PAUL-ANDRÉ MEYER

Représentation de martingales d'opérateurs, d'après Parthasarathy-Sinha

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 97-105
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__97_0>

REPRÉSENTATION DE MARTINGALES D'OPÉRATEURS

d'après Parthasarathy–Sinha, par P.A. Meyer

Dans les "Eléments de Probabilités Quantiques", parus dans des volumes successifs de ce Séminaire, les théorèmes de représentation des martingales d'opérateurs — dont le principal est celui de Parthasarathy et Sinha [4] — ne sont décrits qu'en passant, sous la forme des remarques [3] du *Séminaire XX*. S. Attal ayant fait usage de leurs résultats dans [1] sous une forme raffinée, cela nous a donné une occasion de relire ces travaux, et je vais en exposer ici une version un peu modernisée et simplifiée, avec une remarque peut être nouvelle.

1. Notations. Nous travaillons pour simplifier sur l'espace de Fock simple Φ, c'est à dire l'espace L^2 du mouvement brownien X_t issu de 0 — mais l'interprétation probabiliste fournit seulement un langage, et les propriétés spécifiques du mouvement brownien ne seront jamais utilisées. On rappelle que l'espérance conditionnelle $M_t = \mathbb{E}_t(M)$ d'un opérateur borné M est un opérateur borné défini de la manière suivante

$$M_t(f_t \cdot g_{[t}) = (E_t M f_t) \cdot g_{[t} \tag{1.1}$$

si f_t est une v.a. $\mathcal{F}_t$-mesurable, tandis que $g_{[t}$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par les accroissements du brownien après t ; E_t est la projection sur $\Phi_t = L^2(\mathcal{F}_t)$ (l'espérance conditionnelle ordinaire $\mathbb{E}[\,\cdot\,|\,\mathcal{F}_t]$). On montre sans peine que M_t se prolonge en un opérateur borné de nòrme $\leq \|M\|$. La définition des espérances conditionnelles permet de définir les martingales d'opérateurs bornés, et le problème est de savoir si une telle martingale est représentable comme une intégrale stochastique

$$M_t = cI + \int_0^t (\, H_s^+ \, da_s^+ + H_s^\circ \, da_s^\circ + H_s^- \, da_s^- \,) \,. \tag{1.2}$$

De manière précise, on demande que les trois processus (H_s^ε) soient adaptés, mesurables (pour la topologie forte des opérateurs) et formés d'opérateurs bornés, et que les fonctions $\|H_s^\varepsilon\|^2$ $(\varepsilon = -, \circ, +)$ soient localement intégrables. Rappelons tout de suite que la réponse est négative en général, comme le montre un contre-exemple de J.L. Journé (*Sém. Prob. XX*, p.313). Le but de l'article de P–S est de donner des conditions (nécessaires et suffisantes) pour l'existence d'une telle représentation. Nous supposerons pour simplifier que $M_0 = 0$, et oublierons la constante c de (1.2).

Première remarque : supposons que (M_t) soit représentable avec des opérateurs H^ε bornés, et soit (f_t) une martingale ordinaire de carré intégrable, admettant une représentation prévisible

$$f_t = c + \int_0^t \dot{f}_s \, dX_s \quad ; \tag{1.3}$$

alors nous avons

$$(1.4)\qquad M_t f_t = \int_0^t M_s \dot{f}_s dX_s + \int_0^t H_s^+ f_s dX_s + H_s^\circ \dot{f}_s dX_s + H_s^- \dot{f}_s ds \ .$$

Lorsque f_t est une martingale exponentielle $\mathcal{E}_t(u)$, on a $\dot{f}_t = u(t) f_t$ et ceci équivaut à la définition de l'intégrale stochastique donnée par Hudson–Parthasarathy. L'extension à toutes les martingales de carré intégrable, suggérée dans Meyer [3], a été traitée rigoureusement par Attal; nous renverrons pour cela à l'exposé [2] dans ce volume.

