SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

LAURENT SCHWARTZ

Semi-martingales banachiques : le théorème des trois opérateurs

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 28 (1994), p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1994__28__1_0>

SEMI-MARTINGALES BANACHIQUES :

LE THÉORÈME DES TROIS OPÉRATEURS

Laurent SCHWARTZ

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex (France)

Je suis heureux de dédier cet article à Paul-André MEYER et Jacques NEVEU qui ont joué un rôle essentiel dans la formation des probabilistes français, et en particulier dans la mienne.

INTRODUCTION.

L'origine de cet article est la thèse de S. Ustunel, où il démontre une forme un peu différente du théorème VII de cet article. Il utilise le théorème des 3 opérateurs, ici V, dans le cas très particulier où les Banach considérés sont hilbertiens, et les opérateurs de Hilbert-Schmidt. Je me suis donc demandé à ce moment si on ne pouvait pas étendre ce théorème des 3 opérateurs à des Banach quelconques, avec des opérateurs radonifiants. Et j'ai écrit un article, faisant cette généralisation. Mais la technique, et même les énoncés, étaient très lourds, et je ne l'ai pas publié (1981). Récemment, A. Badrikian et S. Ustunel, utilisant mon manuscrit, ont introduit des méthodes nouvelles très différentes, apportant une simplification notable. Mais leur texte avait le défaut de faire sur les applications sommantes des hypothèses trop fortes, guère réalisées en dehors du cas Hilbert-Schmidt et du cas nucléaire.
J'y ai donc réfléchi de nouveau, et j'ai écrit le présent article avec des hypothèses faibles, et encore des méthodes très différentes.
Je le signe seul, mais je ne saurais trop dire combien leur article intermédiaire m'a inspiré dans le déroulement de la suite des énoncés et les techniques utilisées ; qu'ils en soient remerciés.

Le lecteur aura avantage à regarder d'abord les théorèmes VI et VII (d'Ustunel) pour comprendre le pourquoi des développements successifs.

1. PRÉLIMINAIRES.

(1.1) Si E et F sont des espaces de Banach, on dit qu'un opérateur u de E dans F est p-sommant[(1)], $0 < p \leq +\infty$, s'il transforme toute suite scalairement ℓ^p de E en une suite ℓ^p de F (une suite $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite scalairement ℓ^p si, pour tout $\xi \in E'$, la suite $(\langle \xi, e_n\rangle)_{n\in\mathbf{N}}$ est ℓ^p). Il existe donc une constante $\pi_p(u)$, la plus petite possible, telle que, pour toute suite (e_n) de E, on ait :

$$(1.2) \quad \begin{cases} \|(u(e_n))\|_{\ell^p(F)} \leq \pi_p(u)\|(e_n)\|_{S\ell^p(E)} \quad \text{(où } S\ell^p \text{ veut dire scalairement } \ell^p) \\ \overset{\text{(déf.)}}{=} \pi_p \sup\limits_{\substack{\xi\in E' \\ |\xi|_E \leq 1}} \|(\langle \xi, e_n\rangle)\|_{\ell^p} \,. \end{cases}$$

Le nombre $\pi_p(u)$ s'appelle la norme p-sommante de u, bien que, pour $p < 1$, elle ne soit qu'une p-quasi-norme. Il est équivalent de dire que, si λ est une probabilité sur E, formée d'un nombre fini de masses ponctuelles, on a

$$(1.3) \quad \begin{cases} \|u(\lambda)\|_p \overset{\text{(déf.)}}{=} \left(\int_F |y|_F^p (u(\lambda))(dy)\right)^{1/p} \\ \leq \pi_p(u)\|\lambda\|_p^* \overset{\text{(déf.)}}{=} \sup\limits_{\substack{\xi\in E' \\ |\xi|_{E'} \leq 1}} \|\xi(\lambda)\|_p \\ = \sup\limits_{\substack{\xi\in E' \\ |\xi|_{E'} \leq 1}} \left(\int_{\mathbf{R}} |t|^p \xi(\lambda))(dt)\right)^{1/p} , \end{cases}$$

avec les modifications évidentes pour $p = +\infty$.

On appelle p-type de λ le nombre $\|\lambda\|_p^*$, et p-ordre de $u(\lambda)$ le nombre $\|u(\lambda)\|_p$.

On définit ensuite les probabilités cylindriques λ sur E, et leur type $\|\lambda\|_p^*$; nous ne le définirons pas parce que nous n'en aurons pas besoin. On dit alors que u est p-radonifiante de E dans F, si elle transforme toute probabilité cylindrique λ de type p en une probabilité de Radon $u(\lambda)$ d'ordre p sur F. Il existe alors une constante $\Pi_p(u)$, la plus petite possible, telle que, pour toute λ cylindrique de type p, on ait :

$$(1.4) \qquad \|u(\lambda)\|_p \leq \Pi_p(u)\|\lambda\|_p^* \,.$$

Une application p-radonifiante est a fortiori p-sommante, mais la réciproque n'est pas vraie ; et toujours $\Pi_p(u) \geq \pi_p(u)$ (en prenant $\pi_p(u) = +\infty$ si u n'est pas p-sommante, $\Pi_p(u) = +\infty$ si elle n'est pas p-radonifiante). Si u est p-sommante (resp. p-radonifiante), elle est q-sommante (resp. q-radonifiante), pour $q \geq p$, et $\pi_q(u) \leq \pi_p(u)$, $\Pi_q(u) \leq \Pi_p(u)$.

(1.5) On peut aussi parler de O-sommante et O-radonifiante, mais les définitions sont plus compliquées.

Soit μ une probabilité de Radon sur F ; par définition, elle est d'ordre O. Pour préciser cet ordre, on introduit les jauges ou poids J_β, $0 \leq \beta \leq 1$, d'autant plus grandes que β est plus petit :

$$(1.6) \qquad J_\beta(\mu) \overset{\text{(déf.)}}{=} \inf(=\min)\{M > 0 \; ; \; \mu\{|\cdot|_F > M\} \leq \beta\} \,.^{(2)}$$

On a toujours $J_\beta(\delta) = 0$, autrement $J_\beta(\mu) > 0$ pour α assez petit ; $J_\beta(\mu) < +\infty$ pour $\beta > 0$; des probabilités μ_j convergent étroitement vers δ ssi $J_\beta(\mu_j)$ tend vers 0 quel que soit $\beta > 0$. On a les équivalences :

(1.7) $$J_\beta(\mu) \leq c \Leftrightarrow \mu\{|\cdot|_F > c\} \leq \beta .$$

$\Leftrightarrow$ la norme est $\leq c$ sauf sur un ensemble de μ-mesure $\leq \beta$.

Si maintenant λ est une probabilité cylindrique sur E, $\xi(\lambda)$ est une probabilité de Radon sur $\mathbf{R}$, et on définit

(1.8) $$\|\lambda\|_\alpha^* = \sup_{\substack{\xi \in E' \\ |\xi|_{E'} \leq 1}} J_\alpha(\xi(\lambda)) .$$

On dit que λ est de type O si $\|\lambda\|_\alpha^* < +\infty$ pour tout $\alpha > 0$; et alors $\|\lambda\|_\alpha^*$ est son O-type pour la jauge J_α. On voit facilement que λ est de type O ssi $\xi(\lambda)$ tend vers δ étroitement sur $\mathbf{R}$ quand $\xi \in E'$ tend vers O.

Sans nous occuper des applications O-sommantes dont nous n'aurons pas besoin, on dit que μ est O-radonifiante si, pour toute probabilité cylindrique λ de type O sur E, $u(\lambda)$ est une probabilité de Radon sur F, nécessairement d'ordre O donc portée par un sous-Banach séparable de F ; cela équivaut à dire que, pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ et $C \geq 0$ telles que, pour toute probabilité cylindrique λ de type O sur E :

(1.9) $$\|u(\lambda)\|_\beta \leq C\|\lambda\|_\alpha^* .$$

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. On appelle $L^0(\Omega, \mathbf{P}; F)$ l'espace des $\mathbf{P}$-classes d'applications strictement $\mathbf{P}$-mesurables de Ω dans F. Pour toute $f \in L^0(\Omega, \mathbf{P}; F)$, on pose

(1.10) $$J_\beta(f, \mathbf{P}) = J_\beta(f(\mathbf{P})) = \inf\{M \; ; \; \mathbf{P}\{|f|_F > M\} \leq \beta\} .$$

On a les équivalences :

(1.11) $$\begin{cases} J_\beta(f, \mathbf{P}) \leq c \Leftrightarrow \mathbf{P}\{|f|_F > c\} \leq \beta \\ \iff |f|_F \leq c \text{ sauf sur un ensemble de } \mathbf{P} \text{ mesure} \leq \beta . \end{cases}$$

Rappelons que f strictement mesurable veut dire : f mesurable et prenant ses valeurs dans un sous-Banach séparable de F.
Un système fondamental de voisinages de O de l'espace vectoriel $L^0(\Omega, \mathbf{P}; F)$ est, par définition, l'ensemble des $\{f; J_\beta(f, \mathbf{P}) \leq \varepsilon\}$, $0 < \beta < 1$, $\varepsilon > 0$; c'est alors un espace vectoriel topologique métrisable et complet, non localement convexe en général.

