PASCALE MONAT
CHRISTOPHE STRICKER

**Fermeture de $G_T(\Theta)$ et de $L^2(\mathcal{F}_0) + G_T(\Theta)$**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 28 (1994), p. 189-194
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1994__28__189_0>

# FERMETURE DE $\mathbf{G_T(\Theta)}$ ET DE $\mathbf{L^2(\mathcal{F}_0) + G_T(\Theta)}$

*P. Monat et C. Stricker*
*Laboratoire de Mathématiques*
*URA CNRS 741*
*16, Route de Gray*
*25030 Besançon Cedex.*

Soient $X$ une semimartingale et $\Theta$ l'ensemble des processus $\theta$ prévisibles, intégrables par rapport à $X$, tels que $G(\theta) := \int \theta dX$ appartienne à l'espace $\mathcal{S}^2$ des semimartingales. Pour $T > 0$ fixé, $G_T(\Theta)$ désigne le sous-espace de $L^2$ engendré par $G_T(\theta)$ pour tout $\theta \in \Theta$. Nous supposons que $X$ est une semimartingale spéciale et qu'elle peut s'écrire sous la forme $X = X_0 + M + \int \alpha d\langle M \rangle$. Sous l'hypothèse : $\widehat{K} := \int \alpha^2 d\langle M \rangle$ est un processus uniformément borné sur $[0, T]$, nous montrons que l'espace $G_T(\Theta)$ est fermé dans $L^2$.

Dans un précédent article, nous avions montré la fermeture de $G_T(\Theta)$ en prouvant l'existence, l'unicité et la continuité de la décomposition de Föllmer-Schweizer pour une variable aléatoire de carré intégrable **[3]** et **[4]**. Parallèlement, M. Schweizer **[7]** a trouvé une belle démonstration directe sous la condition supplémentaire que les sauts de $\widehat{K}$ soient bornés par une constante strictement inférieure à 1. Dans cet article, nous généralisons sa démonstration en nous affranchissant de cette dernière hypothèse.
Le fait que $G_T(\Theta)$ soit fermé a des applications en mathématiques financières. En effet, toute variable aléatoire $H \in L^2$ admet alors une projection et une seule sur l'espace $G_T(\Theta)$. Si $H$ représente la valeur d'un actif contingent, on montre ainsi l'existence et l'unicité d'une stratégie optimale pour la norme $L^2$.

# 1 Préliminaires.

Les notations utilisées sont les mêmes que celles de **[1]**, **[2]** et **[6]**. Nous les rappelons brièvement.
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$ satisfaisant aux conditions habituelles et telle que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Soit $(X_t)_{0 \le t \le T}$ une semimartingale de $\mathcal{S}^2_{loc}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de décomposition canonique $X = X_0 + M + A$, telle que $A^i \ll \langle M^i \rangle$, pour tout $i = 1, ..., d$. On suppose que $B$ est un processus prévisible, intégrable, croissant, càdlàg et nul en 0, tel que :

$$(1.1) \qquad \langle M^i, M^j \rangle_t = \int_0^t \sigma_s^{ij} dB_s \quad \text{et} \quad A_t^i = \int_0^t \gamma_s^i dB_s \quad P\text{-p.s. pour } i = 1, ..., d.$$

On suppose que $X$ vérifie la condition de structure $(SC)$ c'est-à-dire qu'il existe un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $\widehat{\lambda} = \left(\widehat{\lambda}_t\right)_{0\leq t\leq T}$ tel que :

$$(1.2) \qquad \sigma_t\widehat{\lambda}_t = \gamma_t \quad \text{et} \quad \widehat{K}_t := \int_0^t \widehat{\lambda}_s^*\gamma_s dB_s < +\infty \quad P\text{-p.s. pour tout } t \in [0,T].$$

On choisit alors une version càdlàg de $\widehat{K}$, que l'on appelle processus "mean-variance tradeoff" $(MVT)$ de $X$.
Cette condition de structure est une hypothèse naturelle en mathématiques financières. Elle correspond à une condition de non arbitrage.