2. Martingales régulières. Le fait que le processus (M_t) soit une martingale s'énonce ainsi : pour tout r, toute v.a. $f \in \Phi_r$, le processus $M_t f$ est une martingale ordinaire sur $[r, \infty[$. Celle-ci admet une représentation en intégrale stochastique, pour $t \in [r, \infty[$

$$(2.1)\qquad (M_t - M_r) f = \int_r^t h_u \, dX_u \ ,$$

et un coup d'œil à (1.4) avec $f_s = \mathbb{E}[f \,|\, \mathcal{F}_s]$ montre, comme $\dot{f}_t = 0$ pour $t > r$, que h_u s'identifie à $H_u^+ f$ pour $u > r$. On a donc pour $r < s < t$

$$\mathbb{E}[(M_t f - M_s f)^2] = \int_s^t \| H_u f \|^2 du \leq \| f \|^2 \int_s^t \| H_u \|^2 du \ .$$

D'où une première propriété imposée aux *martingales régulières* d'opérateurs

$$(2.2)\qquad \mathbb{E}[(M_t f - M_s f)^2] \leq \| f \|^2 (m(t) - m(s)) \ .$$

pour $r < s < t$, $f \in \Phi_r$, $m(t)$ étant une certaine fonction croissante et nulle en 0, absolument continue.

La remarque suivante jouera son rôle à la fin de l'exposé : supposons que l'on ait une relation (2.2) avec une fonction croissante m, non nécessairement absolument continue. La représentation prévisible (2.1) nous indique a priori que la fonction croissante $\mu(t) = \mathbb{E}[(M_t f - M_r f)^2]$ sur $[r, \infty]$ est absolument continue, et la relation $\mu(t) - \mu(s) \leq \| f \|^2 (m(t) - m(s))$ et la décomposition de Lebesgue entraînent la même relation relativement à la partie absolument continue de m. La continuité absolue n'est donc pas une restriction.

La régularité va nous permettre ci–dessous de construire le processus H_t^+ ; Parthasarathy et Sinha procèdent pour H_t^- par passage à l'adjoint. On est donc amené à inclure dans la définition des "martingales régulières" l'hypothèse analogue à (2.2)

$$(2.3)\qquad \mathbb{E}[(M_t^* f - M_s^* f)^2] \leq \| f \|^2 (m(t) - m(s)) \ .$$

Cela peut sembler artificiel ici, car on a sur (1.4) une définition directe du processus $H_t^- \dot{f}_t$ comme dérive (densité du processus à variation finie) de la semimartingale $M_t f_t$: on est donc tenté de remplacer (2.3) par une hypothèse disant que $M_t f_t$ est une semimartingale, admettant un partie à variation finie absolument continue, etc. Il vaut peut être la peine de prendre un instant pour remarquer que cela *équivaut* à (2.3).

La définition de $H_t^{-*} g_s$ par passage à l'adjoint est

$$(M_t^* - M_s^*) g_s = \int_s^t H_u^{-*} g_s \, dX_u \ .$$

Donc si l'on fait le produit scalaire avec $f_t = \int_0^t \dot{f}_u \, dX_u$,

$$< f_t \, , (M_t^* - M_s^*) g_s > = \int_s^t < \dot{f}_u, \, H_u^{-*} g_s > \, du \ ,$$

ce qui nous donne en passant à l'adjoint, et en notant que comme (f_t) est une martingale, on a $< f_t \, , M_s^* g_s > = < f_s, \, M_s^* g_s >$

$$< M_t f_t - M_s f_s \, , g_s > = \int_s^t < H_u^- \dot{f}_u \, , g_s > \, du \ ,$$

et cela signifie bien que la dérive de $M_t f_t$ est $H_t^- \dot{f}_t$.