(1.12) Une application linéaire v de F' dans E' est dite p-décomposante si, pour toute application linéaire L de E' dans $L^p(\Omega, \mathbf{P})$, il existe une "décomposition" ou un "relèvement" $X^\cdot = X^\cdot(L) \in L^p(\Omega, \mathbf{P}; F)$, nécessairement unique, tel que, pour toute $\eta \in F'$:

$$\langle X^\cdot, \eta\rangle_{F,F'} = L \circ v(\eta)\,. \tag{1.13}$$

Il est équivalent de dire qu'il existe une plus petite constante $K_p(v)$ telle que, pour toute L :

$$\|X^\cdot\|_{L^p(\Omega,\mathbf{P};F)} \leq K_p(v)\|L\|_{\mathcal{L}(E';L^p(\Omega,\mathbf{P}))}\,. \tag{1.14}$$

Ceci est valable pour $0 < p \leq +\infty$. Le théorème fondamental est alors le suivant :

(1.15) *$u : E \to F$ est p-radonifiante ssi $v = {}^t u : F' \to E'$ est p-décomposante, et $\Pi_p(u) = K_p({}^t u)$.*

Dans la définition de v décomposante, on peut naturellement faire $p = 0$; mais (1.14) est à remplacer par :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Pour toute } L, \text{ pour tout } \beta > 0, \text{ il existe } \alpha > 0 \text{ et } C \geq 0 \text{ telles que} \\ \qquad J_\beta(X, \mathbf{P}) \leq C J_\alpha^*(L, \mathbf{P}) \overset{(\text{déf.})}{=} C \sup\limits_{\substack{\xi\in E' \\ |\xi|_{E'}\leq 1}} J_\alpha(L(\xi), \mathbf{P})\,.\end{array}\right. \tag{1.16}$$

Le théorème (1.15) est encore valable pour $p = 0$, mais $\Pi_p(u) = K_p({}^t u)$ est à remplacer par : les β, α, C qui interviennent dans (1.16) relativement à $({}^t u)$ sont les mêmes que ceux qui interviennent dans (1.9) relativement à u.

Voila pourquoi nous n'avons pas donné toutes les définitions dans la radonification : nous nous servirons *exclusivement* des propriétés de décomposition de $({}^t u)$ et non de radonification de u, et nous écrirons $\Pi_p(u)$ au lieu de $K_p({}^t u)$.

Il peut être "agréable", au lieu de considérer X comme un relèvement de L, de considérer que $\widetilde{L}$ est un processus "fictif" à valeurs dans E, défini par L, et que u le transforme en un processus vrai à valeurs dans F ; au lieu d'écrire que X relève $L \circ {}^t u$, on dira que $X = u(\widetilde{L})$, qu'on écrira aussi $u(L)$, L processus fictif, $u(L) = X$ processus vrai.

2. FONCTIONS CONTINUES À VALEURS BANACHIQUES.

(2.1) Dans la suite, K sera un espace compact K séparable (non nécessairement métrisable). On munira $C(K)$, espace des fonctions continues sur K, de la norme usuelle, $|f|_{C(K)} = \sup_{t \in K} |f(t)| = \sup_{t' \in K'} |f(t')|$, si K' est un ensemble dénombrable dense dans K. L'espace $C(K)$ sera muni d'une tribu qui, en général, ne sera pas sa tribu borélienne, mais sera engendrée par les $\delta_{(t)}$, $t \in K$, ou les $\delta_{(t')}$, $t' \in K'$: une application L de $(\Omega, \mathbf{P})$ à valeurs dans $C(K)$ sera $\mathbf{P}$-mesurable si, pour tout $t \in K$ (ou $t' \in K'$), L_t (ou $L_{t'}$) est $\mathbf{P}$-mesurable ; c'est une tribu dénombrablement engendrée.

Si K est métrisable, c'est la tribu borélienne de $C(K)$ polonais, car c'est la tribu borélienne de la topologie moins fine induite par $\mathbf{R}^{K'}$. On fera de même pour l'espace $C(K; F)$ des fonctions continues à valeurs dans un Banach F, qui, dans la suite, sera séparable. Mais on aura aussi besoin de considérer l'espace $C(K; \sigma(F'', F'))$, des fonctions à valeurs dans le bidual F'', mais seulement $*$-scalairement ou $*$-faiblement continues, et on utilisera $X^{\cdot} \in L^p_*(\Omega, \mathbf{P}; C(K; \sigma(F'', F')))$. La tribu de $C(K; \sigma(F'', F'))$ sera celle qui est engendrée par les $t \in K$ et les $\eta \in F'$, et $X^{\cdot}$ devra être $\mathbf{P}$-mesurable dans $C(K; \sigma(F'', F'))$ muni de cette tribu ; c'est la signification de l'étoile $*$ dans L_* ; pour $f \in C(K; \sigma(F'', F'))$, $|f|$ sera encore $\sup_{t \in K} |f(t)|_{F''} = \sup_{t' \in K'} |f(t')|_{F''}$. Mais on exigera que, pour tout $t \in K$, $X^{\cdot}_t$ soit $\mathbf{P}$-mesurable à valeurs dans F, donc $|X^{\cdot}_t|_F$ $\mathbf{P}$-mesurable ≥ 0, donc $|X^{\cdot}|_{C(K;\sigma(F'',F'))} \geq 0$ $\mathbf{P}$-mesurable,

$$
(2.2) \quad \begin{cases} |X^{\cdot}|_{C(K;\sigma(F'',F'))} = \sup_{t \in K} |X^{\cdot}_t|_{F''} = \sup_{t' \in K'} |X^{\cdot}_{t'}|_F \quad \text{si } K' \text{ est} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{dénombrable dense dans } K \\ \|X^{\cdot}\|_{L^p_*(\Omega,\mathbf{P};C(K;\sigma(F'',F')))} \\ \quad = \left(\int_\Omega |X^{\cdot}(\omega)|^p_{C(K;\sigma(F'',F'))} \mathbf{P}(d\omega) \right)^{1/p} . \end{cases}
$$

Si F est séparable et réflexif, F' l'est aussi, la tribu engendrée sur F par les $\eta \in F'$ est en fait dénombrablement engendrée, c'est la tribu borélienne de $\sigma(F, F')$, donc c'est aussi celle de F polonais (et $\sigma(F', F)$ est lusinien puisque F est séparable comme réunion de boules de F' compactes métrisables pour $\sigma(F', F)$).

Si en outre K est métrisable, $C(K; \sigma(F, F'))$ est lusinien [Soit B la boule unité de F, compact métrisable pour $\sigma(F, F')$; les $\eta \in D'$ l'envoient homéomorphiquement sur un compact de $\mathbf{R}^{D'}$; $C(K; B)$ est alors un fermé de $C(K; \mathbf{R}^{D'}) = (C(K))^{D'}$, donc polonais ; enfin $C(K; \sigma(F, F')) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} C(K; nB)$] ; donc, si K est métrisable et F réflexif séparable, la tribu que nous avons définie sur $C(K; \sigma(F, F'))$, par les $\delta_{(t)}$ et les η, est sa tribu borélienne.

La situation générale fait intervenir un espace bi-topologique : $F'', \sigma(F'', F')$; dans $C(K; \sigma(F'', F'))$, la continuité est à valeurs dans $\sigma(F'', F')$, mais la norme est relative à $|\cdot|_{F''}$.[3]

Rappelons enfin que K est métrisable ssi $C(K)$ est séparable, mais que le dual $M(K)$, espace des mesures de Radon sur K, muni de la topologie $\sigma(M(K), C(K))$

est toujours séparable, parce que les $\delta_{(t)}$, t dans un ensemble dénombrable dense de K, forment un ensemble total.

(2.3) **Théorème I.**— *Soient K un compact séparable (non nécessairement métrisable), E, F, des Banach, u une application p-radonifiante de E dans F, L un "processus fictif" à valeurs dans $C(K;E)$, $L \in \mathcal{L}(E'; L^p(\Omega, \mathbf{P}; C(K)))$.*
Alors $L \circ {}^t u = u(L) \in \mathcal{L}(F'; C(K))$ se relève en une classe de processus $X^{\cdot} = X^{\cdot}(L) \in L^p_*(\Omega, \mathbf{P}; C(K; \sigma(F_0'', F_0')))$ où F_0 est un sous-Banach séparable convenable de F, donc F_0'' l'adhérence $*$-faible de F_0 dans F''.

Pour $p > 0$, on a :

$$\|X^{\cdot}\|_{L^p(\Omega,\mathbf{P};C(K;\sigma(F_0'',F_0')))} \leq \Pi_p(u)\|L\|_{\mathcal{L}(E';L^p(\Omega,\mathbf{P};C(K)))}\,. \tag{2.4}$$

Donc $|X^{\cdot}|_{F_0''}$ est majoré par une variable aléatoire M, avec

$$\|M\|_{L^p(\Omega,\mathbf{P})} \leq \Pi_p(u)\|L\|_{\mathcal{L}(E';L^p(\Omega,\mathbf{P};C(K)))}\,. \tag{2.5}$$

Pour $p = 0$, quel que soit $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ et $C \geq 0$ tels que

$$J_\beta(X^{\cdot}, \mathbf{P}) \leq C J_\alpha^*(L, \mathbf{P}) = \sup_{\substack{\xi \in E' \\ |\xi| \leq 1}} J_\alpha(L(\xi, \mathbf{P}))\,, \tag{2.6}$$

où β, α, C sont les mêmes que dans (1.9) ou (1.16).

