

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

GLADYS BOBADILLA

ROLANDO REBOLLEDO

EUGENIO SAAVEDRA

**Corrections : « Sur la convergence d'intégrales anticipatives »**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 28 (1994), p. 113-115

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1994\\_\\_28\\_\\_113\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1994__28__113_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CORRECTIONS À:  
"SUR LA CONVERGENCE D'INTÉGRALES ANTICIPATIVES"

GLADYS BOBADILLA, ROLANDO REBOLLEDO ET EUGENIO SAAVEDRA

M. Luca Pratelli a découvert une erreur très sérieuse dans notre note publiée dans le volume XXVI du Séminaire (voir [1] et la note de Pratelli dans ce volume). En effet, si l'on reprend les notations de [1], les conclusions du Théorème 1.1 et des Corollaires 2.1 et 2.2 concernant la convergence *en probabilité* d'une suite d'intégrales stochastiques, sont fausses.

La convergence en probabilité des intégrales de Skorokhod reste un problème ouvert. Ce mode de convergence semble ne pas être adapté à la nature même d'une intégrale anticipative. Cependant il est possible d'étudier ces intégrales avec une topologie différente, la topologie *faible régulière* sur  $L^2(\Omega)$  que nous empruntons à Nualart et Rebollo:

**Définition 1.** Une suite de variables aléatoires  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  de carré intégrable converge vers  $Z \in L^2(\Omega)$  au sens de la topologie faible régulière  $w^{1,2}$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z^n F) = \mathbb{E}(ZF),$$

pour toute variable  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ .

D'après la définition même de l'opérateur intégrale de Skorokhod  $\delta$  donnée dans [3] il en résulte sa continuité comme une application de  $\text{Dom } \delta$ , muni de la topologie faible  $\sigma(L^2(\Omega \times [0, 1]), L^2(\Omega \times [0, 1]))$  dans  $L^2(\Omega)$ , muni de la topologie faible régulière. De sorte que le théorème de convergence "à la Lebesgue" concernant l'intégrale de Skorokhod peut être énoncé comme suit:

**Théorème 1.** Soit  $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\text{Dom } \delta$  telle que

- (a) elle soit uniformément intégrable par rapport à la mesure produit  $d\mathbb{P}dt$  sur  $\Omega \times [0, 1]$ ;
- (b)  $u^n$  converge vers  $u \in \text{Dom } \delta$  en mesure  $d\mathbb{P}dt$  sur  $\Omega \times [0, 1]$ ,

alors  $\delta(u^n)$  converge vers  $\delta(u)$  au sens de la topologie  $w^{1,2}$ . En outre, la convergence a lieu au sens de la topologie faible  $\sigma(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ , dès que les intégrales  $\delta(u^n)$  sont uniformément bornées dans  $L^2(\Omega)$ .

*Preuve.* En effet, il suffit de remarquer que les hypothèses entraînent la convergence faible  $\sigma(L^2(\Omega \times [0, 1]), L^2(\Omega \times [0, 1]))$  de  $u^n$  vers  $u$ , d'où il en résulte la  $w^{1,2}$ -convergence des intégrales.

Par ailleurs, si  $\sup_n \|\delta(u^n)\|_2 < \infty$ , étant donné que l'ensemble des variables aléatoires régulières est dense dans  $L^2(\Omega)$ , la convergence faible  $w^{1,2}$  de la suite  $\delta(u^n)$  équivaut à la convergence au sens  $\sigma(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ .  $\square$

Si l'on considère maintenant une suite  $u^n(t) = F^n = n^{-1} \sin(nW_1)$  comme fait Pratelli, on pourra remarquer que les intégrales  $\delta(u^n)$  vérifient

$$\delta(u^n) = n^{-1}W_1 \sin(nW_1) - \cos(nW_1), \quad (1)$$

$$\text{mais} \quad \mathbb{E}(\delta(u^n)G) = \mathbb{E}\left(\int_0^1 D_s G n^{-1} \sin(nW_1) ds\right) \leq n^{-1} \|G\|_{1,2}, \quad (2)$$

pour toute variable  $G \in \mathbb{D}^{1,2}$ .