Si l'on traduit la condition (2.3), soit

$$\| (M_t^* - M_s^*) g_s \|^2 \leq \| g_s \|^2 (m(t) - m(s)) \ ,$$

en faisant le produit scalaire avec $f_t \in \Phi_t$, et que l'on fait passer l'opérateur du côté gauche du produit scalaire, on obtient

$$\| \mathbb{E} [M_t f_t - M_s f_s \, | \, \mathcal{F}_s] \|^2 \leq \| f_t \|^2 (m(t) - m(s)) \ .$$

Si l'on remplace f_t par $f_t - f_s$, le côté gauche ne change pas, et au second membre f_t devient $f_t - f_s$, soit

$$(2.4) \qquad \| \mathbb{E} [M_t f_t - M_s f_s \, | \, \mathcal{F}_s] \|^2 \leq \| f_t - f_s \|^2 (m(t) - m(s)) \ .$$

La variation stochastique en norme L^2 (plus grande que la variation en norme L^1 que l'on utilise en général)

$$\textstyle\sum_i \| \mathbb{E} [M_{t_{i+1}} f_{t_{i+1}} - M_{t_i} f_{t_i} \, | \, \mathcal{F}_{t_i}] \|_2$$

se majore donc par

$$\textstyle\sum_i (m(t_{i+1}) - m(t_i))^{1/2} \mathbb{E} [(f_{t_{i+1}} - f_{t_i})^2]^{1/2} \ .$$

Appliquant l'inégalité de Schwarz, on voit que la variation stochastique hilbertienne est bornée sur $[s, t]$ par

$$\| f_t - f_s \| (m(t) - m(s))^{1/2} \ .$$

On a ici un bel exemple des quasi-martingales hilbertiennes, étudiées par Enchev (voir le *Sém. Prob. XXII*, p. 86–88).

Les deux hypothèses que nous avons faites, (2.2) et (2.3) ou (2.4), ont été introduites pour permettre le calcul des processus $H^{\pm}$. Le trait le plus remarquable du théorème de P–S est *l'absence de toute autre condition relative à l'opérateur de nombre.*

3. Extraction de H^+. Nous rappelons d'abord le théorème de relèvement sous la forme due à Mokobodzki (*Sém. Prob. IX*, p. 437) : il existe un relèvement linéaire ρ de $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_+)$ (des classes de fonctions dans les fonctions boréliennes), positif, isométrique, tel que $\rho(1) = 1$, *préservant les opérations* $\vee, \wedge$ *et donc aussi les indicatrices d'ensembles et la multiplication, et égal à l'application identique sur l'espace des fonctions continues sur* $[0, \infty]$.

Conséquence : si $f = g$ p.p. sur $]a, b[$ et $\varphi \in C$ a son support dans $]a, b[$ on a $\varphi.f = \varphi.g$ p.p. donc $\rho(\varphi.f) = \rho(\varphi.g)$ partout, et finalement $\rho(f) = \rho(g)$ dans $]a, b[$: le relèvement est *local.*

Nous aurons besoin de la petite extension consistant à remplacer $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ par $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ où $\mathcal{H}$ est un Hilbert (réel) séparable : si $h(t)$ est une classe à valeurs dans $\mathcal{H}$, de norme essentielle $\leq m$, $< h(t), z >$ est une classe réelle bornée par $m \| z \|$, et son relèvement définit pour tout point t une forme linéaire en z de norme $\leq m$. La mesurabilité scalaire entraînant la mesurabilité puisque l'espace est séparable, on a réalisé un relèvement vectoriel ρ qui lui aussi est local : les égalités p.p. sur $]a, b[$ sont transformées en égalités sur le même intervalle. Noter aussi que si h est une fonction vectorielle, φ une fonction scalaire continue sur $\overline{\mathbb{R}}$, on a $\rho(\varphi h) = \varphi \rho(h)$.

Nous désignerons par m' la dérivée de m là où celle-ci existe, et 0 là où elle n'existe pas.