(2.7) **Démonstration.** Prenons d'abord $p > 0$.

Soit T une variable aléatoire étagée $\mathbf{P}$-mesurable à valeurs dans K. Si $\xi \in E'$, $L(\xi)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $C(K)$, on peut prendre sa valeur sur T, comme on le fait couramment en probabilités : $L(\xi)_T(\omega) = L(\xi)(\omega)\ (T(\omega)) \in \mathbf{R}$, $L(\xi)(\omega)$ est une fonction continue sur K, et il s'agit de sa valeur en $T(\omega)$; $L(\xi)_T$ est $\mathbf{P}$-mesurable parce que T est étagée. Alors $\xi \mapsto L(\xi)_T$ est une application linéaire continue L_T de E' dans $L^p(\Omega, \mathbf{P})$; comme $u : E \to F$, est p-radonifiante, on sait que ${}^t u : F' \to E'$, est p-décomposante, autrement dit que $L_T \circ {}^t u$ se relève en une variable aléatoire $X^{\cdot}_T$ à valeurs dans $L^p(\Omega, \mathbf{P}; F)$, au sens suivant :

$$L_T({}^t u(\eta)) = \langle X^{\cdot}_T, \eta \rangle_{F,F'}\,, \quad \forall \eta \in F'\,. \tag{2.8}$$

L_T définit une probabilité cylindrique sur E, et son image par u est précisément $X^{\cdot}_T(\mathbf{P})$ de Radon, portée par conséquent par un sous-Banach séparable de F, donc $X^{\cdot}_T$ prend $\mathbf{P}$-presque sûrement sa valeur dans ce sous-espace séparable. En outre, pour $p > 0$,

$$\|X^{\cdot}_T\|_{L^p(\Omega,\mathbf{P};F)} \leq \Pi_p(u)\|L_T\|_{\mathcal{L}(E';L^p(\Omega,\mathbf{P}))} \leq \Pi_p(u)\|L\|_{\mathcal{L}(E';L^p(\Omega,\mathbf{P};C(K)))}\,. \tag{2.9}$$

Soit A un ensemble fini de tels temps T. Soit $T_A(\omega)$ tel que $|X_{T_A}(\omega)|_F = \max\limits_{S \in A} |X_S(\omega)|_F$; s'il y en a plusieurs possibles, on le choisit convenablement (par exemple en ordonnant A et en choisissant le premier), de façon que T_A soit encore une variable aléatoire étagée à valeurs dans K. Les $|X^{\cdot}_{T_A}|$ forment un ordonné filtrant de variables aléatoires ≥ 0, suivant l'ordonné filtrant des parties finies de K. Ils ont donc un SUP latticiel, ou Sup.ess., M, variable aléatoire ≥ 0, qui est aussi le SUP de toutes les $|X^{\cdot}_T|_F$ (ou des $|X^{\cdot}_t|_F$, $t \in K$), et limite croissante d'une suite d'entr'eux. D'après (1.6) et Fatou,

$$\|M\|_{L^p(\Omega,\lambda)} \leq \Pi_p(u)\|L\|_{\mathcal{L}(E';L^p(\Omega,p;C(K)))}. \tag{2.10}$$

En outre, toutes les $X^{\cdot}_T$ sont essentiellement à valeurs dans un même sous-espace séparable F_0 de F. Si F_0^+ est son orthogonal dans F', $L \circ {}^t u$ pourra se factoriser par

$$F' \to F'_0 = F'/F_0^+ \to L^p(\Omega, p; C(K))$$

(mais L, **bien entendu**, n'a aucune factorisation analogue). Désormais, L n'interviendra plus, mais seulement $L \circ {}^t u$, donc on peut abandonner F, et ne parler que de F_0, ou, ce qui revient au même, conserver F, mais le supposer séparable.

Soit K' un sous-ensemble dénombrable dense de K, D' un sous-ensemble dénombrable $*$-faiblement dense de F', qu'on pourra supposer être un $\mathbf{Q}$-sous-espace vectoriel. Pour tous les $t' \in K'$, choisissons arbitrairement un $X_{t'}$ de $X^{\cdot}_{t'}$, pourvu que $|X_{t'}|_F \leq M \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathbf{P})$.

Pour $\mathbf{P}$-presque tout ω, pour tout $\eta' \in D'$, $t' \mapsto \langle X^{\cdot}_{t'}(\omega), \eta'\rangle$ est restriction à K' d'une fonction continue (unique) sur K. Quitte à modifier les $X_{t'}$, sur un ensemble négligeable de Ω, on peut supposer que c'est vrai pour tous les $\omega \in \Omega$.

Quand η' tend vers $\eta \in F'$, $\langle X^{\cdot}_{t'}(\omega), \eta'\rangle$ converge vers $\langle X_{t'}(\omega), \eta\rangle$ *uniformément en* $t' \in K'$, puisque $|X_{t'}(\omega)| \leq M(\omega)$. D'autre part, pour tout $\eta' \in D'$, et tout $t \in K$, $\langle X_{t'}(\omega), \eta'\rangle$ a une limite quand t' tend vers $t \in K$, donc forme un filtre de Cauchy, donc aussi $\langle X_{t'}(\omega), \eta'\rangle$ pour $\eta \in F'$, qui donc a une limite réelle ; cette limite, linéaire en η, est majorée en valeur absolue par $M(\omega)|\eta'|_{F'}$, donc l'ensemble de ces limites définit $X_t(\omega)$, forme linéaire continue sur F', $X_t(\omega) \in F''$; et $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue sur K à valeurs dans $\sigma(F'', F')$, $|X_t(\omega)|_{F''} \leq M(\omega)$, et $\sup\limits_t |X_t(\omega)|_{F''} = M(\omega)$ avec l'inégalité (1.7). Pour tout T étagé, X_T est dans la $\mathbf{P}$-classe $X^{\cdot}_T$, qui est presque toujours sûrement à valeurs dans F lui-même, donc les valeurs dans F'' sont "rares", mais n'en existent pas moins. Alors $X : (t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ définit une variable aléatoire ($*$-scalairement $\mathbf{P}$-mesurable), à valeurs dans $C(K; \sigma(F'', F'))$ toujours muni de sa tribu spécifique définie par les $\delta_{(t)}$, $t \in K$, mais aussi les $\eta \in F'$, et on a l'inégalité (2.9). On a donc bien $X^{\cdot} \in L^p_*(\Omega, \mathbf{P}; C(K; \sigma(F'', F')))$, pour $p > 0$, ce qui achève la démonstration.

Pour $p = 0$, rien à changer sur le plan qualitatif. On doit simplement remplacer les inégalités (2.9) et (2.10) par : pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ et $C \geq 0$, les mêmes que dans (1.9) et (1.16) relatifs à u, tels que

$$J_\beta(X^{\cdot}_T) \leq C\, J^*_\alpha(L_T) = C \sup_{\substack{\xi \in E' \\ |\xi| \leq 1}} J_\alpha(L(\xi)_T), \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} J_\beta(X^{\cdot}) = J_\beta(M) &\leq C\, J^*_\alpha(L) \\ &= C \sup_{\substack{\xi \in E' \\ |\xi| \leq 1}} J_\alpha(L(\xi)), \end{aligned} \tag{2.12}$$

ce qui est (2.6).

(2.13) *Remarque.* Soit T une fonction à valeurs dans K, limite simple d'une suite de variables aléatoires étagées T_n ; elle n'est peut-être pas mesurable, parce que K n'est pas supposé métrisable. Maid $L(\xi)_T$ est mesurable, comme limite ponctuelle sur Ω des fonctions mesurables réelles $L(\xi)_{T_n}$. Donc $\xi \mapsto L(\xi)_T = L_T(\xi)$ est une application linéaire continue de E' dans $L_0(\Omega, \mathbf{P})$; alors $(L_T \circ {}^t u)$ est une application linéaire continue de F' dans $L^0(\Omega, \mathbf{P})$, qui se relève en une variable aléatoire $X_T \in L^0(\Omega, \mathbf{P}; F)$; mais $|X_T|_F \leq M \in L^p(\Omega, \mathbf{P})$, donc $X_T \in L^p(\Omega, \mathbf{P}; F)$, comme pour T étagé.

