SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN-PASCAL ANSEL

Remarques sur le prix des actifs contingents

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 28 (1994), p. 181-188

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1994__28__181_0>

Remarques sur le prix des actifs contingents

par Jean-Pascal Ansel

Université de Besançon - Faculté des Sciences et Techniques
Laboratoire de Mathématiques. C.N.R.S. UA 741
16, Route de Gray - 25030 Besançon cedex

1 Introduction

L'évaluation des actifs contingents à partir de la dynamique des prix de certains actifs, dits de base, dans le cadre d'un marché complet est un problème résolu. Une façon d'éviter les opportunités d'arbitrage consiste à supposer qu'il existe une loi martingale pour le processus modélisant les prix des actifs de base. Dans un marché complet cette loi est unique et le prix de l'actif contingent est obtenu en calculant son espérance par rapport à cette loi martingale. Par contre, lorsque le marché est incomplet, il existe plusieurs lois martingales et donc plusieurs prix possibles pour l'actif contingent. Dans Ansel-Stricker[2], nous avons montré que la borne supérieure de tous ces prix est atteinte si et seulement s'il existe une stratégie de couverture pour l'actif considéré. Dans cet article nous supposons le plus souvent que le processus des prix de base est continu. Un de nos buts est d'étudier comment on peut estimer le prix maximum d'un actif même non simulable par la borne inférieure des prix maximum des actifs simulables qui le majorent. Le second but est d'illustrer la situation décrite par Delbaen[4] dans laquelle l'ensemble des lois martingales est faiblement relativement compact . Le dernier objectif est de donner une autre démonstration d'un théorème de Delbaen[4] sur l'absence des temps d'arrêt totalement inaccessibles et des martingales locales continues, toujours avec cette hypothèse de compacité faible.

2 Notations et définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, P)$ un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. On suppose que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ et que $\mathcal{F}_0$ est la tribu dégénérée. Toutes les filtrations et tous les processus considérés seront indexés par $[0,1]$. Les vecteurs x de $\mathbb{R}^d$ seront identifiés à des matrices $d \times 1$, x^* désignera la transposée de x et $\|x\|^2 := x^*x$. On notera $(H^*.X)_t$ l'intégrale stochastique vectorielle (voir Jacod[5] pour une définition précise) du processus prévisible H à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ par rapport à la semimartingale vectorielle $X = (X^1, ..., X^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Nous conviendrons que $(H^*.X)_0 = 0$. A la semimartingale vectorielle X on associe l'ensemble

$$K := \{(H^*.X)_1 : H \text{ étant prévisible, élémentaire et borné}\}$$

Le système des prix actualisés des actifs de base est décrit par la semimartingale X, nulle en 0, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Les différentes tentatives de formaliser le non arbitrage conduisent à supposer qu'il existe une loi Q équivalente à P sous laquelle le processus X est une martingale. Cette loi est dite loi martingale et $\mathcal{M}^e(P)$ désigne l'ensemble de ces lois martingales. Rappelons que Stricker[6] a montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une loi de martingale à densité bornée est que $\overline{K - L^1_+} \cap L^1_+ = \{0\}$, l'adhérence étant prise dans $L^1(P)$.

Un *portefeuille* est la donnée d'un couple (x, ξ) où x est un réel positif représentant le placement initial et ξ un procesus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ représentant la stratégie d'investissement. La valeur de ce portefeuille à l'instant t est donnée par $V_t := x + (\xi.X)_t$. Un *actif contingent* est la donnée d'une v.a. positive B, $\mathcal{F}$ mesurable, qui représente le risque financier pour le vendeur de l'option. Dès lors on conçoit que le prix x de cette option (ou *prime*) soit égal à l'espérance de B et que le vendeur de l'option cherche à se couvrir par un portefeuille (x, ξ). On dira donc que B est *simulable* ou qu'on peut le *couvrir* s'il existe un tel portefeuille dont la valeur V_1 est égale à B, et une loi Q de $\mathcal{M}^e(P)$ telle que $V_t := x + (\xi.X)_t$ soit une Q-martingale. Souvent on utilise la notation *Q-simulable*. Nous supposerons que P est aussi une loi martingale pour X. Les prix maximum et minimum de B sont définis par :

$$\Pi(B) := \sup_{R \in \mathcal{M}^e(P)} E^R[B]; \qquad \pi(B) := \inf_{R \in \mathcal{M}^e(P)} E^R[B]$$

Considérons également les ensembles :

- $\mathcal{M}(P)$ des lois absolument continues par rapport à P qui transforment X en martingale.
- $\mathcal{D}(P)$ des densités relativement à P des lois de $\mathcal{M}(P)$.
- $\mathcal{D}^e(P)$ des densités relativement à P des lois de $\mathcal{M}^e(P)$.

