JEAN BERTOIN
WENDELIN WERNER

Comportement asymptotique du nombre de tours effectués par la trajectoire brownienne plane

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 28 (1994), p. 164-171
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1994__28__164_0>

Comportement asymptotique du nombre de tours effectués par la trajectoire brownienne plane

Jean Bertoin, Wendelin Werner

C.N.R.S.
Laboratoire de Probabilités, Tour 56
Université Paris 6
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05, France

Introduction

Soit $Z = (Z_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien complexe issu de 1 et $\theta = (\theta_t, t \geq 0)$ la détermination continue issue de 0 de son argument. Le comportement asymptotique de la loi de θ_t lorsque $t \to \infty$ est décrit par le célèbre résultat de Spitzer [8],

$$\frac{2\theta_t}{\log t} \xrightarrow{(\mathrm{d})} C_1 \qquad (t \to \infty) \tag{1}$$

où C_1 désigne une variable de Cauchy symétrique de paramètre 1, c'est-à-dire dont la loi a pour densité $(\pi(1+x^2))^{-1}$ sur $\mathbb{R}$, et où (d) est le symbole pour la convergence en loi. Nous nous intéressons ici au comportement presque-sûr de θ_t quand $t \to \infty$. Le résultat principal de cette note est le suivant:

Théorème 1. *Soit f une fonction positive croissante définie sur $\mathbb{R}_+$. Alors, presque sûrement,*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{\theta_t}{f(t) \log t} = 0 \text{ ou } \infty \tag{2}$$

suivant que

$$\int^{\infty} \frac{dt}{t f(t) \log t} \text{ converge ou diverge.} \tag{3}$$

Par exemple, on voit que pour $f(t) = (\log\log t)^\alpha$, le membre de gauche dans (2) vaut 0 si $\alpha > 1$ et ∞ sinon.
L'inversion du temps permet de donner une version du théorème 1 en temps petit. Plus précisément, si $(Z'_t, t \geq 0)$ désigne un mouvement brownien plan issu de 0 et $(\theta'_t, t > 0)$ la détermination continue de son argument qui vaut 0 au temps 1, on a alors le résultat suivant:

Corollaire 2. *Soit g une fonction positive décroissante définie sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Alors, presque sûrement,*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\theta'_\varepsilon}{g(\varepsilon)|\log \varepsilon|} = 0 \text{ ou } \infty$$

suivant que

$$\int_0 \frac{du}{ug(u)|\log u|} \text{ converge ou diverge.}$$

Remarquons que ce résultat n'est pas valable uniformément sur la courbe brownienne. Si t_0 est l'instant d'un point-cône $z = Z_{t_0}$ (voir par exemple Le Gall [4], chapitres 3 et 4 pour une description de ces points), alors l'argument de $Z_t - z$ reste borné au voisinage de t_0. A l'opposé, si z est un point de multiplicité infinie de la courbe brownienne avant le temps 1 (voir [4], chapitre 9) et t_0 un point d'accumulation de $\{t < 1, Z_t = z\}$, il est impossible de définir une détermination continue de l'argument de $Z_t - z$ au voisinage de t_0. Enfin, nous mentionnons que dans un travail récent, Z. Shi [9] a caractérisé les fonctions ϕ pour lesquelles $\sup\{|\theta_s|, s \leq t\} < \phi(t)$ infiniment souvent quand t tend vers l'infini.
Le plan de cette note est le suivant: Le premier paragraphe est consacré à la démonstration du théorème 1. Dans la seconde partie, nous établissons des résultats liés au théorème 1 concernant l'horloge associée à θ et les fonctionnelles additives intégrables.

1. La preuve du théorème 1

Il est facile de deviner que la vitesse de croissance de θ est bien celle que l'on obtient dans le théorème 1. En effet, le résultat de Spitzer (1) suggère de rapprocher le comportement asymptotique (lorsque $u \to \infty$) du processus $(\theta_{\exp(2u)}, u \geq 0)$ de celui d'un processus de Cauchy symétrique $C = (C_u, u \geq 0)$. D'autre part, on connait la vitesse de croissance de C (voir par exemple le théorème 11.2 de [2]):

$$\limsup_{u \to \infty} \frac{C_u}{h(u)} = 0 \text{ ou } \infty$$

suivant que

$$\int^\infty \frac{du}{h(u)} \text{ converge ou diverge.}$$

On obtient alors le théorème 1 en effectuant le changement de variables $t = \exp(2u)$. Bien qu'il semble difficile de rendre rigoureux cet argument informel, cela simplifie notre travail en mettant en évidence le test intégral.