3. PROCESSUS CADLAG.

Théorème II.— *Soit L une application linéaire continue de E' dans l'espace des classes L^p, $0 \leq p \leq +\infty$ de processus réels adaptés cadlag sur $\overline{\mathbf{R}}_+ \times (\Omega, \mathbf{P})$:*
$L \in \mathcal{L}(E'; L^p(\Omega, \mathbf{P}; \mathrm{Cadlag}(\overline{\mathbf{R}}_+)))$ et $L_t \in \mathcal{L}(E'; L^p(\Omega.\mathcal{F}_t, \mathbf{P}))$ pour tout $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$.
Soit u p-radonifiante de E dans F. Alors $L \circ {}^t u$, linéaire continue de F' à valeurs dans l'espace des classes de processus adaptés cadlag, se relève en une classe de processus $X^{\cdot}$ adaptés cadlag à valeurs dans $\sigma(F_0'', F_0')$, où F_0 est un sous-Banach séparable convenable de F :
$X^{\cdot} \in L^p_*(\Omega, \mathbf{P}; \mathrm{Cadlag}\, \sigma(F_0'', F_0'))$ et, pour tout $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$, $X^{\cdot}_t$ est $\mathcal{F}$-mesurable à valeurs dans F_0 ; $X^{\cdot}_t \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}; F_0)$. Donc $X^{\cdot}$ est $*$-scalairement optionnel. Si L est prévisible, c.-à-d. si tous les $L(\xi)$, $\xi \in E'$, sont des processus prévisibles sur $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, alors $X^{\cdot}$ est $*$-scalairement prévisible à valeurs dans F_0'' ; si F est réflexif, optionnel et prévisible subsistent à valeurs dans F_0 (sans $*$, ni scalairement).

Si $L(\xi)$ est un processus continu, pour tout $\xi \in E'$, $X^{\cdot}$ est une classe de processus continus à valeurs dans $\sigma(F_0'', F_0')$ [remplacer Cadlag par C].

On a toujours pour $p > 0$:

$$\|X^{\cdot}\|_{L^p_*(\Omega,\mathbf{P});\mathrm{Cadlag}(\overline{\mathbf{R}}_+;\sigma(F_0'',F_0'))} \leq \Pi_p(u) \|L\|_{\mathcal{L}(E';L^p(\Omega,\mathbf{P};\mathrm{Cadlag}(\overline{\mathbf{R}}_+)))}.$$

Pour $p = 0$, on a :

$$J_\beta(X^{\cdot}) \leq C\, J^*_\alpha(L) = \sup_{\substack{\xi \in E' \\ |\xi| \leq 1}} J_\alpha(L(\xi)),$$

avec les mêmes β, α, C que dans (1.9) ou (1.16).

Démonstration. Considérons l'espace $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \{+,-\}$, ensemble des t_+ et des t_-, $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$, dont nous retirerons 0_- et $+\infty_+$. Munissons-le de la topologie suivante : un système fondamental de voisinages de t_+, $t < +\infty$, est formé des intervalles $[t_+, \tau_+]$, $\tau > t$, ou s_+, s_- sont dans cet intervalle si $t < s \leq \tau$, et un système fondamental de voisinages de t_-, $t > 0$, est formé des intervalles $[\tau_-, t_-]$, $\tau < t$, ou s_+, s_- sont dans cet intervalle si $\tau \leq s < t$.

On voit aisément que c'est un compact K, séparable (les $\delta_{t_\pm}$, $t \in \mathbf{Q}_+$, sont denses) mais non métrisable (sans quoi son carré topologique le serait ; or, dans ce carré, l'ensemble des points (t_-, t_+), $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$, est discret et a la puissance du continu). Le Banach $C(K)$ est en correspondances bijectives avec l'espace des fonctions Cadlag sur $\overline{\mathbf{R}}_+$, avec la norme usuelle $\| \ \|_\infty$ et la tribu spécifique définie par les $\delta_{(t_\pm)}$.

Il suffit alors d'appliquer le théorème I pour avoir le résultat Cadlag en supposant comme avant $F = F_0$ séparable, avec $C(K; \sigma(F'', F')) = \mathrm{Cadlag}(\overline{\mathbf{R}}_+; \sigma(F'', F'))$, et ensuite, si L_t est à valeurs dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$, on trouvera $X_t^{\cdot} \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}; F)$, $X_{t_-}^{\cdot} \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_{t_-}, \mathbf{P}; F)$. Si F est réflexif, le processus $X^{\cdot}$ est à valeurs dans F, toujours faiblement cadlag ; mais, F étant séparable, un processus scalairement prévisible à valeurs dans F est prévisible, car F est polonais, donc sa tribu borélienne est identique à celles de $\sigma(F, F')$, est engendrée par les $\eta \in D'$.

Si $T = T_+$ est un temps d'arrêt étagé, la démonstration du théorème I montre que $X_T^{\cdot} \in L^p(\Omega, \mathbf{P}; F)$; et la remarque (2.13) montre que c'est encore vrai si T est un temps d'arrêt quelconque comme limite décroissante d'une suite de temps d'arrêt étagés (limite dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ ou dans $(\overline{\mathbf{R}}_+)_+$).

4. TENSORISATION PAR UN BANACH G ET ESPACE $F\varepsilon G$.

(4.1) Rappelons que, si F et G sont deux espaces vectoriels localement convexes, $F\varepsilon G$ [(4)] est l'espace $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_c; G)$ ou l'espace $\mathcal{L}_\varepsilon(G'_c; F)$; F'_c veut dire que F' est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts convexes de F, et que L_ε, qui donne la topologie mise sur $\mathcal{L}(F'_c; G)$, veut dire la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de F'. Si F ou G a la propriété d'approximation, $F \oplus G$ est dense dans $F\varepsilon G$. Une application linéaire de F' dans G est dans $F\varepsilon G$ ssi elle est continue de $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(G, G')$ et si l'image par cette application de toute partie équicontinue de F' est relativement compacte dans G. Désormais, E, F, G, sont des Banach, G séparable, ou plus généralement de dual G' $*$-faiblement séparable (exemple $G = C(K)$ du théorème I).

(4.2) **Théorème III.-** *Soit $L \in \mathcal{L}(E'; L^p(\Omega, \mathbf{P}\ ; G))$, et $u : E \to F$ p-radonifiante. Alors $L \circ {}^t u \in \mathcal{L}(F'; L^p(\Omega, \mathbf{P}\ ; G))$, se relève en $X^{\cdot}$, variable aléatoire à valeurs dans $G\varepsilon\sigma(F'_0, F'_0)$, où F_0 est un sous-Banach séparable convenable de F, et, pour $p > 0$:*

$$\|X^{\cdot}\|_{L^p_*(\Omega, \mathbf{P}); G\varepsilon\sigma(F''_0, F'_0))} \leq \Pi_p(u) \|L\|_{\mathcal{L}(E'; L^p(\Omega, \mathbf{P}; G))} .$$

Le symbole L_* veut dire que, pour $\eta \in F'_0$, $\langle X^{\cdot}, \eta \rangle$ est $\mathbf{P}$-mesurable en tant que fonction sur Ω à valeurs dans G ; et, pour L^p, on prend pour norme sur $G\varepsilon\sigma(F''_0, F'_0)$ la norme de G et celle de F''_0, c.à.d. celle de la convergence uniforme sur le produit de la boule unité de G par celle de F'_0.
Si G ou F est de dimension finie, on peut remplacer $G\varepsilon\sigma(F''_0, F'_0)$ par $G\varepsilon F_0 = G \otimes_\varepsilon F_0$.

Le ε est ici relatif à la structure bitopologique F_0'', $\sigma(F_0'', F_0')$; pour la définition du produit ε, on prend la topologie $\sigma(F_0'', F_0')$, mais pour la norme ε, la norme $|\ |_{F_0''}$.

Démonstration. L'espace G est un sous-espace de l'espace $C(B')$ des fonctions continues sur la boule unité B' de G', muni de la topologie $*$-faible $\sigma(G', G)$. B' est un compact séparable puisque nous avons supposé G' $*$-faiblement séparable. On va appliquer le théorème I, avec $K = B'$. Donc $C(B')$ sera muni de la tribu définie par les $\delta_{(b')}$, $b' \in B'$, qui sera sa tribu borélienne si B' est métrisable, c.à.d. G séparable. On sait qu'on peut ne pas parler de F_0, mais supposer F séparable. Mais toutes les $L(\xi)$, $\xi \in E'$, sont des fonction continues sur B', *linéaires* : pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, $g_1', g_2' \in B'$, $L(\xi)(\lambda_1 g_1' + \lambda_2 g_2')$ si $\lambda_1 g_1' + \lambda_2 g_2' \in B'$.

Alors on a aussi $\langle X^{\cdot}, \lambda_1 g_1' + \lambda_2 g_2' \rangle = \lambda_1 \langle X^{\cdot}, g_1' \rangle + \lambda_2 \langle X^{\cdot}, g_2' \rangle$, autrement dit, $X^{\cdot}$ n'est pas seulement dans $L^p(\Omega, \mathbf{P}; C(B'; \sigma(F'', F')))$ mais dans $L^p_*(\Omega, \mathbf{P}; \mathcal{L}(G'; \sigma(F'', F')))$, où G' est muni de la topologie $*$-faible $\sigma(G', G)$, c.à.d. $X^{\cdot} \in L^p_*(\Omega, \mathbf{P}\ ; \mathcal{L}(\sigma(G', G)\ ; \sigma(F'', F')))$. La mesurabilité a lieu pour la tribu définie par les $\delta_{(b')}$, $b' \in B'$, et les $\eta \in F'$; pour la norme, on prend celles de G', et de F''. Si F est réflexif et G séparable, la tribu est la tribu borélienne de $\mathcal{L}(\sigma(G', G); \sigma(F, F'))$.

