de la loi conditionnelle de $C^{\varepsilon} = (C^{\varepsilon}_t)_{t\in[0,T]}$, sachant $Y^{\varepsilon} = \Theta(\varepsilon B) = ((\varepsilon B)_t)^{F}_{t[0,T]}$.

Le prolongement mesurable ${}^{c}R^{\varepsilon,\cdot}$ est une version régulière de la loi conditionnelle de $C^{\varepsilon} = (C^{\varepsilon}_t)_{t\in[0,T]}$, sachant $\varepsilon B = (\varepsilon B_t)_{t\in[0,T]}$ vérifiant la propriété de continuité:

$\forall\, \alpha > 0$, $P\ (\ \delta\ ({}^{c}R^{\varepsilon,\varepsilon B}, {}^{c}R^{\varepsilon,g}) \geq \alpha\ /\ \| \varepsilon B - g \| < \tau\ ) \longrightarrow 0$ quand $\tau \longrightarrow 0$.

<u>Théorème</u> 11

Sous la condition S 2, pour tout $\varepsilon>0$, soit ${}^{c}R^{\varepsilon,\cdot}$ la loi conditionnelle régulière du processus $C^{\varepsilon} = (C^{\varepsilon}_t)_{t\in[0,T]}$, solution de (51) sachant $\varepsilon B = (\varepsilon B_t)_{t\in[0,T]}$ définie dans le théorème 10

Notons ${}^{c}Q_{\varepsilon}$ la loi de la variable aléatoire $\mathcal{X}_{\varepsilon}(\omega) = {}^{c}R^{\varepsilon,\varepsilon B(\omega)}$.

${}^{c}Q_{\varepsilon}$ est un élément de $M_1(M_1({}^{2d}\Omega_T))$ des mesures de probabilités sur $M_1({}^{2d}\Omega_T)$, muni de la topologie de la convergence étroite.

Alors la famille $({}^{c}Q_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ satisfait à un principe de grandes déviatio ns avec la fonctionnelle d'action:
(64) ${}^{c}i_{\bar{x}}(m) = \inf\ \{\ \tilde{\lambda}(g),\ g \in {}^{n}H_{T,0}$ tel que ${}^{c}R^{g}_{\bar{x}} = m\ \}$, où ${}^{c}R^{g}_{\bar{x}}$ est la loi du processus défini par (55), $\tilde{\lambda}$ définie par (4), $m \in M_1({}^{2d}\Omega_T)$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^{2d}$.

${}^{c}R^{0,g}_{\bar{x}} = {}^{c}R^{g}_{\bar{x}}$ désigne la loi du processus défini par (34), (36) et (38) en remplaçant A^{ε}, $\tilde{A}^{\varepsilon}$ et A^{ε}_0 successivement par E^{ε}, $\tilde{E}^{\varepsilon}$ et E^{ε}_0 et en faisant $\varepsilon = 0$.

<u>Théorème</u> 12.

1) Sous la condition S 2, soient $C^{\varepsilon} = (C^{\varepsilon}_t)_{t\in[0,T]}$ la solution de (51) et ${}^{2d}F$ un fermé de ${}^{2d}\Omega_{T,\bar{x}}$.

On a:

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} P(C^{\varepsilon} \in {}^{2d}F) \leq -\tilde{\lambda}'\ \overline{\{\ U \in {}^{r}\Omega'_{T,0} :\ {}^{c}L^{U}_{\bar{x}}\ ({}^{2d}F) > 0\ \}}$$

$$\leq - \tilde{\Lambda}' \{ \bigcap_{\delta>0} \overline{{}^c\pi'_{\bar{x}}(({}^{2d}F)^\delta)} \}$$

$$\leq - \tilde{\Lambda} \{ \bigcap_{\delta>0} \overline{{}^c\pi_{\bar{x}} \; (({}^{2d}F)^\delta)} \}$$

où $\tilde{\Lambda}'$ est définie par (42) et (40) et $\tilde{\Lambda}$ par (4).
${}^c\pi'_{\bar{x}}({}^{2d}A) = \{ U \in {}^rH'_{T,0}$, lorsqu'il existe $g \in {}^1H_{T,0}$ vérifiant$({}^c\beta_{\bar{x}})'(U,\tilde{g}) \in {}^{2d}A \}$, si ${}^{2d}A$est un borélien de ${}^{2d}\Omega_{T,\bar{x}}$

et $({}^{2d}A)^\delta$ est le δ-voisinage de ${}^{2d}A$.
${}^c\pi_{\bar{x}}({}^{2d}A) = \{ g \in {}^nH_{T,0}$, lorsqu'il existe $\tilde{g} \in {}^1H_{T,0}$ vérifiant${}^c\beta_{\bar{x}}(g,\tilde{g}) \in {}^{2d}A\}$