La preuve du théorème 1 est divisée en deux parties, chacune précédée de préliminaires.

PRÉLIMINAIRES À LA PREMIÈRE PARTIE DE LA DÉMONSTRATION: Nous utiliserons la majoration suivante qui est vérifiée pourvu que $\lim_{t\to\infty}\tilde{f}(t)=\infty$:

$$P(\sup_{0\le s\le t}\theta_s>\tilde{f}(t)\log t)=O\left(\frac{1}{\tilde{f}(t)}\right)\qquad(t\to\infty). \tag{4}$$

On sait en effet d'après les équations (2.7) et (2.8) de Spitzer [8] (avec $s=1$ et $\alpha=\tilde{f}(t)\log t$), que

$$\begin{aligned}P^{|\mathcal{N}|}(\sup_{0\le s\le t}\theta_s<\tilde{f}(t)\log t)&=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\tilde{f}(t)\log t}{\log((1+t)^{1/2}+t^{1/2})}\right)\\&=1-O\left(\frac{1}{\tilde{f}(t)}\right)\qquad(t\to\infty).\end{aligned}$$

où $\mathcal{N}$ désigne une variable aléatoire réelle centrée normale réduite et $P^{|\mathcal{N}|}$ la loi du mouvement brownien complexe issu de $|\mathcal{N}|$. On a alors immédiatement en utilisant des propriétés de changement d'échelle,

$$\begin{aligned}P(\sup_{0\le s\le t}\theta_s>\tilde{f}(t)\log t).P(|\mathcal{N}|<1)&=P^{|\mathcal{N}|}(\sup_{0\le s\le\mathcal{N}^2t}\theta_s>\tilde{f}(t)\log t\text{ et }|\mathcal{N}|<1)\\&\le P^{|\mathcal{N}|}(\sup_{0\le s\le t}\theta_s>\tilde{f}(t)\log t)\\&=O\left(\frac{1}{\tilde{f}(t)}\right)\qquad(t\to\infty)\end{aligned}$$

ce qui prouve (4).

PREMIÈRE PARTIE DE LA PREUVE DU THÉORÈME 1: Supposons que l'intégrale dans (3) converge; dans ce cas $\lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$. Posons pour tout entier n, $t_n=2^{2^n}$. On a alors (car f est croissante),

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{f(\sqrt{t_n})}\le\int_1^{\infty}f(2^{2^{u-1}})^{-1}du\le c\int_1^{\infty}\frac{dt}{tf(t)\log t}<\infty.$$

Le lemme de Borel-Cantelli et (4) appliqué à $\tilde{f}(t)=f(t^{1/2})$ entraînent que p.s.,

$$\sup_{0\le s\le t_n}\theta_s\le 2f(\sqrt{t_n})\log(\sqrt{t_n})$$

pour tout n assez grand. Observons que $\sqrt{t_n}=t_{n-1}$ et que remplacer f par un multiple de f ne change pas le résultat du test intégral (3). En conséquence nous avons, p.s.,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sup\{\theta_s,0\le s\le t_n\}}{f(t_{n-1})\log t_{n-1}}\right)=0.$$

Un argument de monotonie montre alors que $\lim_{t\to\infty}(\theta_t/(f(t)\log t)) = 0$ p.s., ce qui achève la première partie de la preuve du théorème 1.

PRÉLIMINAIRES À LA SECONDE PARTIE DE LA DÉMONSTRATION: Pour montrer la seconde partie du théorème 1, nous allons considérer la suite des montées et des descentes de Z entre C_1 et C_2, deux cercles centrés à l'origine de rayons respectifs 1 et 2. Plus précisément, posons $T_0 = 0$ et pour $n \geq 1$,