Mais l'espace $\mathcal{L}(\sigma(G', G); \sigma(F'', F'))$ n'est autre que $G\varepsilon\sigma(F'', F')$.
Si F est de dimension finie, $F_0 = F$, $\sigma(F'', F') = F$.
Mais si G est de dimension finie, on peut aussi remplacer $G\varepsilon\sigma(F_0'', F_0')$ par $G\varepsilon F$ ou $G \otimes_\varepsilon F$ ou $G \otimes_\varepsilon F_0$. On fait pour cela une démonstration différente. Soit $g_1, g_2, \ldots, g_n$ une base de G. Alors $L(\xi) = L_1(\xi) g_1 + \cdots + L_n(\xi) g_n$, $L_k(\xi) \in \mathcal{L}(E'; L^p(\Omega, \mathbf{P}))$. Mais alors on sait, par (1.12), que $L_k \circ {}^t u$ se relève en $X_k^{\cdot} \in L^p(\Omega, \mathbf{P}; F)$.
Donc $L \circ {}^t u$ se relève en $X_1^{\cdot} g_1 + X_2^{\cdot} g_2 + \cdots + X_n^{\cdot} g_n \in L^p(\Omega, \mathbf{P};\ G \otimes F)$. La norme qu'il faut prendre pour $G \otimes F$ est celle qui est induite par $G\varepsilon\sigma(F'', F')$, celle de la convergence uniforme sur le produit des boules unités de G' et de F', c'est donc celle de $G \otimes_\varepsilon F$.

Pour $p = 0$, on fait les modifications habituelles.

Remarque 1) Les théorèmes I et III sont équivalents, chacun entraîne immédiatement l'autre. Pour III, on applique 1 avec $G = C(K), K = B'$ muni de la topologie $\sigma(G', G)$; pour I, on applique III avec G=C(K) ; on sait que $C(K)\varepsilon\sigma(F_0'', F_0')$ est justement $C(K; \sigma(F_0'', F_0'))$.

Remarque 2) Il y a ici une situation étrange : en faisant une hypothèse sur G, la dimension finie, on peut remplacer $\sigma(F_0'', F_0')$ par $F_0 = F$. Est-ce encore valable dans des situations plus générales pour G ?

5. LES PROCESSUS ADAPTÉS CADLAG À VARIATION FINIE.

(5.1) **Théorème IV.-** *Soit $\mathcal{V}$ l'espace des fonctions réelles à variation finie sur $\overline{\mathbf{R}}_+$, muni de la norme-variation Var. On le munit de la tribu engendrée par les $\delta_{(t)}$, $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$. Soit L une application linéaire continue de E' dans l'espace des classes L^p de processus adaptés cadlag à variation finie L^p, et soit $u : E \to F$, p-radonifiante. [Autrement dit, L est un processus "virtuel" à variation finie à valeurs dans F].*

Donc $L \in \mathcal{L}(E'; L^p(\Omega, \mathbf{P}; \mathcal{V}))$. Alors $L \circ {}^t u$ se relève en une classe de processus $X^\cdot \in L^p_*(\Omega, \mathbf{P}; \mathrm{Cadlag}(\overline{\mathbf{R}}_+; \sigma(F_0'', F_0')))$ et $\in L^p(\Omega, \mathbf{P}; \mathcal{SV}_*(F_0''))$, où $\mathcal{SV}_*(F_0'')$ est l'espace des fonctions sur $\overline{\mathbf{R}}_+$, $*$-scalairement à variation finie à valeurs dans F_0'', F_0 sous-Banach séparable de F, avec la tribu définie par les $\delta_{(t)}$, $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$ et les $\eta \in F_0'$, et la norme $|f|_{\mathcal{SV}_*(F_0'')} = \sup\limits_{\substack{\xi \in F_0' \\ |\eta| \leq 1}} \mathrm{Var}\,\langle f, \eta \rangle$. On a,

pour $p > 0$:

$$\|X\|_{L^p(\Omega,\mathbf{P};\mathcal{SV}_*(F_0''))} \leq \Pi_p(u) \|L\|_{\mathcal{L}(E';L^p(\Omega,\mathbf{P};\mathcal{V}))}\,. \tag{5.2}$$

Pour $p = 0$, on a la modification habituelle :

$J_\beta(X^\cdot) \leq C J^*_\alpha(L)$ relativement à la norme de $\mathcal{V}$ ou $\mathcal{SV}$; autrement dit :

$$\begin{cases} \mathrm{Inf}\{M; \mathbf{P}\{|X^\cdot|_{\mathcal{SV}} > M\} \leq \beta\} \\ \quad \leq C \sup\limits_{\substack{\xi \in E' \\ |\xi| \leq 1}} \mathrm{Inf}\{N; \mathbf{P}\{\mathrm{Var}\, L(\xi) > N\} \leq \alpha\}\,. \end{cases} \tag{5.3}$$

Démonstration. Soit Δ une subdivision de $\overline{\mathbf{R}}_+$ pour des temps $t = 0$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} = +\infty$.

Appelons, pour f fonction à variation finie sur $\overline{\mathbf{R}}_+$, f_Δ sa restriction à $\langle t_0, t_1, \ldots, t_{n-1} \rangle$, et

$$\widetilde{f}_\Delta = (f_{t_0}, f_{t_1} - f_{t_0}, \ldots, f_{t_{n-1}} - f_{t_{n-2}})\,;\ \widetilde{f}_\Delta \in \ell^1_n\,, \mathrm{et} |\widetilde{f}_\Delta|_{\ell^1_n} = \mathrm{Var}\, f_\Delta\,.$$

On appellera $L(\xi)_\Delta$ ou $L_\Delta(\xi)$ la fonction $L(\xi)$ restreinte à Δ.

Alors $\mathrm{Var}\, L_\Delta(\xi) = |\widetilde{L_\Delta(\xi)}|_{\ell^1_n}$, et

$$\|L_\Delta\|_{\mathcal{L}(E';L^p(\Omega,\mathbf{P};\mathcal{V}_\Delta))} = \|\widetilde{L}_\Delta\|_{\mathcal{L}'(E';L^p(\Omega,\mathbf{P};\ell^1_n))}\,.$$

Composons avec ${}^t u$, et appliquons le théorème III, avec $G = \ell^1_n$ de dimension finie : $L \circ {}^t u$ se relève en $X^\cdot_\Delta$:

$$\begin{aligned} \|\widetilde{X^\cdot_\Delta}\|_{L^p(\Omega,\mathbf{P};\ell^1_n \varepsilon F)} &\leq \Pi_p(u) \|\widetilde{L}_\Delta\|_{\mathcal{L}(E';L^p(\Omega,\mathbf{P};\ell^1_n))} \\ &= \Pi_p(u) \|L_\Delta\|_{\mathcal{L}(E';L^p(\Omega,\mathbf{P};\mathcal{V}_\Delta))} \leq \Pi_p(u) \|L\|_{\mathcal{L}(E';L^p(\Omega,\mathbf{P};\mathcal{V}))}\,. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Le processus $X^{\cdot}$ existe déjà, construit à partir de L, Cadlag à valeurs dans $\sigma(F'', F')$.

Alors sa restriction $X^{\cdot}_{\Delta}$ à $(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ est dans $L^p(\Omega, \mathbf{P}; \mathcal{SV}_{\Delta}(F))$, car $\ell^1_n \varepsilon F = \mathcal{S}\ell^1_n(F)$, espace des n-suites scalairement ℓ^1 de F (voir §1.), et

$$(5.5) \qquad \|X^{\cdot}_{\Delta}\|_{L^p(\Omega,\mathbf{P};\mathcal{SV}_{\Delta}(F))} \leq \Pi_p(u) \|L\|_{\mathcal{L}(E';L^p(\Omega,\mathbf{P};\mathcal{V}))} .$$

En prenant le sup pour toutes les subdivisions Δ, qui est un SUP latticiel suivant Δ, et le sup d'une suite croissante, on obtient :

$$(5.6) \qquad \|X^{\cdot}\|_{L^p(\Omega,\mathbf{P};\mathcal{SV}_{*}(F''))} \leq \Pi_p(u) \|L\|_{\mathcal{L}(E';L^p(\Omega,\mathbf{P};\mathcal{V}))} .$$

On est parti de L, scalairement $\mathbf{P}$-ps.cadlag et scalairement $\mathbf{P}$-ps. à variation finie (ou "virtuellement"), on obtient $X^{\cdot}$, $\mathbf{P}$ ps. $*$-scalairement cadlag à valeurs dans F'' et $\mathbf{P}$ ps. $*$-scalairement cadlag à variation finie. On a changé l'ordre de $*$-scalairement et de $\mathbf{P}$ p.s.

La modification pour $p = 0$ est toujours la même.

6. THÉORÈME V - LE THÉORÈME DES 3 OPÉRATEURS.

(6.1) *Soient E, F, G, H, des Banach et u, v, w, des opérateurs $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \xrightarrow{w} H$, u et v 0-radonifiants, w 1-sommant.*

Soit L une semi-martingale virtuelle à valeurs dans E, i.e. $L \in \mathcal{L}(E', \mathcal{SM})$. Alors $L \circ {}^t u \circ {}^t v \circ {}^t w \in \mathcal{L}(H'; \mathcal{SM})$ se relève en une semi-martingale locale $X^{\cdot}$ à valeurs dans H, $X^{\cdot} \in \mathcal{SM}_{\mathrm{loc}}(H)$; et en une semi-martingale globale si H a la propriété de Radon-Nikodym, par exemple s'il est réflexif, ou dual séparable de Banach (cas de $H = \ell^1$). Semi-martingale sous-entend cadlag.