Nous nous plaçons sous l'hypothèse (2.2). Etant donnée $f \in \Phi_r$, nous définissons un processus adapté $h_u(f)$ sur $]r, \infty[$ tel que pour $r < s < t$

$$M_t f - M_s f = \int_s^t h_u(f)\, dX_u \, .$$

L'hypothèse de régularité nous dit que la fonction $h_.(f)/m'$ (définie presque partout) appartient à $L^\infty(]r, \infty[, \Phi)$, avec une norme $\leq \| f \|$. Nous la prolongeons par 0 sur $]0, r[$ et appliquons ρ. La valeur sur $]t, \infty[$ du relèvement ne dépend que de la restriction de $h_u(f)$ à $]t, \infty[$, donc si par hasard f se trouve appartenir à un $\Phi_{r'}$ avec $r' < r$, cela ne change pas la valeur du relèvement. En multipliant par m', nous obtenons un opérateur linéaire borné H_{rt} de Φ_r dans Φ_t, nul si $m'(t)$ n'existe pas, dépendant de t de façon borélienne (scalairement), et tel que

$$\text{pour tout } r < t,\ f \in \Phi_r,\ H_{rt} f = h_t(f) \text{ p.s.} \quad .$$

De plus, $H_{rt} f$ ne dépend pas de r pour $f \in \cup_{r<t} \Phi_r$, donc on a un prolongement par continuité à $\Phi_{t-} = \Phi_t$, en un opérateur H_t. Pour $f \subset \Phi_r$ $H_t f$ est fortement borélienne, et quitte à le remplacer par $E_t H_t f$ on obtient les mêmes propriétés plus l'adaptation.

Pour l'extraction de H^-, on procède, soit par passage à l'adjoint, soit directement de manière analogue à ce qu'on vient de faire, à partir de la définition de H^- comme dérive.

4. L'opérateur de nombre. Ayant fait ces deux constructions, nous conservons la notation

$$f_t = c + \int_0^t \dot{f}_s \, dX_s \qquad (4.1)$$

qui définit à chaque instant t une isométrie entre l'espace de Hilbert Φ_t et l'espace de Hilbert $\mathbb{C} \oplus L^2_a([0,t] \times \Omega)$ (L^2_a indique que nous nous restreignons aux processus adaptés), et nous définissons pour tout t un opérateur N_t sur Φ_t

$$(4.2) \qquad N_t f_t = M_t f_t - \int_0^t M_u \dot{f}_u \, dX_u - \int_0^t H_u^+ f_u \, dX_u - \int_0^t H_u^- \dot{f}_u \, du \,.$$

Les conditions obtenues au paragraphe précédent ont trois conséquences :

1) Pour tout t, N_t est un opérateur borné sur Φ_t ;

2) pour $s < t$ on a $(N_t - N_s) f_s = 0$

3) $N_\bullet$ transforme les martingales en martingales, ou encore $E_s N_t f_t = N_s f_s = N_t f_s$, ou enfin $E_s N_t = N_t E_s$ pour $s \leq t$.

Ecrivons alors, avec une autre notation

$$N_t(c + \int_0^t \dot{f}_s dX_s) = c' + \int_0^t \dot{f}'_s dX_s$$

Appliquant E_0 nous voyons que $c' = cN1$, $N1$ étant une constante. Ensuite, nous considérons l'application entre processus $\dot{f} \longmapsto \dot{f}'$; pour tout T c'est une application bornée de $L^2_a([0,T], \Phi_T)$ dans lui même — l'espace des processus adaptés de carré intégrable sur $[0,T]$ — qui possède la propriété de commuter avec la multiplication par $I_{[0,s]}$, ($s < T$). Il en résulte sans peine qu'elle commute avec la multiplication par une fonction borélienne bornée arbitraire sur $[0,T]$. Par composition avec la projection prévisible, elle peut être prolongée en une application de $L^2([0,T], \Phi)$ dans lui même, commutant avec la multiplication par les fonctions déterministes bornées.