**Définition 1.1.** Un processus prévisible $\theta = (\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ appartient à $L^2(M)$ si le processus $\left(\int_0^t \theta_s^*\sigma_s\theta_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est intégrable.
Un processus prévisible $\theta = (\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ appartient à $L^2(A)$ si le processus $\left(\int_0^t |\theta_s^*\gamma_s|\, dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est de carré intégrable.
Enfin, $\Theta$ est l'espace défini par $\Theta := L^2(M) \cap L^2(A)$ que nous allons munir des trois normes suivantes :
$\|\theta\|_{L^2(M)} := \left\|\int_0^T \theta_s dM_s\right\|_2$, $|||\theta||| := \left\|\int_0^T \theta_s dM_s\right\|_2 + \left\|\int_0^T |\theta_s^*\gamma_s| dB_s\right\|_2$,
$|\theta|_2 := \left\|\int_0^T \theta_s dX_s\right\|_2$.

L'objet principal de cet article est d'établir l'équivalence de ces trois normes.

Dans la suite, on suppose que $X$ vérifie $(SC)$ et que $\widehat{K}$ est uniformément borné en $t$ et en $\omega$. Cela implique en particulier le résultat suivant dû à Schweizer (cf [3] et [6]).

**Lemme 1.2.** Les deux normes $\|\ .\ \|_{L^2(M)}$ et $|||\ .\ |||$ sont équivalentes.

# 2 Fermeture de $\mathbf{G_T(\Theta)}$.

Pour démontrer que $G_T(\Theta)$ est fermé, nous devons séparer les instants où les sauts de $\widehat{K}$ sont supérieurs à 1 des moments où l'on se trouve entre deux tels sauts. C'est pourquoi nous avons besoin de deux résultats auxiliaires pour montrer le théorème principal.
Le premier lemme est fortement inspiré de [7].

**Lemme 2.1.** Soient $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq T$ deux temps d'arrêt prévisibles tels qu'il existe une constante $c \in ]0;1[$ vérifiant $\widehat{K}_{T_2-} - \widehat{K}_{T_1} \leq c$ $P$-p.s. Alors, il existe une constante $C$ telle que pour tout $\theta \in \Theta$ et toute variable aléatoire $R_0 \in L^2(\mathcal{F}_0)$

$$\|\mathbf{1}_{]T_1;T_2[}\theta\|_{L^2(M)} \leq C\|R_0 + G_{T_2-}(\theta)\|_2$$

**Démonstration.** Observons d'abord que nous pouvons supposer que $\theta = 0$ sur

$[\![T_2]\!]$. On a alors l'égalité suivante :

$$\int_0^T \mathbf{1}_{]T_1;T_2[}(s)\theta_s dM_s + G_{T_1}(\theta) = G_{T_2-}(\theta) - \int_0^T \mathbf{1}_{]T_1;T_2[}(s)\theta_s^* dA_s$$

Comme $R_0+G_{T_1}(\theta)$ et $\int_0^T \mathbf{1}_{]T_1;T_2[}(s)\theta_s dM_s$ sont des variables aléatoires orthogonales, on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}(2.1)\qquad \|\mathbf{1}_{]T_1;T_2[}\theta\|_{L^2(M)} &\leq \left\|\int_0^T \mathbf{1}_{]T_1;T_2[}(s)\theta_s dM_s + R_0 + G_{T_1}(\theta)\right\|_2 \\ &\leq \|R_0 + G_{T_2-}(\theta)\|_2 + \left\|\int_0^T \mathbf{1}_{]T_1;T_2[}(s)\theta_s^* dA_s\right\|_2\end{aligned}$$

Or, d'après la condition de structure, le fait que $\sigma$ est une matrice symétrique positive et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\left(\int_0^T \mathbf{1}_{]T_1;T_2[}(s)\theta_s^* dA_s\right)^2 &= \left(\int_0^T \mathbf{1}_{]T_1;T_2[}(s)\theta_s^*\sigma_s\widehat{\lambda}_s dB_s\right)^2 \\ &\leq \int_0^T \mathbf{1}_{]T_1;T_2[}(s)\theta_s^*\sigma_s\theta_s dB_s \int_0^T \mathbf{1}_{]T_1;T_2[}(s)\widehat{\lambda}_s^*\sigma_s\widehat{\lambda}_s dB_s \\ &\leq \left(\widehat{K}_{T_2-} - \widehat{K}_{T_1}\right)\int_0^T \mathbf{1}_{]T_1;T_2[}(s)\theta_s^*\sigma_s\theta_s dB_s\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}(2.2)\qquad E\left(\left(\int_0^T \mathbf{1}_{]T_1;T_2[}(s)\theta_s^* dA_s\right)^2\right) &\leq c\, E\left(\int_0^T \mathbf{1}_{]T_1;T_2[}(s)\theta_s^*\sigma_s\theta_s dB_s\right) \\ &= c\|\mathbf{1}_{]T_1;T_2[}\theta\|^2_{L^2(M)}\end{aligned}$$

En injectant cette inégalité dans l'inégalité (2.1) on obtient ainsi l'inégalité recherchée puisque la constante $c$ est strictement inférieure à un.