(6.2) **Démonstration :** L'application du théorème I nous donne un relèvement de $L \circ {}^t u$ en un processus $X^{\cdot}$ adapté cadlag, $X^{\cdot} \in L^0(\Omega, \mathbf{P}; \mathrm{Cadlag}(\sigma(F''_0, F'_0)))$. Nous garderons F en oubliant F_0, mais nous supposerons F, G, H, séparables. Posons $T_k = \mathrm{Inf}\{t; |X^{\cdot}_t|_{F''} > k\}$; c'est un temps d'arrêt, et $|X^{\cdot T_k -}| \leq k$: si $\overline{+\infty}$ est un temps au delà de $+\infty$ et isolé, avec $X^{\cdot}_{\overline{+\infty}} = X^{\cdot}_{+\infty}$, les T_k tendent stationnairement vers $\overline{+\infty}$ quand k tend vers $+\infty$. [Rappelons que $X_{t'} \in F_0$ pour tout t' rationnel ; elle est continue à droite pour la topologie $*$-faible de F'', donc semi-continue inférieurement pour la topologie de la norme ;
on a donc aussi $T_k = \mathrm{Inf}\{t' \in \overline{\mathbf{Q}}_+; |X_{t'}|_F > k\}$]. Maintenant le processus préarrêté $X^{T_k -}$ est borné par k, $|X^{T_k -}|_{F''} \leq k$.

Nous fixerons un k, et poserons désormais $Y_k = X^{T_k -}$, $|Y_k|_{F''} \leq k$, et $\Lambda_k = L^{T_k -}$; $\Lambda_k \circ {}^t u$ est relevée par Y_k. Pour tout $\eta \in F'$, $\Lambda_k(\eta)$ est une classe de semi-martingales réelles bornées par $k|\eta|_{F'}$, donc à sauts bornés, $\Lambda_k(\eta) \in \mathcal{SM}_{\delta}$. On munit $\mathcal{SM}_{\delta}$ de la topologie suivante : des semi-martingales convergent vers 0 dans $\mathcal{SM}_{\delta}$ si elles convergent vers 0 dans $\mathcal{SM}$ et si le sup des modules de leurs sauts tend vers 0.

On sait qu'alors ces semi-martingales sont spéciales, et $\mathcal{SM}_\delta$ est la somme directe topologique

$$\mathcal{SM}_\delta = \mathcal{V}_\delta^{\text{pré}} \oplus \mathcal{M}_\delta\,, \tag{6.3}$$

où $\mathcal{V}_\delta^{\text{pré}}$ est l'espace des classes de processus prévisibles cadlag à sauts bornés, $\mathcal{M}_\delta$ l'espace des martingales locales Cadlag à sauts bornés (leurs topologies sont bien connues).

En effet, c'est bien une somme directe algébrique ; mais $\mathcal{V}_\delta^{\text{pré}} \oplus \mathcal{M}_\delta$ s'envoie bijectivement et continuement sur $\mathcal{SM}_\delta$, donc c'est bien une somme directe topologique (ce sont tous des "Fréchet" non localement convexes). Donc

$$\Lambda_k(\eta) = V_k(\eta) + M_k(\eta)\,. \tag{6.4}$$

Mais, tandis que Λ_k est relevée par Y_k, V_k et M_k ne sont pas relevées.

On peut seulement dire que

$$V_k \in \mathcal{L}(F'; \mathcal{V}_\delta^{\text{pré}})\,, \quad M_k \in \mathcal{L}(F'; \mathcal{M}_\delta)\,.$$

On a perdu tout le bénéfice du relèvement $X^{\cdot}$; mais lui seul a permis de construire $X^{T_k} = Y_k$, donc V_k et M_k.

$\lambda_k = \Lambda_k^{T_k-} = \left(\Lambda_k^{T_k-}\right)^{T_k} = V_k^{T_k} + M_k^{T_k}$, donc par l'unicité de la décomposition, V_k et M_k sont arrêtées à T_k. Etudions d'abord la composante $M_k \in \mathcal{L}(F'; \mathcal{M}_\delta)$. Et effectuons l'opération $v : F \to G$. Alors $M_k \in \mathcal{L}(F'; L^0(\Omega, \mathbf{P}; \text{Cadlag}))$, donc, d'après le théorème II, $M_k \circ {}^t u$ se relève en un processus à valeurs dans Cadlag $(\sigma(G'', G'))$; appelons-le $\overline{M}_k \in L^0_*(\Omega, \mathbf{P}; \text{Cadlag}\,\sigma(G'', G'))$.

Mais, comme X antérieurement, $\overline{M}_k$ est prélocalement bornée. Les sauts de $\overline{M}$ existent : $\overline{\Delta M}_{k,t} = \overline{M}_{k,t}\text{-}\overline{M}_{k,t\_} \in G''$. D'après la topologie de $\mathcal{M}_\delta$, pour tout $\zeta \in G'$, tous les sauts de $\langle \overline{M}_k, \zeta \rangle = (M_k \circ {}^t u)(\zeta)$ sont bornés, donc l'ensemble des sauts de $\overline{M}_k$ et $*$-faiblement borné, donc borné dans G''. Alors $\overline{M}_k$ est non seulement prélocalement bornée, elle est localement bornée ; localement bornée et $*$-scalairement martingale locale cadlag, elle est une martingale locale cadlag ; à valeurs finales dans G, elle est entièrement à valeurs dans G.

Donc $w(\overline{M}_k)$ est une martingale locale cadlag à valeurs dans H (arrêtée à T_k).

Occupons-nous maintenant de $V_k \in \mathcal{L}(F'; L^0(\Omega, \mathbf{P}; \mathcal{V}))$, arrêtée à T_k. On lui applique le théorème IV, donc $V_k \circ {}^t v$ est relevée par un processus $\overline{V}_k$, $*$-faiblement cadlag à valeurs dans G'', et $\overline{V}_k \in L^0(\Omega, \mathbf{P}; \mathcal{SV}_*(G''))$.

Reprenons la subdivision Δ utilisée dans la démonstration du théorème IV (il est peu éthique d'utiliser la démonstration d'un théorème, mais tant pis !). Raisonnons pour tout $\omega \in \Omega$: $\widetilde{(\overline{V}_k)_\Delta}(\omega)$ est une n-suite scalairement ℓ^1 de G (rappelons que, pour tout t, $\overline{V}_k$ prend ses valeurs dans G), $\widetilde{(\overline{V}_k)}_\Delta(\omega) \in \mathcal{S}\ell^1_n(G)$. Comme w est 1-sommante, $w(\widetilde{(\overline{V}_k)}_\Delta(\omega)) \in \ell^1_n(H)$, et

$$(6.5) \qquad \left| w\left(\widetilde{(\overline{V}_k)}_\Delta(\omega)\right)\right|_{\ell^1_n(H)} \leq \pi_1(w)|\widetilde{(\overline{V}_k)}_\Delta(\omega)|_{\mathcal{S}\ell^1_n(G)}\,.$$

En supprimant les $\widetilde{}$

$:\mathrm{Var}_\Delta\left(w(\overline{V}_k)(\omega)\right) \leq \pi_1(w)\left(\overline{V}_k(\omega)\right)_{\mathcal{SV}_\Delta(G)} \leq \pi_1(w)\left(\overline{V}_k(\omega)\right)_{\mathcal{SV}(G)}$.(6.6)
Enprenantlesup, qu: le sup d'une suite croissante :

$$(6.7) \qquad \mathrm{Var}\, w\left((\overline{V}_k)(\omega)\right) \leq \pi_1(w)|\overline{V}_k(\omega)|_{\mathcal{SV}(G)}\,.$$

Donc $w(\overline{F}_k)$ est une classe de processus à variation finie. Elle est adaptée, $*$-scalairement cadlag, donc cadlag ; à valeur a priori dans H'', mais, pour tout t, ps. à valeurs dans H, elle est partout à valeurs dans H, fermé dans H''. On met, comme déjà indiqué, sur $\mathcal{V}(H)$ la tribu définie par les $\delta_{(t)}$, $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$, et les $\theta \in H'$, on aura alors

$$(6.8) \qquad w(\overline{V}_k) \in L^0_*(\Omega, \mathbf{P}; \mathcal{V}(H))\,.$$

Nous pouvons donc écrire, à partir de $L \in \mathcal{L}(E'; \mathcal{SM})$, que $(L \circ {}^t\!u \circ {}^t\!v \circ {}^t\!w)^{T_k-}$ est relevée par une semi-martingale à valeurs dans H, somme d'un processus à variation finie cadlag et d'une martingale locale Cadlag, $w(\overline{V}_k) + w(\overline{M}_k)$. Comme déjà vu, les décompositions en variation finie et martingale ne s'induisent pas par passage de T_{k+1} à T_k, par contre, les sommes s'induisent : les $(w \circ v)X^{T_k-} = w \circ v(\overline{M}_k) + w(\overline{V}_k)$ sont des semi-martingales cohérentes, arrêtées en T_{k_-}, donc définissent une même classe de processus S, cadlag à valeurs dans H ; S^{T_k-} est une semi-martingale préarrêtée en T_{k_-}. En ajoutant le saut ΔS_{T_k}, on voit que S^{T_k} est une semi-martingale, S une semi-martingale *locale* à valeurs dans H. Il reste à démontrer que, si H a la propriété de Radon-Nikodym, elle est une semi-martingale.