$\mathcal{D}^e(P)$ est dense dans $\mathcal{D}(P)$. En effet pour Z dans $\mathcal{D}(P)$, on choisit Z^e dans $\mathcal{D}^e(P)$, on définit $Z^n := \frac{1}{n}Z^e + (1 - \frac{1}{n})Z$, qui appartient à $\mathcal{D}^e(P)$, et on a :

$$E^P[|Z - Z^n|] = \frac{1}{n}E^P[|Z - Z^e|] \longrightarrow_{n \to +\infty} 0$$

Ainsi, on a aussi

$$\Pi(B) := \sup_{R \in \mathcal{M}(P)} E^R[B]; \qquad \pi(B) := \inf_{R \in \mathcal{M}(P)} E^R[B]$$

3 Comparaison de $\Pi(B)$ et $I(B)$

Comme nous l'indiquions dans l'introduction, l'un des objets de cet article est l'estimation de $\Pi(B)$ à partir des $\Pi(C)$ pour les actifs C qui majorent B. Nous appellerons $\mathcal{S}$ l'ensemble des actifs contingents simulables C qui majorent B et :

$$I(B) := \inf_{C \in \mathcal{S}} \Pi(C)$$

Dans Ansel-Stricker[2], nous avons montré que pour un actif C simulable par un portefeuille (x,ξ) on a $x = \Pi(C)$. Maintenant, si C majore B, sous toutes les lois R de $\mathcal{M}(P)$ on a $E^R[B] \leq E^R[C] \leq \Pi(C)$ donc dans tous les cas

$$\Pi(B) \leq I(B)$$

Le problème est de savoir s'il y a égalité.

Théorème 1 *Si B est un actif contingent avec $\Pi(B) < +\infty$, alors :*

$$B \in \mathcal{A} := \Pi(B) + \overline{K - L^1_+}$$

Preuve

On utilise ici des techniques proches de celles employées d'une part dans Delbaen[4] et d'autre part dans Ansel-Stricker[1] pour généraliser un théorème de Yan. Si $B \notin \mathcal{A} := \Pi(B) + \overline{K - L^1_+}$, le théorème de Hahn Banach assure l'existence d'une v.a. $\rho \in L^\infty$ avec

$$E[\rho B] > \sup_{A \in \mathcal{A}} E[\rho A] \qquad (*)$$

Or pour tout n de $\mathbb{N}$, la variable $\Pi(B) - n1_{(\rho<0)} \in \mathcal{A}$ donc $E[\rho 1_{(\rho<0)}] = 0$ et $\rho \geq 0$ p.s., $\sup_{A\in\mathcal{A}} E[\rho A] < +\infty$. Soient

$$\mathcal{D} := \{Z \in L^\infty_+, \sup_{A\in\mathcal{A}} E[ZA] < +\infty\}$$

$$\mathcal{C} := \{(Z = 0), Z \in \mathcal{D}\}$$

Montrons que $\mathcal{C}$ est stable par intersection dénombrable. Soit $(Z_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}$ et $a_n := \|Z_n\|_\infty, c_n := \sup_{A\in\mathcal{A}} E[Z_n A]$. Il existe une suite $(b_n) \in \mathbb{R}^*_+$ avec $\sum_1^\infty a_n b_n < +\infty$ et $\sum_1^\infty c_n b_n < +\infty$ ainsi $Z := \sum_1^\infty b_n Z_n$ est dans $\mathcal{D}$ et $(Z = 0) = \cap_n^\infty (Z_n = 0)$. Il existe donc $Z \in \mathcal{D}$ vérifiant $P(Z = 0) = \inf_{C\in\mathcal{C}} P(C)$. Supposons que $P(Z = 0) > 0$; comme $\overline{K - L^\infty_+} \cap L^1_+ = \{0\}$, le théorème de Hahn-Banach permet de séparer $\overline{K - L^\infty_+}$ et $1_{(Z=0)}$, et ainsi d'établir l'existence d'une v.a. $\rho \in L^\infty_+$ avec $E[\rho 1_{(Z=0)}] > 0$ et