$$S_n = \inf\{t > T_{n-1},\ |Z_t| = 2\},\ T_n = \inf\{t > S_n,\ |Z_t| = 1\}.$$

Autrement dit, S_n (respectivement T_n) est l'instant en lequel Z accomplit la n-ième montée (respectivement descente). L'idée intuitive de cette démonstration est que, quand l'intégrale dans (3) diverge, alors on peut trouver un entier N arbitrairement grand pour lequel l'accroissement absolu de θ lors de la $(N+1)$-ième montée (c'est à dire $|\theta_{S_{N+1}} - \theta_{T_N}|$) soit supérieur à $Nf(e^N)$. D'autre part, l'instant S_{N+1} en lequel s'achève cette montée est asymptotiquement équivalent au temps passé à effectuer les N descentes précédentes, qui est du même ordre de grandeur que e^N. L'indépendance entre les montées et les descentes et des propriétés de symétries montrent alors que $\theta_{S_{N+1}} > f(S_{N+1})\log S_{N+1}$ avec probabilité uniformément minorée, ce qui nous permettra de conclure en appliquant la loi du 0-1.

Nous rappelons maintenant quelques résultats simples sur les montées et les descentes. Introduisons $d(n) = \sum_{i=1}^{n}(T_i - S_i)$ le temps total passé à effectuer des descentes jusqu'à ce que s'achève la n-ième descente. Alors, p.s.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(n)}{S_{n+1}} = 1. \tag{5}$$

En effet, le temps passé à effectuer des montées jusqu'à ce que s'achève la $(n+1)$-ième montée est $m(n+1) = S_{n+1} - d(n)$. Comme à l'évidence

$$m(n+1) \leq \int_0^{S_{n+1}} 1_{\{|Z_s|\leq 2\}} ds,$$

on déduit du théorème ergodique pour les fonctionnelles additives du mouvement brownien plan (Kallianpur et Robbins [3]) que $m(n+1)/S_{n+1}$ tend p.s. vers 0 lorsque $n \to \infty$. Ceci entraîne (5).

Nous utiliserons également la minoration suivante: il existe une constante $c > 0$ telle que

$$P(d(n) < e^n) \geq c \qquad \text{pour tout } n \text{ assez grand.} \tag{6}$$

En effet, (6) découle immédiatement de (5) et de la convergence en loi de $M_t/\log t$ lorsque $t \to \infty$ vers une variable exponentielle, où M_t désigne ici le nombre de montées effectuées avant le temps t (voir par exemple Burdzy et al. [1]).
Enfin nous rappelons que l'accroissement de θ lors d'une montée suit une loi de Cauchy symétrique de paramètre $\log 2$, c'est-à-dire, pour tout $n \geq 0$,

$$\theta_{S_{n+1}} - \theta_{T_n} \overset{(\mathrm{d})}{=} (\log 2)\ C_1 \tag{7}$$

(voir par exemple Revuz-Yor [7], page 401).

SECONDE PARTIE DE LA PREUVE DU THÉORÈME 1: Supposons que l'intégrale dans (3) diverge. D'après (7) et en utilisant la croissance de f, il existe une constante c' finie telle que

$$\begin{aligned} c' \sum_{n=1}^{\infty} P(|\theta_{S_{n+1}} - \theta_{T_n}| > nf(e^n)) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nf(e^n)} \\ &\geq \int_1^{\infty} \frac{du}{uf(e^u)} \\ &\geq \int_e^{\infty} \frac{dt}{tf(t)\log t} = \infty. \end{aligned}$$

Comme les accroissements de θ lors des montées sont indépendants (c'est une simple conséquence de la propriété de Markov forte et de la décomposition en skew-product de Z), nous déduisons du lemme de Borel-Cantelli que p.s.

$$(8) \qquad |\theta_{S_{n+1}} - \theta_{T_n}| > nf(e^n) \qquad \text{pour une infinité d'entiers } n.$$

Choisissons maintenant un entier k arbitrairement grand et posons

$$N(k) = \inf\{n > k, \ |\theta_{S_{n+1}} - \theta_{T_n}| > nf(e^n)\}.$$

Nous savons grâce à (8) que $N(k)$ est fini p.s. Introduisons les accroissements absolus de temps et d'angles lors des n-ièmes montées et descentes:

$$I^m(n) = (S_n - T_{n-1}, |\theta_{S_n} - \theta_{T_{n-1}}|) \text{ et } I^d(n) = (T_n - S_n, |\theta_{T_n} - \theta_{S_n}|)$$

ainsi que les signes

$$\sigma^m(n) = \operatorname{sgn}(\theta_{S_n} - \theta_{T_{n-1}}) \text{ et } \sigma^d(n) = \operatorname{sgn}(\theta_{T_n} - \theta_{S_n}).$$