Nous aurons besoin d'un lemme :

(6.9) **Lemme.-** *Toute semi-martingale à valeurs dans un Banach H ayant la propriété de Radon-Nikodym, à sauts bornés, est somme, d'une manière unique, d'un processus prévisible cadlag, localement à variation intégrable et d'une martingale locale.*

C'est une propriété bien connue dans le cas scalaire, mais, semble-t-il, jamais publiée dans le cas d'un Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym.

Démonstration. Soit $X = W + N$ une semi-martingale à valeurs dans H, à sauts bornés, W un processus à variation finie nul au temps 0, N une martingale locale. On peut trouver une suite de temps d'arrêt $(\tau_\ell)_{\ell \in \mathbf{N}}$, croissante, tendant stationnairement vers $\overline{+\infty}$ pour ℓ tendant vers $+\infty$, tels que $|X^{\tau_\ell}-|_F$ soit bornée, que Var $W^{\tau_\ell}-$ soit bornée, et que N^{τ_ℓ} soit une martingale. Comme les sauts de X sont bornés, $|X^{\tau_\ell}-|_F$ est aussi bornée, ΔM_{τ_ℓ} est intégrable, donc W^{τ_ℓ} est à variation intégrable. L'intégrale déterministe par rapport à W^{τ_ℓ} définit une mesure finie à valeurs dans H définie sur la tribu optionnelle de $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$:

$$m(\varphi) = \mathbf{E} \int_{]0,+\infty]} \varphi_t dW_t^{\tau_\ell} \,, \tag{6.10}$$

ne changeant pas les ensembles $\mathbf{P}$-négligeables de $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ ni $\{0\} \times \Omega, \varphi$ réelle optionnelle bornée.

Cette mesure sur la tribu optionnelle de $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ a été complètement étudiée par Catherine Doléans-Dade [5]. Elle est majorée par une mesure $|m| \geq 0$, définie par :

$$|m|(\varphi) = \mathbf{E} \int_{]0,+\infty]} \varphi_t |dW_t^{\tau_\ell}|_H \,. \tag{6.11}$$

On appelle projection prévisible directe de m la mesure ${}^\natural m$, à valeurs dans F, définie par :

$${}^\natural m(\varphi) = m(\varphi^\natural) \,, \tag{6.12}$$

où $\varphi^\natural$ est la projection prévisible de φ ; donc ${}^\natural m(\varphi) = {}^\natural m(\varphi^\natural)$.

On voit que ${}^\natural m$ est aussi majorée par une mesure ≥ 0, ${}^\natural|m|$: pour $\varphi \geq 0$,

$$|{}^\natural m(\varphi)| = |m(\varphi^\natural)| \leq |m|(\varphi^\natural) = {}^\natural|m|(\varphi) \,. \tag{6.13}$$

En appliquant alors la propriété de Radon-Nikodym de H, on voit que ${}^\natural m$ possède une densité :

$${}^\natural m(\varphi) = \mathbf{E} \int_{]0,+\infty]} \theta_t d\,{}^\natural W_t^{\tau_\ell} \,, \tag{6.14}$$

$$\text{où} \qquad |d\,{}^\natural W_t^{\tau_\ell}|_H \leq {}^\natural|dW_t^{\tau_\ell}|_H \,. \tag{6.15}$$

Le processus ${}^\natural W^{\tau_\ell}$ s'appelle la projection prévisible duale du processus W^{τ_ℓ}, et il est Cadlag prévisible, à variation intégrable.
La différence $W^{\tau_\ell} - {}^\natural W^{\tau_\ell}$ est une martingale; en effet, si f est une fonction $\mathcal{F}_s$-mesurable bornée sur Ω, la fonction $f 1_{]s,t]}$, $t > s$, est prévisible, donc m et ${}^\natural m$ prennent sur elle la même valeur :

$$\mathbf{E} f\,(W_t^{\tau_\ell} - W_s^{\tau_\ell}) = \mathbf{E} f\,\left({}^\natural W_t^{\tau_\ell} - {}^\natural W_s^{\tau_\ell}\right) \,.$$

Ceci étant vrai pour tout f $\mathcal{F}_s$-mesurable bornée, cela exprime que l'espérance conditionnelle de $W_t^{\tau_\ell} - {}^\natural W_t^{\tau_\ell}$, $\mathcal{F}_t$-mesurable, par rapport à la tribu $\mathcal{F}_s$, $s < t$, est $W_s^{\tau_\ell} - {}^\natural W_s^{\tau_\ell}$, donc que $W^{\tau_\ell} - {}^\natural W^{\tau_\ell}$ est une martingale. On peut donc écrire : $X^{\tau_\ell} = {}^\natural W^{\tau_\ell}$ (processus prévisible cadlag à variation intégrable) + $((W^{\tau_\ell} - {}^\natural W^{\tau_\ell}) + N)$ (martingale).

Cette décomposition est unique, car une martingale prévisible est continue, et, si elle est à variation finie, elle est constante, et sa valeur en 0 est X_0, donc elle est nulle.

Lorsque ℓ croît, ces décompositions s'induisent les unes les autres, à cause de l'unicité, et donnent une décomposition unique de X en somme d'un processus prévisible cadlag à variation localement intégrable et d'une martingale locale, décomposition unique.

La démonstration du lemme est achevée. Déduisons-en la fin de la démontration du théorème V : une semi-martingale locale S, à valeurs dans un Banach H ayant la propriété de Radon-Nikodym, est une semi-martingale.

Soit donc S une semi-martingale locale à valeurs dans H ; pour une suite de temps d'arrêt T_k tendent stationnairement vers $\overline{+\infty}$, S^{T_k} est une semi-martingale. On peut retrancher de S le processus de ses sauts de norme > 1, qui est un processus à variation finie, donc une semi-martingale. Pour simplifier, appelons encore S ce qui reste : c'est une semi-martingale locale à sauts bornés. D'après le lemme $S^{T_k} = W.^{T_k} + N.^{T_k}$, $W.^{T_k}$ prévisible cadlag à variation localement intégrable, $N.^{T_k}$ martingale locale. A cause de l'unicité, ces décompositions s'induisent, et donnent $S = W. + N.$, analogue, qui est une semi-martingale, ce qui achève la démonstration du théorème V des 3 opérateurs.

Remarque. Si H n'a pas la propriété de Radon-Nikodym, on pourra y remédier en supposant que $u = u_1 \circ u_0$, où u_0 est 0-radonifiante et u_1 compacte. En effet, dans ce cas, $L \circ {}^t u_0$ se relève par X_0, $*$-faiblement Cadlag, donc $X = u_1(X_0)$ est fortement Cadlag à valeurs dans F.

Alors, si σ_n est le temps d'arrêt du n-ième saut de X de norme ≥ 1, σ_n tend stationnairement vers $\overline{+\infty}$, donc le processus $\sum\limits_n \Delta X_{\sigma_n} 1_{[\sigma_n, +\infty]}$ est un processus de sauts, et $X - \sum\limits_n \Delta X_{\sigma_n} 1_{[\sigma_n, +\infty]}$ est un processus cadlag à sauts bornés, de norme ≤ 1. Il pourra remplacer le X^{T_k}- de la démonstration, mais il est global et non préarrêté. On continuera de la même manière, mais tout restera global, et on obtiendra d'un seul coup S au lieu de S^{T_k} ; S sera directement une semi-martingale. On pourra aussi remplacer w par $w_1 \circ w_0$, w_0 1-sommante et w_1 faiblement compacte. En effet, un opérateur faiblement compact transite par un espace réflexif, et cela reviendra à supposer H réflexif. Mais, dans ces deux cas, on aura 4 opérateurs au lieu de 3.