$$\sup_{Y\in\overline{K-L^\infty_+}} E[\rho Y] < +\infty$$

Ainsi on a successivement $\sup_{A\in\mathcal{A}} E[\rho A] < +\infty$, $\frac{\rho+Z}{E[\rho+Z]} \in \mathcal{D}$ et $P(Z + \rho = 0) < P(Z = 0)$, ce qui est contradictoire. On peut ainsi construire $Z \in L^\infty_+$, $Z > 0$ p.s. $E[Z] = 1$ et $\sup_{Y\in\overline{K}} E[ZY] < +\infty$. Or $\overline{K}$ est un espace vectoriel donc $E[YZ] = 0$ pour tout $Y \in \overline{K}$. On a ainsi montré que Z est un élément de $\mathcal{D}(P)$ et comme $\Pi(B)$ est dans $\mathcal{A}$, si Q est la loi de densité $\frac{dQ}{dP} = Z$, on a $E^Q[B] > \sup_{A\in\mathcal{A}} E^Q[A] \geq \Pi(B)$ ce qui conduit à une contradiction et le théorème est démontré.

Remarque : Puisque $K \subset L^1(Q)$ pour n'importe quelle loi Q de $\mathcal{M}^e(P)$, l'adhérence de $K - L^\infty_+$ peut être prise dans $L^1(Q)$.

Théorème 2 *Si X est à trajectoires continues et si $\mathcal{S}$ est non vide, alors :*

$$\Pi(B) = I(B)$$

Preuve

Comme $\mathcal{S}$ est non vide, il existe un actif C, Q-simulable, qui majore B. Appliquons le théorème précédent en nous plaçant désormais sous la loi Q. Il existe donc une suite (H_n) de processus prévisibles élémentaires et une suite (B_n) de v.a. positives bornées telles que

$$\Pi(B) + (H_n^*.X)_1 - B_n \xrightarrow{L^1} B.$$

On va construire deux suites (U_n) et (B_n') telles que U_n soit un processus prévisible élémentaire borné, $B_n' \in L_+^\infty$, la suite $((U_n^*.X)_1)$ soit uniformément intégrable et :

$$\Pi(B) + (U_n^*.X)_1 - B_n' \xrightarrow{L^1} B.$$

Comme C est simulable, il s'écrit $C = \theta + (\xi^*.X)_1$, et le processus $\theta + (\xi.X)_t$ est une Q-martingale positive. Le fait que X soit continu nous permet d'introduire les temps d'arrêt suivants :

$$T_n := \inf\{t, \Pi(B) + (H_n^*.X)_t \geq \theta + (\xi^*.X)_t\}$$

avec la convention $T_n := 1$ si $\Pi(B) + (H_n^*.X)_t < \theta + (\xi^*.X)_t$ pour tout $t \in [0,1]$. Remarquons que $(\Pi(B) + (H_n^*.X)_1)^- \geq (\Pi(B) + (H_n^*.X)_{T_n})^- \geq 0$. Or $(\Pi(B) + (H_n^*.X)_1)^-$ tend vers 0 dans L^1, si bien que la suite $(\Pi(B) + (H_n^*.X)_{T_n})$ est uniformément intégrable en vertu de l'inégalité $0 \leq (\Pi(B)+(H_n^*.X)_{T_n})^+ \leq (\theta+(\xi^*.X)_1)^+$. Toutefois le processus $1_{[0,T_n]}H_n$ n'est pas élémentaire. Afin d'en obtenir un, construisons une suite de temps d'arrêt (S_n) telle que S_n ne prenne qu'un nombre fini de valeurs et que $E[|(H_n^*.X)_{T_n} - (H_n^*.X)_{S_n}|]$ tende vers 0. Il est bien connu qu'il existe une suite de t.a. $(T_{nm})_m$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs et tendant en décroissant vers T_n. Quitte à poser $T'_{nm} = T_{nm}$ si $|(H_n^*.X)_{T_n} - (H_n^*.X)_{T_{nm}}| \leq 1$ et $T'_{nm} = 1$ sinon, on voit que $E[|(H_n^*.X)_{T_n} - (H_n^*.X)_{T'_{nm}}|]$ tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$. On peut donc choisir m tel que $E[|(H_n^*.X)_{T_n} - (H_n^*.X)_{T'_{nm}}|] \leq \frac{1}{n}$. Posons $S_n := T'_{nm}, U_n := 1_{[0,S_n]}H_n$, $B_n' := 1_{(T_n<1)}(\theta + (\xi^*.X)_{T_n} - B)^+ + 1_{(T_n=1)}B_n$, et $A := \{B \leq \theta + (\xi^*.X)_{T_n}\}$. Mais :

$$\Pi(B) + (H_n^*.X)_{T_n} - B_n' = \begin{cases} \Pi(B) + (H_n^*.X)_1 - B_n & sur \quad \{T_n = 1\} \\ B & sur \quad \{T_n < 1\} \cap A \\ 0 & sur \quad \{T_n < 1\} \cap A^c \end{cases}$$