Maintenant, on rappelle le résultat suivant : tout opérateur sur $L^2([0,T])$, de norme k, qui commute avec la multiplication par les fonctions bornées $a(t)$, est lui-même un opérateur de multiplication par un élément de $L^\infty([0,T])$ de norme k. En combinant ce résultat avec le théorème de relèvement des paragraphes précédents, on l'étend de la manière suivante : tout opérateur sur $L^2([0,T], \Phi_T)$ qui commute avec la multiplication, de norme k, est de la forme $(h_t) \longmapsto (K_t h_t)$, où (K_t) est une famille fortement mesurable d'opérateurs sur Φ_T de norme $\leq k$. Dans le cas présent, on peut remplacer K_t par $\mathbb{E}_t(K_t)$ sans rien changer, et donc supposer la famille adaptée. De plus, K_t ne dépend pas du choix de l'intervalle $[0,T]$ contenant t sur lequel on travaille (c'est le caractère local du relèvement). On a alors la formule, en reprenant les notations du début

$$(4.3) \qquad M_t f_t = \int_0^t (M_s + K_s) \dot{f}_s \, dX_s + \int_0^t H_s^+ f_s \, dX_s + \int_0^t H_s^- \dot{f}_s \, ds \,.$$

Mais alors on prend K_t comme coefficient de l'opérateur de nombre, et en se restreignant aux vecteurs exponentiels on a établi le théorème de Parthasarathy–Sinha.

Il faut en noter une conséquence, qui semble avoir échappé à P–S : *si une martingale d'opérateurs bornés est représentable, le coefficient de l'opérateur de nombre est une famille d'opérateurs bornés dont la norme est, non seulement localement dans* L^2, *mais localement dans* L^∞. Cela est important pour les applications que donne Attal (la formule d'Ito pour semimartingales bornées représentables).

REMARQUE. Que donne le théorème de P–S lorsqu'on l'applique à une martingale bornée réelle (M_t) ordinaire, considérée comme martingale d'opérateurs de multiplication sur l'espace de Wiener ou de Poisson ? Une telle martingale admet une représentation

$$M_t = c + \int_0^t \mu_s dX_s \ ,$$

et la condition de régularité est que $\mathbb{E}\,[(M_t - M_s)^2 f_s^2] \ \leq \ \| f_s \|^2 (m(t) - m(s))$, ou encore

$$\mathbb{E}\,[(M_t - M_s)^2 \,|\, \mathcal{F}_s] \ = \mathbb{E}\,[\int_s^t \mu_r^2 \, dr \,|\, \mathcal{F}_s] \ \leq m(t) - m(s) \quad p.s. \tag{4.4}$$

La relation $\mathbb{E}\,[\,(M_t f_t - M_s f_s) \,|\, \mathcal{F}_s] \ = \ \mathbb{E}\,[\int_0^t H_u^- \dot{f}_u \, du \,|\, \mathcal{F}_s]$ montre que $H_u^- \dot{f}_u = \mu_u \dot{f}_u$, et le fait que cet opérateur soit borné avec une norme L^2 localement intégrable signifie que μ_u appartient à L^∞ avec une norme localement intégrable, condition qui inversement entraîne (4.4). Elle n'a aucune raison d'être satisfaite pour toutes les martingales bornées, mais il n'est pas évident de trouver un contre–exemple : Yor m'a indiqué celui de la martingale continue

$$M_t = L_t X_t = \int_0^t L_s dX_s \ ,$$

où X est le mouvement brownien et L son temps local en 0 ; si on rend cette martingale bornée en l'arrêtant au premier instant T où $|M_t|$ dépasse C, les v.a. L_t ne sont pas bornées sur $\{t \leq T\}$. En effet, une telle propriété signifierait qu'il existe un t et deux constantes M, c telles que

$$(\,|L_s X_s| \leq M \ \text{pour} \ s \leq t) \Longrightarrow (L_t \leq c) \quad .$$

Choisissant $a > c$ et b assez petit pour que $ab < M$, on aurait

$$(L_t \leq a \ \text{ et } \ X_t^* \leq b) \Longrightarrow (L_t \leq c) \quad ,$$

de sorte que la loi du couple (L_t, X_t^*) ne chargerait pas $]\,c, a\,] \times [\,0, b\,]$, ce qui est faux. Cet exemple de martingale d'opérateurs bornés non représentable est plus probabiliste que celui de Journé !