**Lemme 2.2.** Soit $T_0$ un temps d'arrêt prévisible. Alors, pour tout $\theta \in \Theta$ et toute variable aléatoire $R_0 \in L^2(\mathcal{F}_0)$

$$\|\mathbf{1}_{[T_0]}\theta\|_{L^2(M)} \leq \|R_0 + G_{T_0}(\theta)\|_2$$

**Démonstration.** Pour tout $\theta \in \Theta$ et toute v.a. $R_0 \in L^2(\mathcal{F}_0)$, on a l'égalité suivante $\|R_0 + G_{T_0}(\theta)\|_2^2 = \left\|\int_0^T \mathbf{1}_{[T_0]}(s)\theta_s dM_s + \int_0^T \mathbf{1}_{[T_0]}(s)\theta_s^* dA_s + \int_0^T \mathbf{1}_{]0;T_0[}(s)\theta_s dX_s + R_0\right\|_2^2$.
Or $A$ est prévisible donc $\int_0^T \mathbf{1}_{[T_0]}(s)\theta_s^* dA_s$ est $\mathcal{F}_{T_0-}$-mesurable. Par conséquent, les variables $\int_0^T \mathbf{1}_{[T_0]}(s)\theta_s dM_s$ et $\int_0^T \mathbf{1}_{[T_0]}(s)\theta_s^* dA_s + \int_0^T \mathbf{1}_{]0;T_0[}(s)\theta_s dX_s + R_0$ sont orthogonales. D'où

$$\|R_0 + G_{T_0}(\theta)\|_2^2 = \left\|\mathbf{1}_{[T_0]}\theta\right\|^2_{L^2(M)} + \left\|\int_0^T \mathbf{1}_{[T_0]}(s)\theta_s^* dA_s + \int_0^T \mathbf{1}_{]0;T_0[}(s)\theta_s dX_s + R_0\right\|_2^2$$

ce qui achève la démonstration du lemme 2.2.

**Théorème 2.3.** Les trois normes $\| \,.\, \|_{L^2(M)}$, $|\!|\!| \,.\, |\!|\!|$ et $| \,.\, |_2$ sont équivalentes.

**Démonstration.** Dans la suite, $C$ désigne une constante qui peut varier de ligne en ligne.
Il est bien connu que $| \,.\, |_2 \leq C|\!|\!| \,.\, |\!|\!|$. D'après le lemme 1.2, $|\!|\!| \,.\, |\!|\!| \leq C\| \,.\, \|_{L^2(M)}$ ; donc pour montrer que les trois normes sont équivalentes, il suffit de montrer que $\| \,.\, \|_{L^2(M)} \leq C| \,.\, |_2$.

Comme $\widehat{K}$ est uniformément borné en $t$ et $\omega$, il existe une constante $c \in ]0;1[$ et une suite finie de temps d'arrêt prévisibles $(T_i)_{0\leq i\leq n}$ telles que $0 = T_0 \leq T_1 \leq ... \leq T_n = T$ et $\widehat{K}_{T_i-} - \widehat{K}_{T_{i-1}} \leq c \quad P$-p.s. pour $i = 1, ..., n$.

Pour construire une telle suite, on peut prendre $\epsilon > 0$ tel que $c = \dfrac{3}{4} + \epsilon < 1$ et poser
$T_0 = 0$

$$T_{i+1} = \begin{cases} \inf\left\{T_i < t \leq T \mid \widehat{K}_t - \widehat{K}_{T_i} \geq \frac{3}{4} + \epsilon\right\} \wedge \inf\left\{T_i < t \leq T \mid \Delta\widehat{K}_t \geq \frac{3}{4}\right\} \\ T \quad \text{si les deux ensembles ci-dessus sont vides.} \end{cases}$$

$T_n = T$ avec $n$ suffisamment grand pour que $\widehat{K}_{T-} - \widehat{K}_{T_{n-1}} \leq \dfrac{3}{4} + \epsilon \quad P$-p.s.