Ainsi $\Pi(B)+(H_n^*.X)_{T_n}-B_n' \xrightarrow{L^1} B$ et il en sera de même pour $\Pi(B)+(H_n^*.X)_{S_n}-B_n'$ et pour $\Pi(B)+(U_n^*.X)_1-B_n'$. Puisque $(U_n^*.X)_1$ est uniformément intégrable, on peut extraire une suite qui converge faiblement dans L^1 vers une v.a. Y. Comme $\overline{K}$ est un convexe fermé pour la topologie forte, $Y \in \overline{K}$. Mais $\Pi(B)+(U_n^*.X)_1-B_n' \xrightarrow{L^1} B$ si bien que la convergence faible de $(U_n^*.X)_1$ entraîne la convergence faible de (B_n') vers une v.a. $B' \geq 0$. Cependant un résultat de Yor [7] nous dit que puisque $(U_n^*.X)_1$ converge faiblement, la v.a. Y est aussi une martingale de la forme $(V^*.X)_1$ où V est un processus prévisible intégrable relativement à X. Ainsi $B = \Pi(B)+(V_n^*.X)_1-B'$, l'actif $S' := \Pi(B) + (V_n^*.X)_1$ est simulable et majore B avec $\Pi(S') = \Pi(B)$.

Remarques :

- Ce résultat figure dans Delbaen[4] lorsque X et B sont bornées.
- Nous montrons en réalité que B est dans $\Pi(B) + \overline{K} - L^1_+$.
- Les hypothèses du théorème 2 nous permettent de traiter le cas du *call* : option d'achat sur l'un des actifs de base (X^1 par exemple). Si le prix d'exercice du call est E, alors le risque financier est donné par $B = (X^1_1 - E)^+$. Or $B \leq X^1_1 = X^1_0 + (H^*.X)_1$ où H est le processus prévisible élémentaire $(1, 0, ..., 0)^*$, B est donc majoré par un actif simulable.

4 Cas faiblement compact

Delbaen[4] montre que pour un système de prix X continu, il est équivalent de supposer que $\mathcal{D}(P)$ est $\sigma(L^1, L^\infty)$ compact ou que

$$\forall B \in L^\infty, \qquad \exists Q_o \in \mathcal{M}(P),$$

$$E^{Q_o}[B] = \sup_{R \in \mathcal{M}(P)} E^R[B]$$

Illustrons cette situation avec l'exemple suivant.
Supposons que le système de prix des actifs de base $(X_t)_{t\in[0,1]}$ soit de la forme $X_t := exp(W_t - \frac{t}{2})$ où W_t est un mouvement brownien. Soit ε une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, ..., n\}$ indépendante de X. Posons $A_n := \{\varepsilon = n\}$ et $\alpha_n := P(A_n) > 0$. On suppose que la filtration est construite de la façon suivante. Pour $t < 1$, $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s, s \leq t)$ et $\mathcal{F}_1 := \sigma(\varepsilon, X_s, s \leq 1)$. Une variable aléatoire Y $\mathcal{F}_1$-mesurable s'écrit sous la forme $Y = \sum_0^n Y^j 1_{A_j}$ où les Y^j sont des v.a. $\sigma(X_s, s \leq 1)$. Soit maintenant $Z \in \mathcal{D}(P)$, et soit $Z_t := E[Z|\mathcal{F}_t]$ la martingale associée à Z. Pour $t \in [0, 1[$, $(Z_s)_{[0,t]}$ est une martingale orthogonale à X et adaptée à la filtration naturelle de X, donc $Z_t = 1$ pour $t < 1$ et $Z_t = 1_{[0,1[} + Z1_{[1]}$. D'autre part Z est de la forme $Z = \sum_0^n Z^j 1_{A_j}$ avec Z^j positive. Par représentation prévisible, $Z - 1$ est orthogonale au sens ordinaire à tous les $Z^j - z^j$ où $z^j := E[Z^j]$. Ainsi on a successivement