On voit grâce à la propriété de Markov forte, à la décomposition en skew-product de Z et par symétrie, que les variables aléatoires précédentes sont toutes indépendantes. De plus, $\sigma^m(n)$ et $\sigma^d(n)$ sont des variables de Bernoulli symétriques. En particulier, comme $I^d(.)$ est indépendant de $N(k)$, on sait d'après (6) que (pourvu que k soit assez grand), $P(d(N(k)) < e^{N(k)}) \geq c$. Donc, grâce à (5), on a $P(S_{N(k)+1} < e^{N(k)+1}) \geq c$. La définition même de $N(k)$ entraîne alors que

$$(9) \qquad P\left(|\theta_{S_{N(k)+1}} - \theta_{T_{N(k)}}| > f(S_{N(k)+1}) \log S_{N(k)+1}\right) \geq c$$

lorsque k est assez grand.

En utilisant l'indépendance de I^m, I^d, σ^m et σ^d et la symétrie de σ^m et de σ^d, nous déduisons de (9) que

$P(\theta_{S_{N(k)+1}} > f(S_{N(k)+1}) \log S_{N(k)+1})$

$$\geq P(|\theta_{S_{N(k)+1}} - \theta_{T_{N(k)}}| > f(S_{N(k)+1}) \log S_{N(k)+1}, \theta_{S_{N(k)+1}} - \theta_{T_{N(k)}} \geq 0, \theta_{T_{N(k)}} \geq 0)$$
$$\geq \frac{c}{4}$$

lorsque k est assez grand. Ceci implique (par exemple grâce au lemme de Fatou) que

$$P(\limsup_{t \to \infty} \frac{\theta_t}{f(t) \log t} > 1) \geq \frac{c}{4}.$$

Il est maintenant facile d'appliquer la loi du 0-1 de Kolmogorov, de sorte que la probabilité précédente vaut nécéssairement 1. Enfin, le résultat du test intégral (3) est inchangé lorsque l'on remplace f par un multiple de f, et donc, p.s.

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{\theta_t}{f(t) \log t} = \infty$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.

2. Quelques résultats complémentaires

2.1 Comportement asymptotique de l'horloge

Nous allons maintenant établir une estimation analogue du comportement asymptotique de l'horloge associée à θ; celle-ci est définie pour tout $t \geq 0$ par

$$H_t = \int_0^t \frac{ds}{|Z_s|^2}.$$

Rappelons que d'après la décomposition en skew-product du mouvement brownien plan:

$$(\theta_t, t \geq 0) = (\beta_{H_t}, t \geq 0) \tag{10}$$

où β est un mouvement brownien linéaire issu de 0 indépendant de $(H_t, t \geq 0)$.

Théorème 3. *Soit f une fonction positive croissante définie sur $\mathbb{R}_+$. Alors, presque sûrement,*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{H_t}{(f(t) \log t)^2} = 0 \text{ ou } \infty \tag{11}$$

suivant que

$$\int^{\infty} \frac{dt}{t f(t) \log t} \text{ converge ou diverge.} \tag{12}$$

Remarquons que ce résultat n'est pas une conséquence directe du théorème 1 et de (10); lorsque A est un processus croissant indépendant de β et g une fonction croissante, $\limsup_{t \to \infty} A_t/(g(t))^2$ et $\limsup_{t \to \infty} \beta_{A_t}/g(t)$ peuvent être très différents (voir par exemple la "loi du logarithme itéré" pour $A_t = (g(t))^2 = t$). On peut également remarquer que le comportement asymptotique de $\log |Z_t|$ n'est pas similaire à celui de θ_t ou de H_t. En effet la loi du logarithme itéré pour le processus $(|Z_t|, t \geq 0)$ (qui est un processus de Bessel de dimension 2) montre que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log|Z_t|}{\log t} = \frac{1}{2} \text{ p.s.}$$

PREUVE: L'idée de cette preuve est similaire à celle du théorème 1; nous ne détaillerons que les points où elles diffèrent.
Si $\tilde{f}$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{t\to\infty} \tilde{f}(t) = \infty$, il est aisé de voir en utilisant (4) et l'égalité en loi

$$\theta_t = \mathcal{N}\sqrt{H_t}$$

(où $\mathcal{N}$ est une variable aléatoire normale centrée réduite) que

$$P(\sqrt{H_t} > \tilde{f}(t)\log t) = O\left(\frac{1}{\tilde{f}(t)}\right).$$

La première partie de la démonstration est alors en tous points identique à celle du théorème 1.