Tous les temps d'arrêt $T_i$ sont alors prévisibles en tant que débuts d'ensembles prévisibles, fermés à droite.

D'après le lemme 2.2, $\|\mathbf{1}_{[T_n]}\theta\|_{L^2(M)} \leq |\mathbf{1}_{]0;T_n]}\theta|_2$. Or, les inégalités du début de la démonstration impliquent que

$$|\mathbf{1}_{]0;T_n[}\theta|_2 \leq |\mathbf{1}_{]0;T_n]}\theta|_2 + |\mathbf{1}_{[T_n]}\theta|_2 \leq |\mathbf{1}_{]0;T_n]}\theta|_2 + C\|\mathbf{1}_{[T_n]}\theta\|_{L^2(M)},$$

si bien que

$$|\mathbf{1}_{]0;T_n[}\theta|_2 \leq C|\mathbf{1}_{]0;T_n]}\theta|_2. \tag{2.3}$$

Le lemme (2.1) nous dit que

$$\|\mathbf{1}_{]T_{n-1};T_n[}\theta\|_{L^2(M)} \leq C|\mathbf{1}_{]0;T_n[}\theta|_2$$

et l'inégalité (2.3) entraîne alors que $\|\mathbf{1}_{]T_{n-1};T_n[}\theta\|_{L^2(M)} \leq C|\mathbf{1}_{]0;T_n]}\theta|_2$.
Comme $\mathbf{1}_{]T_{n-1};T_n]} \leq \mathbf{1}_{]T_{n-1};T_n[} + \mathbf{1}_{[T_n]}$ et que la norme $\| \,.\, \|_{L^2(M)}$ peut s'exprimer sous la forme

$$\|\theta\|^2_{L^2(M)} = E\left(\int_0^T \theta_s^* \sigma_s \theta_s dB_s\right),$$

en utilisant le fait que $\sigma$ est une matrice symétrique positive, on obtient l'inégalité

$$\|\mathbf{1}_{]T_{n-1};T_n]}\theta\|_{L^2(M)} \leq C|\mathbf{1}_{]0;T_n]}\theta|_2. \tag{2.4}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} |\mathbf{1}_{]0;T_{n-1}]}\theta|_2 &\leq |\mathbf{1}_{]0;T_n]}\theta|_2 + |\mathbf{1}_{]T_{n-1};T_n]}\theta|_2 \\ &\leq |\mathbf{1}_{]0;T_n]}\theta|_2 + C\|\mathbf{1}_{]T_{n-1};T_n]}\theta\|_{L^2(M)}, \end{aligned}$$

donc en appliquant l'inégalité (2.4), on obtient

$$(2.5) \qquad |\mathbf{1}_{]0;T_{n-1}]}\theta|_2 \le C|\mathbf{1}_{]0;T_n]}\theta|_2.$$

Une récurrence descendante permet alors d'achever la démonstration du théorème 2.3.

**Théorème 2.4.** Le sous-espace $G_T(\Theta)$ est fermé dans $L^2$.

**Démonstration.** Soit $(G_T(\theta^n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $G_T(\Theta)$ qui tend vers $Y$ dans $L^2$. Alors la suite $(\theta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme $|\ .\ |_2$, donc d'après le théorème 2.3, elle est de Cauchy pour la norme $\|\ .\ \|_{L^2(M)}$. Or il est bien connu que l'espace $\left(L^2(M), \|\ .\ \|_{L^2(M)}\right)$ est complet, si bien que la suite $(\theta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2(M)$ vers un processus prévisible $\theta$. Comme $\Theta = L^2(M)$, le théorème 2.3 montre que $Y = G_T(\theta)$.

Grâce aux lemmes 1.2, 2.1 et 2.2 nous allons montrer le

**Théorème 2.5.** Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}_0$. Le sous-espace $L^2(\mathcal{G}) + G_T(\Theta)$ est fermé dans $L^2$.