$$E[(Z-1)(Z^j - z^j)] = 0$$

$$E[\sum_i (Z^i - z^i)(Z^j - z^j)\alpha_i] = 0$$

$$E[\sum_{i,j} (Z^i - z^i)(Z^j - z^j)\alpha_i\alpha_j] = E[(\sum_i (Z^i - z^i)\alpha_i)^2] = 0$$

et $\sum_i Z^i\alpha_i = 1$ p.s. puisque $\sum_i z^i\alpha_i = E[Z] = 1$. Réciproquement si Z est une v.a. de la forme $Z = \sum_0^n Z^j 1_{A_j}$ avec Z^j positive et $\sum_0^n Z^j\alpha_j = 1$, alors $Z \in \mathcal{D}(P)$. En effet $E[ZX_1|\mathcal{F}_t]$=$E[\sum_i Z^i X_1 1_{A_i}|\mathcal{F}_t]$ =$E[\sum_i Z^i X_1 \alpha_i|\mathcal{F}_t] = X_t$.

Toute variable Z dans $\mathcal{D}(P)$ est donc de la forme $Z = \sum_0^n Z^j 1_{A_j}$ avec $0 \leq Z^j \leq \frac{1}{\alpha_j}$ puisque $\sum_i Z^i\alpha_i = 1$ p.s., donc $0 \leq Z \leq (n+1)$ et $\mathcal{D}(P)$ est faiblement compact.

Cette fois pour un actif $B = \sum_0^n B^j 1_{A_j}$, définissons les deux v.a. positives intégrables $\overline{B} := \sup_j(B^j)$ et $\underline{B} := \inf_j(B^j)$. On pose pour $0 \leq j \leq n$:

$$\overline{Z}^j := 1_{\{(\overline{B}=B^j)\setminus\cup_0^{j-1}(\overline{B}=B^i)\}}; \qquad \underline{Z}^j := 1_{\{(\underline{B}=B^j)\setminus\cup_0^{j-1}(\underline{B}=B^i)\}}$$

On définit ainsi deux densités de $\mathcal{D}(P)$:

$$\overline{Z} := \sum_0^n \overline{Z}^j \frac{1}{\alpha_j} 1_{A_j}; \qquad \underline{Z} := \sum_0^n \underline{Z}^j \frac{1}{\alpha_j} 1_{A_j}$$

Et on a :

$$\Pi(B) = E[\overline{Z}B] = E[\overline{B}]; \qquad \pi(B) = E[\underline{Z}B] = E[\underline{B}]$$

Remarque : Ici le calcul est valable pour B non borné.

Nous allons donner maintenant une autre démonstration d'un résultat de Delbaen[4], en le complétant avec l'assertion *iii*).

Théorème 3 *Lorsque le système de prix est continu et que $\mathcal{D}(P)$ est $\sigma(L^1, L^\infty)$ compact, il n'y a :*
i) ni temps d'arrêt totalement inaccessible
ii) ni martingale locale continue orthogonale à X
iii) ni v.a. Y prenant une infinité de valeurs et telle que $\sigma(Y)$ et $\sigma(X_1)$ soient conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{F}_t$ pour tout $t \in [0,1]$.

Preuve

- Si Q une loi de $\mathcal{M}(P)$, alors sa densité $\frac{dQ}{dP}$ est de la forme $\varepsilon(L)_1$ où L est une martingale locale avec $\Delta L > -1$ orthogonale à X (voir Ansel-Stricker[3] pour la forme des densités dans un cadre général). Rappelons que $\varepsilon(L)$ est l'exponentielle stochastique de L, unique solution de l'équation différentielle $Y = 1 + (Y_-.L)$, qui s'écrit aussi :

$$\varepsilon(L)_t = \exp(L_t - \frac{1}{2}\langle L^c, L^c\rangle_t) \prod_{s\leq t}(1 + \Delta L_s)e^{-\Delta L_s}$$

  Ainsi s'il existe une famille $(\varepsilon(L^\lambda)_1)$ non uniformément intégrable, alors d'après le théorème de compacité de Dunford-Pettis, $\mathcal{D}(P)$ ne sera pas $\sigma(L^1, L^\infty)$ compact.