La seconde partie de la preuve repose sur le fait que (on reprend les notations de la section 1)

$$\int_{T_n}^{S_{n+1}} \frac{ds}{|Z_s|^2}$$

s'identifie avec le temps d'atteinte de $\log 2$ par un mouvement brownien linéaire γ issu de 0. D'après le principe de reflexion, il existe alors une constante $c'' > 0$ telle que pour tout $u > 1$,

$$P(\int_{T_n}^{S_{n+1}} \frac{ds}{|Z_s|^2} > u) = 1 - 2P(\gamma_u > \log 2) = P(|\gamma_1| < \frac{\log 2}{\sqrt{u}}) \geq \frac{c''}{\sqrt{u}}$$

Si l'intégrale dans (12) diverge, on a alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\int_{T_n}^{S_{n+1}} \frac{ds}{|Z_s|^2} > n^2 f(e^n)^2) \geq c'' \int_4^{\infty} \frac{dt}{tf(e^t)} = \infty.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli et en utilisant la croissance de H, il existe presque sûrement une suite croissante n_p telle que pour tout p,

$$H_{S_{n_p+1}} > n_p^2 (f(e^{n_p}))^2.$$

On conclut alors comme dans la démonstration du théorème 1 en utilisant (5) et (6).

Notons encore qu'une combinaison du théorème 3 et de l'inversion du temps caractérise le comportement asymptotique de l'horloge $\int_t^1 |Z_s'|^{-2} ds$ quand $t \to 0$

lorsque Z' est un mouvement brownien issu de 0. L'énoncé précis est laissé au lecteur.

2.2 Comportement asymptotique des fonctionnelles additives intégrables

Il est intéressant de comparer le comportement asymptotique de l'horloge H avec celui d'une fonctionnelle additive intégrable A. Dans le cas particulier où $A = L$ est le temps local en 1 du processus de Bessel $|Z|$, Meyre et Werner ont observé dans la preuve de la proposition 2 de [5] que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{L_t}{\log t \log_3 t} = 1 \quad \text{p.s.},$$

où $\log_3 t = \log\log\log t$. On déduit alors du théorème ergodique le résultat général suivant (voir chapitre X de Revuz-Yor [7] pour la définition de la mesure de Revuz ν_A et noter que la masse de la mesure ν_L associée à L en tant que fonctionnelle additive de Z est 2π)

Proposition 4. *Soient $A = (A_t, t \geq 0)$ une fonctionnelle additive intégrable et $\|\nu_A\|$ la masse de sa mesure de Revuz. Alors on a*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{A_t}{\log t \log_3 t} = \frac{\|\nu_A\|}{2\pi} \quad \textit{p.s.}$$

Nous tenons à remercier chaleureusement Marc Yor pour l'attention particulière qu'il a portée à ce travail.

Références bibliographiques

[1] K. Burdzy, J. Pitman et M. Yor, *Some asymptotic laws for crossings and excursions,* colloque Paul Lévy sur les processus stochastiques, Astérisque **157-158**, 59-74 (1988).

[2] B. Fristedt, *Sample functions of stochastic processes with stationary independent increments,* Advances in Probability III, 241-396 (1973).

[3] G. Kallianpur, H. Robbins, *Ergodic property of Brownian motion process,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 525-533 (1953).

[4] J.F. Le Gall, *Some properties of planar Brownian motion*, Cours de l'école d'été de St-Flour 1990, Lect. Notes in Math. 1527, pp. 111-235, Springer, 1992.

[5] T. Meyre, W. Werner, *Estimation asymptotique du rayon du plus grand disque recouvert par la saucisse de Wiener plane*, Stochastics, à paraître.

[6] J. Pitman, M. Yor, *Asymptotic laws of planar Brownian motion,* Ann. Probab. **14,** 733-779 (1986).

[7] D. Revuz, M. Yor, Continuous martingales and Brownian motion, Springer, 1991.

[8] F. Spitzer, *Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motion*, Trans. Amer. Math. Soc. **87**, 187-197 (1958).

[9] Z. Shi, *Liminf behaviour of the windings and Lévy stochastic area of planar Brownian motion*, Séminaire de Probabilités XXVIII (1994).