**Démonstration.** Soit $(R_p + G_T(\theta^p))_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^2(\mathcal{G}) + G_T(\Theta)$ qui converge vers $Y$ dans $L^2$. Reprenons les temps d'arrêt $(T_i)$ introduits dans la démonstration du théorème 2.3. Le lemme 2.2 nous dit que la suite $(\mathbf{1}_{[T_n]}\theta^p)$ converge dans $L^2(M)$, donc aussi dans $L^2(A)$, d'après le lemme 1.2. Ainsi $G_{T_n}(\mathbf{1}_{[T_n]}\theta^p)$ converge dans $L^2$ vers une variable $Z$. On remplace alors la variable $Y$ par $Y - Z$ et on applique le lemme 2.1. à l'intervalle $]T_{n-1}; T_n[$. On en déduit que la suite $(G_T(\mathbf{1}_{]T_{n-1};T_n[}\theta^p))$ converge dans $L^2$ vers une variable $W$. Une récurrence descendante permet d'achever la démonstration du théorème 2.5.

Dans le corollaire suivant, nous généralisons un peu le théorème 5 de l'article [7] de M. Schweizer. La démonstration étant la même que celle de M. Schweizer, nous ne la reproduisons pas ici. Le lecteur intéressé pourra se référer à [7].

**Corollaire 2.6.** Soit $\mathbb{G}$ une sous-filtration de $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ vérifiant les conditions habituelles. Soit $\Theta(\mathbb{G})$ l'ensemble des processus $\theta \in \Theta$ qui sont prévisibles par rapport à $\mathbb{G}$. Alors, $G_T(\Theta(\mathbb{G}))$ est fermé dans $L^2$.

**Remarques 2.7.** **1)** Si $\widehat{K}$ n'est pas uniformément borné, alors $G_T(\Theta)$ peut ne pas être fermé : W. Schachermayer a exhibé un exemple dans le cas discret (cf [6]). Pour un exemple avec une semimartingale continue, le lecteur pourra se référer à [3].

**2)** Si $\widehat{K}$ n'est pas uniformément borné, la question de savoir si $G_T(\Theta)$ peut être fermé n'est pas résolue.

**3)** Lorsque $\widehat{K}$ n'existe pas, $G_T(\Theta)$ peut être fermé. Pour cela, on peut considérer la semimartingale $X$ définie par $dX_t = d\delta_1$. Si $(G_1(\theta^p))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $Y$ dans $L^2$, alors en posant $\theta := E(Y \mid \mathcal{F}_{t-})$, on a $Y = G_1(\theta)$.

**4)** Le fait que $G_T(\Theta)$ soit fermé permet d'affirmer qu'il existe une et une seule stratégie optimale au sens de la norme $L^2$ pour tout actif contingent $H \in L^2$. Cette stratégie est la projection de la variable aléatoire $H$ sur le sous-espace de $L^2$, $G_T(\Theta)$. Dans le cas où $\widehat{K}$ est déterministe, M. Schweizer a montré dans **[6]** que la stratégie optimale est solution d'une équation différentielle stochastique. Lorsqu'on ne suppose plus que $\widehat{K}$ est déterministe, une telle caractérisation de la stratégie optimale reste un problème ouvert sauf dans le cas discret (voir M. Schweizer **[5]**).

Nous remercions M. Schweizer pour des discussions fructueuses sur cet article.

# Références.

**[1]** C. Dellacherie et P.A. Meyer "Probabilités et potentiel", Chapitres V à VIII, Théorie des martingales, Hermann, 1980.

**[2]** J. Jacod "Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales", Lecture Notes in Mathematics 714, Springer, 1979.

**[3]** P. Monat et C. Stricker "Föllmer-Schweizer Decomposition and Closedness of $G_T(\Theta)$", preprint, Université de Franche-Comté, 1994.

**[4]** P. Monat et C. Stricker "Décomposition de Föllmer-Schweizer et fermeture de $G_T(\Theta)$ ", Note aux CRAS, T. 318, Série I, 1994.

**[5]** M. Schweizer "Variance-Optimal Hedging in Discrete Time", preprint, Université de Göttingen, 1994.

**[6]** M. Schweizer "Approximating Random Variables by Stochastic Integrals", à paraître dans Annals of Probability, 1994.

**[7]** M. Schweizer "A Projection Result for Semimartingales", à paraître dans Stochastics and Stochastics Reports, 1994.