- Soit T un t.a. totalement inaccessible. Posons $A_t := 1_{[T,1]}$ et soit $\tilde{A}$ son compensateur prévisible. Considérons alors la famille de martingales $M_t^\lambda := \lambda(A_t - \tilde{A}_t)$, $\lambda > 0$, orthogonale à X (car elle est continue). Les variables aléatoires $Z^\lambda := \varepsilon(M^\lambda)_1 = \exp(-\lambda\tilde{A}_1)(1 + \lambda 1_{[T,1]})$ sont d'espérance 1 pour tout λ. Or on a

$$E[Z^\lambda] \geq E[Z^\lambda 1_{(\tilde{A}_1=0)}] \geq (1+\lambda)P(\tilde{A}_1 = 0) \stackrel{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

  si $P(\tilde{A}_1 = 0) > 0$. Du fait que $E[Z^\lambda] = 1$, cette dernière probabilité est nulle et $Z^\lambda \stackrel{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$ p.s. donc la famille (Z^λ) n'est pas uniformément intégrable et l'on a la première assertion.

- Soit N une martingale locale continue nulle en 0, orthogonale à X. Soit (T_n) la suite de t.a. définie par $T_n := \inf\{t, |N_t| \geq n\}$. Considérons la famille

$$Z^\lambda := \varepsilon(\lambda N^{T_n})_1 = \exp(\lambda N_1^{T_n} - \frac{\lambda^2}{2}\langle N, N\rangle_1^{T_n})$$

Soit $B := \inf\{t, \langle N, N\rangle_t^{T_n} > 0\}$, alors B est prévisible et $\langle N, N\rangle^{T_n \wedge B} = 0$ puique N est continue. Donc $N^{T_n \wedge B} = 0$ et sur $\{\langle N, N\rangle_1^{T_n} = 0\}$ on a $N_1^{T_n} = 0$ et $Z^\lambda = 1$.

De même que dans le paragraphe précédent la famille (Z^λ) est uniformément intégrable si et seulement si la famille $(Z^\lambda 1_{(\langle N,N\rangle_1^{T_n} \neq 0)})$ l'est aussi. Or

$$E[Z^\lambda 1_{(\langle N,N\rangle_1^{T_n} \neq 0)}] = P(\langle N, N\rangle_1^{T_n} \neq 0)$$

et

$$Z^\lambda 1_{(\langle N,N\rangle_1^{T_n} \neq 0)} \xrightarrow{\lambda \to \infty} 0$$

Donc (Z^λ) n'est pas uniformément intégrable et l'on a la seconde assertion.

- Soit Y une v.a. prenant une infinité de valeurs et telle que $\sigma(Y)$ et $\sigma(X_1)$ soient conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{F}_t$ pour tout $t \in [0, 1]$. Soit $(B_k)_{\mathbb{N}}$ une suite dénombrable de boréliens deux à deux disjoints telle que: si $A_k := (Y \in B_k)$ alors $\alpha_k := P(A_k) > 0$. Nécessairement $\alpha_k \xrightarrow{k \to \infty} 0$.

Posons $Z(k) := \frac{1}{\alpha_k} 1_{A_k}$; $Z(k)$ est une v.a. positive d'espérance 1 et la martingale associée $E[Z(k)|\mathcal{F}_t]$ est orthogonale à X en vertu de l'indépendance conditionnelle :

$$E[Z(k)X_1|\mathcal{F}_t] = E[Z(k)|\mathcal{F}_t]E[X_1|\mathcal{F}_t] = E[Z(k)|\mathcal{F}_t]X_t$$

Ainsi $Z(k) \in \mathcal{D}(P)$ et $(Z(k))_{\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément intégrable.

References

[1] J.P. Ansel, C Stricker :
Quelques remarques sur un théorème de Yan. Séminaire de Probabilités XXIV. Lect. Notes Math. 1426, p. 226-274, Springer (1990).

[2] J.P. Ansel, C. Stricker :
Couverture des Actifs Contingents et Prix Maximum. A paraître dans les Ann. Inst. H. Poincaré (1993).

[3] J.P. Ansel, C Stricker :
Unicité et existence de la loi minimale. A paraître dans le Séminaire de Probabilités XXVII (1993).

[4] F. Delbaen :
Representing Martingale Measures when Asset Prices are Continuous and Bounded. A paraître (1993).

[5] J. Jacod :
Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales. Lect. Notes Math. 714. Springer (1979).

[6] C. Stricker :
Arbitrage et lois de martingale. Annales de l'Institut Henri Poincaré 26, p. 451-460 (1990).

[7] M. Yor :
Sous-espaces denses dans L^1 ou H^1 et représentation des martingales. Séminaire de Probabilités XII. Lect. Notes Math. 649 p.265-309 (1978).