L'opérateur H_u^- est l'opérateur de multiplication par μ_u, l'opérateur H_u^+ est le même par passage à l'adjoint. Quant à l'opérateur H_u°, il permet de donner la représentation prévisible de la martingale

$$M_t f_t - M_0 f_0 - \int_0^t \mu_u \dot{f}_u \, du - \int_0^t (M_u \dot{f}_u + \mu_u f_u) \, dX_u$$

et le terme du milieu est le crochet oblique $< M, f >_t$, tandis que le terme de droite s'écrit $\int_0^t (M_u df_u + f_u dM_u)$. La formule d'Ito commutative donne alors

$$\int_0^t H_u^\circ \dot{f}_u \, dX_u = [M, f\,]_t - < M, f >_t \ , \tag{4.5}$$

dans toute interprétation probabiliste de l'espace de Fock. En particulier, dans une interprétation de Poisson pour laquelle l'opérateur de multiplication par X_t s'écrit $a_t^+ + a_t^- + ca_t^\circ$, l'opérateur de multiplication par $M_t = \int_0^t \mu_s dX_s$ s'écrit

$$M_t = \int_0^t (\mu_s da_s^+ + \mu_s da_s^- + c\mu_s da_s^\circ)$$

les μ_s étant des opérateurs de multiplication. C'est agréable ! On peut noter aussi que la formule (4.5) suggère de définir le crochet oblique d'une martingale représentable d'opérateurs (M_t) et d'une martingale de vecteurs f_t par la formule

$$< M, f >_t = \int_0^t H_u^- \dot{f}_u \, du$$

(processus à variation finie hilbertien), et le crochet droit $[M, f]$ par la formule

$$[M, f]_t = < M, f >_t + \int_0^t H_u^\circ \dot{f}_u dX_u ,$$

processus hilbertien dont j'ignore s'il est à variation finie.

5. Martingales de Hilbert–Schmidt. Parthasarathy et Sinha étudient divers cas particuliers de leur théorème de représentation, en montrant par exemple que les martingales d'opérateurs unitaires, ou les martingales de Hilbert–Schmidt sont toujours régulières, et admettent une représentation de type spécial. Voir aussi l'article antérieur de Hudson–Lindsay–Parthasarathy [5]. Nous allons détailler le cas des martingales de Hilbert–Schmidt, essentiel pour l'article [1].

Nous désignerons par $[\![\cdot]\!]$ la norme de Hilbert–Schmidt des opérateurs sur Φ. Nous noterons $[\![\cdot]\!]_t$, et nous appellerons la *norme de H-S à l'instant t* (par abus de langage : ce n'est pas une vraie norme séparée !), la semi-norme définie pour tout opérateur borné B comme

$$[\![B]\!]_t^2 = \sum\nolimits_n \| Be_n \|^2 \quad \text{où } (e_n) \text{ est une base orthonormale de } \Phi_t .$$

Un opérateur borné B adapté à l'instant t est de la forme $A \otimes I_{[t}$, où A est un opérateur sur Φ_t ; B ne peut donc jamais être de Hilbert–Schmidt sur Φ, mais on a $[\![B]\!]_t = [\![A]\!]$, et si cette norme est finie nous dirons que B est *de Hilbert-Schmidt à l'instant t*. On dira qu'une martingale (M_t) est de Hilbert–Schmidt si M_t est de H–S à l'instant t pour tout t.

Il est clair que si M est un opérateur de H–S, son espérance conditionnelle $M_t = \mathbb{E}_t(M)$ est de H–S à l'instant t, avec $[\![M_t]\!]_t \leq [\![M]\!]$.