Par conséquent, de (1) on déduit que la suite d'intégrales ne converge pas vers 0 en probabilité, tandis que (2) montre sa convergence vers 0 au sens de  $w^{1,2}$ , et même au sens  $\sigma(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$  puisque  $\|\delta(u^n)\|_2$  est uniformément bornée. Il s'agit donc d'un exemple élémentaire qui prouve que la convergence en probabilité est strictement plus forte que la convergence faible dans  $L^2(\Omega)$ .

Malheureusement, il semble que l'on ne puisse espérer mieux de l'intégrale de Skorokhod: la convergence en probabilité est attachée aux semimartingales. A ce sujet, considérons un cas très particulier: celui des processus  $u$ , qui sont prévisibles par rapport à une même filtration plus grosse  $\mathbb{G}$  satisfaisant en outre:

- (a)  $W$  est une semimartingale par rapport à  $\mathbb{G}$ ;
- (b) l'intégrale de Skorokhod de  $u1_{[0,t]}$  existe pour tout  $t \in [0, 1]$  et admet une décomposition

$$\delta(u1_{[0,t]}) = (u \cdot W)_t - \int_0^t D_s^- u(s) ds, \quad (3)$$

où  $u \cdot W$  est l'intégrale stochastique habituelle.

Appellons  $\mathcal{U}(\mathbb{G})$  cette classe des processus qui n'est pas vide: elle contient au moins les processus simples de la forme

$$u = F_0 1_0 + \sum_{i=1}^n F_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}, \quad (4)$$

où chaque  $F_i = f_i(W_{\alpha_i^1}, \dots, W_{\alpha_i^k}) \in \mathbb{D}^{1,2}$ , les fonctions  $f_i$  étant de classe  $C_p^\infty$ . La construction de la filtration  $\mathbb{G}$  pour ce type de processus est faite dans [2].

Si l'on applique alors le théorème de convergence dominée de l'intégrale stochastique habituelle (voir par exemple [4], p.145) on obtient immédiatement le résultat suivant, dont nous omettons la preuve.

### **Théorème 2.**

*Soit  $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{U}(\mathbb{G})$  telle que les couples  $(u^n(s), D_s^- u^n(s))$  soient uniformément bornés et convergent presque sûrement vers  $(u(s), D_s^- u(s))$ , où  $u \in \mathcal{U}(\mathbb{G})$ , alors  $\delta(u^n 1_{[0,t]})$  converge uniformément en probabilité vers  $\delta(u 1_{[0,t]})$ .*

Un cas particulier important du théorème précédent est obtenu lorsque la suite  $(u^n(s), D_s^- u^n(s))$  converge presque sûrement vers  $(1, 0)$ : cela donne la convergence en probabilité de la suite d'intégrales vers le processus de Wiener.

De manière analogue, on pourrait traiter l'intégrale de Stratanovich à partir de l'intégrale de Skorokhod. Cependant, les conditions sous lesquelles on peut relier les deux intégrales sont si fortes qu'elles enlèvent tout intérêt à l'étude de la convergence en probabilité. Dans ce cas il est encore plus évident qu'une telle topologie n'est pas adaptée à la nature de l'intégrale.

## REFERENCES

1. G. Bobadilla, R. Rebolledo et E. Saavedra, *Sur la convergence d'intégrales anticipatives*, Sémin. Prob. XXVI, LN 1526, 1992, 505–513.
2. K. Itô, *Extension of stochastic integral*, Proc. Intern. Symp. SDE, Kyoto, 1976, 95–105.
3. D. Nualart et E. Pardoux, *Stochastic calculus with anticipating integrands*. Prob. Theory and Rel. Fields 78, 1988, 80–129.
4. P. Protter, "Stochastic integration and differential equations: a new approach", Springer, 1990.

FACULTAD DE MATEMÁTICAS, PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE, CASILLA 306, CORREO 22, SANTIAGO