7. UNE APPLICATION : UN THÉORÈME D'USTUNEL.

(7.1) Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé complet, et soit $\mathcal{U}$ un système fondamental de voisinages de O. Pour tout $U \in \mathcal{U}$, soit E_U le quotient de E par le plus grand sous-espace vectoriel $\subset U$, muni de la norme pour laquelle U est la boule unité ; son complété $\widehat{E_U}$ est un Banach ; si $V \subset E$, on a des applications $E \xrightarrow{\pi_V} \widehat{E_V} \xrightarrow{\pi_{U,V}} \widehat{E_U}$, $\pi_U = \pi_{U,V} \circ \pi_V$; E est la limite projective des $\widehat{E_U}$ pour les applications π_U. Ustunel appelle alors semi-martingale projective la donnée d'une famille $(X_U)_{U\in\mathcal{U}}$ de semi-martingales, X_U à valeurs dans $\widehat{E_U}$, cohérente, c.à.d. telle que $X_U = \pi_{U,V}\, X_V$ ps. Une semi-martingale X sur E définit évidemment une semi-martingale projective, mais la réciproque n'est pas vraie. Les deux théorèmes suivants sont dus à Ustunel : [6]

(7.2) **Théorème VI.-** *Soit E un espace nucléaire. Toute application linéaire continue L de E' dans l'espace $\mathcal{SM}$ des semi-martingales réelles se relève en une semi-martingale projective unique $(X_U)_{U\in\mathcal{U}}$, en ce sens que, pour tout ξ de $E'_{U^0} = (\widehat{E_U})'$, $L(\xi) = \langle X_U, \xi\rangle$; $X_U \in \mathcal{SM}(\widehat{E_U})$ relève $L \circ {}^t\pi_U \in \mathcal{L}(E'_{U^0}; \mathcal{SM})$.*

Démonstration (d'Ustunel). E étant nucléaire, on peut supposer $\widehat{E_U}$ hilbertien séparable. Il existe des voisinages disqués de O, V, W, Z, $Z \subset W \subset V \subset U$, tels que les applications $\widehat{E_Z} \xrightarrow{\pi_{W,Z}} \widehat{E_W} \xrightarrow{\pi_{V,W}} \widehat{E_V} \xrightarrow{\pi_{U,V}} \widehat{E_U}$ soient de Hilbert-Schmidt, donc O-radonifiantes. Alors $L \circ {}^t\pi_Z \in \mathcal{L}(E'_{Z^0}; \mathcal{SM})$, par le théorème V des 3 opérateurs, donne lieu à

$$L \circ {}^t\pi_U = (L \circ \pi_Z) \circ ({}^t\pi_{W,Z} \circ {}^t\pi_{V,W} \circ {}^t\pi_{U.V})$$

qui se relève en une semi-martingale $X_U \in \mathcal{SM}(\widehat{E_U})$. Elles sont cohérentes, donc définissent une semi-martingale projective dans E, qui relève L.

(7.3) **Théorème VII** (Ustunel).- *Soit $L \in \mathcal{L}(E'; \mathcal{SM})$, où E est un espace de Fréchet nucléaire. Alors L se relève en une semi-martingale à valeurs dans E, et même à valeurs dans un sous-espace hilbertien de E.*

Démonstration (d'Ustunel). Soit $(X_U)_{U\in\mathcal{U}}$, $\widehat{E}_U$ hilbertien, la semi-martingale projective associée à L par le théorème précédent. Il est connu qu'étant donné une suite $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$, de semi-martingales hilbertiennes séparables, il existe une probabilité $\mathbf{Q}$ équivalente à $\mathbf{P}$, par rapport à laquelle toutes les X_k deviennent $\mathcal{H}^p$ (ou H^p suivant les notations), $1 \le p < +\infty$. Nous raisonnerons sur $\mathbf{Q}$ pour trouver X, ayant les propriétés de l'énoncé ; on les aura aussi pour $\mathbf{P}$.

On pourra se borner à considérer une suite de voisinages U emboîtés, pour lesquels $\widehat{E_U}$ soit hilbertien ; alors toutes les semi-martingales X_U seront $\mathcal{H}^p$ pour un choix convenable de $\mathbf{Q}$.

Alors acceptons de perdre le bénéfice de la semi-martingale projective et retenons seulement que X_U définit une application linéaire continue de E'_{U^0} dans $\mathcal{H}^p$. Ces applications sont cohérentes et définissent donc une application linéaire L de E' dans $\mathcal{H}^p$, dont la restriction à chaque E'_{U^0} est continue. Mais on sait que pour E Fréchet réflexif, E' est la limite inductive de E'_{U^0} [7], donc L est continue de E' dans $\mathcal{H}^p$.

Mais le dual d'un Fréchet nucléaire est aussi nucléaire. Donc L factorise par $E' \xrightarrow{{}^t\pi} \widehat{E'_{V'}} \xrightarrow{v} \mathcal{H}^p$, où v est un opérateur nucléaire. On peut considérer que V' est le polaire d'une partie B bornée disquée de E, E_B hilbertien, $\widehat{E'_{V'}}$ hilbertien ; le dual de $\widehat{E'_{V'}}$ est E_B, et ${}^t\pi = {}^t\pi_B$, où π_B est l'injection naturelle $E_B \to E$. On peut donc écrire :

$$v = \sum_n \lambda_n \, b_n \otimes X_n \,, \quad \lambda_n \text{ réels, } \sum_n |\lambda_n| < +\infty \,,$$

b_n éléments de la boule unité B de E_B, X_n semi-martingales de la boule unité de $\mathcal{H}^p$.

Donc v se relève en une semi-martingale $\mathcal{H}^p$ à valeurs dans l'espace hilbertien E_B, appelons-la X_B.

L se relève par X, semi-martingale à valeurs dans E, où $X = \pi_B(X_B)$.

Remarque. Il n'est pas facile de savoir exactement de qu'on doit appeler une semi-martingale à valeurs dans un espace vectoriel topologique. Dans le cadre d'un Banach, nous avons considéré que c'était $V+M$. Ce n'est pas complètement satisfaisant, parce que, en dehors du cas hilbertien, ce n'est pas un intégrateur.

Autrement, il existe deux définitions extrêmes possibles : ou bien X est définie comme application linéaire continue $L \in \mathcal{L}(E'; \mathcal{SM})$, semi-martingale fictive ; c'est la définition la plus faible, on ne peut rien en faire. Ou bien X est définie comme semi-martingale à valeurs dans un sous-espace hilbertien de E ; c'est la plus forte, et c'est un intégrateur. Et il y a des définitions intermédiaires. Si E est un Fréchet nucléaire, les deux définitions coïncident.

Le théorème V des 3 opérateurs a servi, *dans un cas très particulier*, à démontrer le théorème d'Ustunel : les Banach E, F, G, H, du théorème V sont des espaces hilbertiens. Et le résultat du théorème V n'est que la première et plus simple partie du théorème d'Ustunel, le théorème VI ; VII est plutôt plus élaboré que VI. Il n'est pas encore prouvé que le théorème V, sous sa forme plus générale, banachique non hilbertienne, ait des applications importantes. En tout cas, le théorème d'Ustunel VII a sûrement de belles applications ; Ustunel lui-même en a donné. J'ai étudié les semi-martingales à valeurs dans l'espace $C^\infty(E;F)$ des applications C^∞ d'un espace vectoriel de dimension finie E dans un espace vectoriel de dimension finie F ; c'est un Fréchet nucléaire, et la clef de l'étude est le théorème d'Ustunel. Ces espaces se rencontrent fréquemment : si X est le flot d'une équation différentielle stochastique à coefficients C^∞, $X(t,\omega,x)$ est la valeur à l'instant t de la solution qui part de x à l'instant 0, au point $\omega \in \Omega$. Alors $X(t,\omega,0) \in C^\infty(E;E)$, et X est une semi-martingale à valeurs dans $C^\infty(E;E)$.

NOTES DE BAS DE PAGE

Note(1), page 2.

Pour tout ce qui concerne les applications p-sommantes, p-radonifiantes, p-décomposantes, consulter L.Schwartz [1] et [2], qui donnent aussi les références nécessaires aux travaux de W. Pietsch.

Note(2), page 2.

Pour les jauges $\mathcal{J}_\alpha$, voir L.Schwartz [1], (IV,1), exemple 4 et [2], exemple (1.9), page 156.

Note(3), page 5.

Pour les espaces bitopologiques, voir L.Schwartz [2], page 149.

Note(4), page 9.

Pour l'espace $F\varepsilon G$, voir L.Schwartz [3], chapitre I. Pour $F\widehat{\otimes}_\varepsilon G$, voir A. Grotendieck, [1], page 88, avec la notation $F\widehat{\widehat{\otimes}}G$.

Note(5), page 15.

Pour les résultats de C. Doléans-Dade, voir P.A. Meyer [1], (théorème VI, 57), page 134, et suite.

Note(6), page 17.

Ustunel a traité ces problèmes dans plusieurs publications. Voir par exemple, S. Ustunel [1]. Le résultat d'Ustunel est un peu moins fort que l'énoncé des théorèmes VI et VII.

Note(7), page 17.

Voir A. Grothendieck [1], Corollaire 3, page 320.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

Claude DELLACHERIE et Paul-André MEYER [1] : Probabilités et Potentiels, Hermann, Paris (1980), tome 3, *Théorie des Martingales.*

Alexandre GROTHENDIECK [1] : *Espaces vectoriels topologiques*, Publications de la Société Mathématique de Sao-Paulo, Brésil (1958).

Laurent SCHWARTZ [1] : *Applications radonifiantes*, Séminaire Schwartz, Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, 1969-70.

Laurent SCHWARTZ [2] : *Probabilités cylindriques et Applications radonifiantes*, Journal of the Faculty of Science, The University of Tokyo, Sec. IA, Vol. **18**, n° 2 (1971), pp. 139-286.

Laurent SCHWARTZ [3] : *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*, Annales de l'Institut Fourier, tome VII (1957), pp. 1-139.

TABLE DES MATIERES

Laurent Schwartz
37, rue Pierre Nicole
75005 PARIS
France