Soit $m(t) = [\![M_t]\!]^2$. Nous avons pour $e_s^n \in \Phi_s$ formant une base orthonormale, et $s < t$

$$\sum\nolimits_n \int_s^t \| H_u^+ e_s^n \|^2 du = \sum\nolimits_n \| (M_t - M_s) e_s^n \|^2 \leq m(t) - m(s) .$$

Pour établir cela, nous utilisons une base de Φ_t formée des e_s^n et de vecteurs e'_n orthogonaux à Φ_s. Alors on a

$$m(t) = \sum\nolimits_n (\| M_s e_n \|^2 + \| (M_t - M_s) e_n \|^2 + \| M_t e'_n \|^2)$$

et $m(s)$ correspond au premier terme seul. Fixant a et prenant $a < s < t$, nous avons presque partout $\| H_u^+ \|_a^2 \leq m'(u)$, et ensuite en faisant croître a vers u on obtient qu'en fait $\| H_u^+ \|_u^2 \leq m'(u)$ p.p.. Donc les coefficients de création (et d'annihilation par passage à l'adjoint) dans la représentation intégrale sont eux mêmes de Hilbert–Schmidt.

Il reste à établir le même résultat pour le coefficient de l'opérateur de nombre. Pour cela, P–S ont une très jolie astuce. Introduisons la martingale d'opérateurs de multiplication de Wiener $U_t = e^{iX_t + t/2}$, qui est solution de l'équation $dU = i(da^+ + da^-)\,U$; $U_t e^{-t/2}$ est unitaire. Puis développons par la formule d'Ito le processus des opérateurs $M_t U_t$, qui sont des opérateurs de Hilbert–Schmidt à l'instant t. Le coefficient de dt est formé d'opérateurs de H–S provenant de H^-, et en le retirant on obtient une martingale de H–S (Y_t). Le coefficient de da_t^+ est donc formé d'opérateurs de H–S d'après ce qui précède. Or ce coefficient vaut $U_t H_t^+ + iX_t U_t + iH_t^\circ U_t$, ce dernier facteur provenant du crochet $da_t^\circ da_t^+$. On sait que les deux premiers termes sont de Hilbert–Schmidt, donc le troisième l'est, et comme U_t est inversible il en est de même de H_t°.

Maintenant, il reste le résultat le plus remarquable : dans la représentation d'une martingale de Hilbert–Schmidt

$$dM_t = H_t^+ da_t^+ + H_t^\circ da_t^\circ + H_t^- da_t^-$$

le terme H° *est égal à* $-M$. Pour cela, nous récrivons H° sous la forme $K - M$, après quoi nous pouvons écrire

$$M_t F_t = \int_0^t H_t^+ F_t \, dX_t + \int_0^t H_t^- \dot{F}_t \, dt + \int_0^t K_t \dot{F}_t \, dX_t \tag{5.1}$$

et nous devons montrer que le processus K — formé, nous venons de le voir, d'opérateurs H–S — est en fait nul.

Voici une démonstration assez différente de celle de P–S. Nous nous plaçons sur l'intervalle $[0,1]$ pour fixer les idées, et nous utilisons des subdivisions dyadiques à $N = 2^p$ points intermédiaires t_i. Soit A une partie $\{i_1, \ldots i_k\}$ de l'ensemble $\{0, N\}$, et soit e_A le vecteur

$$N^{k/2}(X_{t_{i_1+1}} - X_{t_{i_1}}) \ldots (X_{t_{i_k+1}} - X_{t_{i_k}}) \tag{5.2}$$

Ce sont (à la normalisation près) les intégrales stochastiques multiples d'ordre k, relatives à un rectangle dont les côtés appartiennent à la subdivision; on sait donc qu'elles vont remplir Φ_1 lorsque les subdivisions deviendront de plus en plus fines. Alors les divers vecteurs $F_1^A = e_A$ sont orthonormés, et possèdent la propriété que les vecteurs $F_s^A = \mathbb{E}[e_A \,|\, \mathcal{F}_s]$ sont nuls si $t_{i_k} \geq s$, égaux à F_1^A et donc orthonormés si $t_{i_{k+1}} \leq s$, et si $t_{i_k} < s < t_{i_{k+1}}$ on a