2) Même hypothèse. Soit ${}^dF$ un fermé de ${}^d\Omega_{T,0}$. On a:

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} P(\bar{X}^\varepsilon \in {}^dF) \leq - \tilde{\Lambda}' \{ \bigcap_{\delta \geq 0} \overline{{}^c\pi'_{\bar{x}} \; ((p^1 - p^2)^{-1} \; ({}^dF)^\delta)} \},$$

$$\leq - \tilde{\Lambda} \{ \bigcap_{\delta>0} \overline{{}^c\pi_{\bar{x}} \; ((p^1 - p^2)^{-1} \; ({}^dF)^\delta)} \}$$

$\bar{X}^\varepsilon$ est défini par (52).

Démonstration.

Le point 1) résulte du théorème 8.

Pour le point 2), on pose ${}^{2d}F = \{ (.,*) \in {}^{2d}\Omega_{T,\bar{x}}: \; (p^1 - p^2)(.,*) \in {}^dF\}$. ${}^{2d}F$ est un fermé de ${}^{2d}\Omega_{T,\bar{x}}$.

D'où $P(\bar{X}^\varepsilon \in {}^dF) = P(C^\varepsilon \in {}^{2d}F)$. Et on applique 1).

Remerciement.

Ce travail nous a été proposé par H. Doss & D.W. Stroock, à qui nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance.

Bibliographie.

[1] DOSS, H. & STROOCK, D.W.(1991). Nouveaux résultats concernant les petites perturbations de systèmes dynamiques. J. Funct. Anal. Vol.**101** n°2, Nov.1.

[2] YAMATO, Y.,(1979) Stochastic Differential Equations and Nilpotent Lie Algebras, Z. Wharsch. verw. Gebiete **47**, 213-229.

[3] VARADHAN, S.R.S. (1984), "Large Deviations and Applications", Siam Philadelphia.

[4] FREIDLIN, M.I. (1985),"Functional Integration and Partial Differenti al Equations". Princeton University Press, Princeton(N.J.)

[5] BEZUIDENHOUT, C. (1987), Singular perturbations of degenerate diffus ion. The Annals of Probability, vol.**15**, n°3, 1014-1043.

[6] FREIDLIN, M.I. & GARTNER, J. (1978) A new contribution to the questi on of large deviations for random process. Vestnik Moskow Univ., Ser. I Mat. Meh **5**, 52-59.

[7] STROOCK D.W. & VARADHAN, S.R.S. (1972) On the support of diffusion process with applications to the strong maximum principle. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., **3**, 333-360, Univ. California Press.

[8] HARDY, G.H. & LITTLEWOOD, J.E. & POLYA, G., (1950) "Inequalities", Cambridge at the University Press.

[9] KUNITA, H. (1980), On the representation of solutions of stochastic differential equations, in " Séminaire de Probabilités XIV 1978/79 " (Réd. J. Azéma et M. Yor), Lect. Notes in Math.**784**, p. 282-304, Springer-Verlag,Berlin.

[10] AZENCOTT, R. (1980)," Grandes déviations et applications", Ecole d'Eté de Proba. de Saint Flour, VIII 1978. Lect. Notes in Math.**774**, p. 1-76. Springer-Verlag.

[11] FREIDLIN, M.I. & WENTZELL, A.D., (1970), Small random perturbations of dynamical systems. Russian Math Surveys, **25**, 1-55.

[12] RABEHERIMANANA, T.J. (1992) Petites Perturbations de Systèmes Dynam iques et Algèbres de Lie Nilpotentes. Thèse de l' Université Paris 7.

*T.J. RABEHERIMANANA
UFR de mathématiques
Université Paris VII
75 251 PARIS CEDEX 05 75 634

**S.N. SMIRNOV
Dpt of Computational Math
and Cybernetics,
Chair of Math. Stat.
Russie, Moscou.