$$F_s^A = \sqrt{N} e_{A-}(X_s - X_{t_{i_k}}) \tag{5.3}$$

où $A-$ désigne la partie A privée de son dernier élément. Les F_s^A de ce dernier type sont orthogonaux à ceux du type précédent, sont orthogonaux entre eux, et leur carré scalaire vaut $N(s - t_{i_k})$, qui reste borné par 1. Il nous reste enfin à regarder $\dot{F}_s^A$: il n'est différent de 0 que sur le dernier intervalle $t_{i_k} < s < t_{i_{k+1}}$, où il vaut $\sqrt{N} e_{A-}$.

Nous regardons alors les quatre termes de (5.1). Nous avons d'abord

$$\sum_A \| M_1 F_1^A \|^2 \leq [\![M_1]\!]_1$$

Ensuite, nous avons

$$\sum_A \| \int_0^1 H_s^+ F_s^A \, dX_s \|^2 = \sum_A \int_0^1 \| H_s^+ F_s^A \|^2 \, ds \leq \int_0^1 [\![H_s^+]\!]^2 \, ds$$

Le troisième terme est

$$\sum_A \| \int_0^1 H_s^- \dot{F}_s^A \, ds \|^2 = \sum_A N \| \int_{t_{i_k}}^{t_{i_{k+1}}} H_s^- e_{A-} \, ds \|^2 .$$

Pour chaque intervalle (t_j, t_{j+1}) de la subdivision dyadique, cela se récrit comme une somme sur les $B = A_-$ antérieurs à cet intervalle. Lorsqu'on applique l'inégalité de Schwarz sur l'intervalle, le coefficient N en tête disparaît, et il reste un majorant

$$\sum_j \sum_B \int_{t_j}^{t_{j+1}} \| H_s^- e_B \|^2 \, ds \leq \int_0^1 [\![H_s^-]\!]_s^2 \, ds .$$

La somme relative au dernier terme reste donc bornée aussi. Or elle vaut

$$\sum_A \| \int_0^1 K_s \dot{F}_s^A \, dX_s \|^2 = \sum_A \int_0^1 \| K_s \dot{F}_s^A \|^2 \, ds = \sum_A N \int_{t_{i_k}}^{t_{i_{k+1}}} \| K_s e_{A-} \|^2 \, ds$$

A nouveau nous regroupons cela suivant l'intervalle (t_j, t_{j+1}) de la subdivision dyadique, comme le produit par N de la somme

$$\sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} \sum_B \| K_s e_B \|^2 \, ds$$

Pour s fixe, les vecteurs orthonormés e_B avec B antérieur à s vont peu à peu remplir Φ_r pour tout $r < s$, et la somme va rester majorée par $[\![K_s]\!]_s^2$. Par convergence dominée, la somme va tendre vers $\int_0^1 [\![K_s]\!]_s^2 ds$, et en raison du facteur N, elle ne peut rester bornée que si cette intégrale est nulle, c'est à dire, si $K = 0$.

RÉFÉRENCES.

[1] ATTAL (S.). Représentation des opérateurs de Hilbert–Schmidt par un noyau de Maassen. A paraître

[2] ATTAL (S.) et MEYER (P.A.). Interprétation probabiliste et extension des intégrales stochastiques non commutatives. Ce volume.

[3] MEYER (P.A.). Quelques remarques au sujet du calcul stochastique sur l'espace de Fock. *Sém. Prob. XX*, p. 321–330.

[4] PARTHASARATHY (K.R.) et SINHA (K.B.). Stochastic integral representation of bounded quantum martingales in Fock space, *J. Funct. Anal.*, **67**, 1986, p.126–151.

[5] HUDSON (R.L.), LINDSAY (J.M.) et PARTHASARATHY (K.R.). Stochastic integral representation of some quantum martingales in Fock space, *From local times to global geometry, control and physics*, edited by K.D. Elworthy, Pitman research notes, 1986.