YAO-ZHONG HU

Hypercontractivité pour les fermions, d'après Carlen-Lieb

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 86-96

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__86_0>

Hypercontractivité pour les fermions, d'après Carlen–Lieb

par Yaozhong HU[1]

0. Introduction. Nous présentons la démonstration de la conjecture de Gross sur l'hypercontractivité fermionique, donnée récemment par E. Carlen et E. Lieb. Nous commençons par expliquer les notations et poser le problème.

Algèbre de Clifford. Nous considérons l'espace de Hilbert complexe $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, où $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est l'espace de Bernoulli à ν points. Cet espace admet une base orthonormale x_A indexée par les parties A de $\{1, \cdots, \nu\}$, où $x_\emptyset = 1$ (aussi appelé le vecteur vide et noté $\mathbf{1}$), où x_i est la i-ième v.a. de Bernoulli, et x_A est le produit des v.a. x_i pour $i \in A$. L'intégrale d'une v.a. $X = \sum_A c_A x_A$ est $\mathbb{E}(X) = c_\emptyset$. On a une involution naturelle sur $\mathcal{H}$ pour laquelle les x_A sont des éléments réels. La multiplication ordinaire de deux v.a. correspond à la table

$$x_A x_B = x_{A \Delta B} \ .$$

On peut munir $\mathcal{H}$ d'une autre multiplication associative, *le produit de Clifford*, pour laquelle

$$x_A x_B = (-1)^{n(A,B)} x_{A \Delta B} \ ,$$

$n(A, B)$ étant le nombre d'inversions lorsqu'on écrit à la suite les parties A puis B. Cette multiplication possède la propriété

$$x_i x_j + x_j x_i = 2\delta_{ij} \ ,$$

et plus généralement, si f et g sont deux éléments du premier chaos

$$fg + gf = 2(f, g)\,\mathbf{1} \ ,$$

où (f, g) est le produit scalaire (bilinéaire) usuel.

On note Δ_ν ou simplement Δ l'espace $\mathcal{H}$ muni de cette multiplication (c'est l'algèbre de Clifford standard de dimension 2^ν), et on considère Δ comme une sous–*–algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ en identifiant un élément de Δ à l'opérateur de multiplication à gauche correspondant. Comme $X\mathbf{1} = X$ on a une représentation fidèle de l'algèbre. On voit en particulier que Δ admet une norme de C^*–algèbre. Sur Δ l'involution naturelle de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ se lit $x_A^* = (-1)^{n(A,A)} x_A$. Puisque $\mathcal{H}$ est un espace de dimension finie, on peut considérer les éléments de Δ comme des matrices.

Considérons ensuite l'intégrale. La matrice de l'opérateur de multiplication à gauche par x_B est facile à calculer, et en particulier sa diagonale est $< x_A, x_B x_A >= 0$ quand

[1] Mathematics Department, University of Oslo, POB 1053, Blindern, N-0316 Oslo, et Institute of Mathematical Sciences, Academia Sinica, Wuhan 430071, Hubei, R.P. de Chine.

$B \neq \emptyset$ et $= 1$ quand $B = \emptyset$, c'est à dire $\mathrm{Tr}(x_B) = 2^\nu \mathbb{E}(x_B)$. Par linéarité cela s'étend à tous les éléments de Δ. En particulier on a toujours

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(YX) .$$

Enfin, si $X = \sum_A c_A x_A$, on a

$$X^*X = \sum_{A,B} \bar{c}_A c_B (-1)^{n(A,B)} x_{A\Delta B} ,$$

et donc $\mathbb{E}(X^*X) = \sum_A |c_A|^2$. Plus généralement on a $\langle Y, X \rangle = \mathbb{E}(Y^*X)$. On voit que l'espérance définit un état fidèle, et que l'espace $L^2(\Delta)$ (voir ci-dessous) est isomorphe à $\mathcal{H}$.

Le problème. Nous pouvons définir la norme L^p sur l'algèbre Δ par la formule

$$\|X\|_p = \mathbb{E}(\,|X|^p\,)^{1/p} \qquad \text{en posant } |X| = (X^*X)^{1/2} .$$

Il n'est pas évident que cela soit une norme! consulter Dixmier [3], Segal [12], Yeadon [14]. A la limite $p = \infty$ c'est la norme usuelle d'opérateurs, et on a comme dans le cas commutatif l'inégalité de Hölder, et le dual de L^p est exactement L^q (q sera l'exposant conjugué de p). On a toujours $\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_\infty$. On définit, pour $\alpha > 0$, la deuxième quantification de l'opérateur αI par la formule

$$\Gamma(\alpha)\, x_A = \alpha^{|A|} x_A \quad ,$$

où $|A|$ est le nombre d'éléments de A, et on se propose de montrer le:

Théorème principal. *Pour* $1 < p < p'$ *et* $\alpha^2 \leq (p-1)/(p'-1)$ *on a*

$$\|\Gamma(\alpha)X\|_{p'} \leq \|X\|_p \; . \tag{1}$$

Ce résultat vient d'être démontré par Carlen et Lieb [2]. Il figurait comme conjecture dans un article de Gross [5] où est établi un résultat plus faible: le théorème est vrai quand $\alpha^2 \leq ((p-1)/(p'-1))^{\log 3}$. Pour cela, Gross avait besoin d'un résultat plus ancien [4], où ce théorème est établi pour $p = 2$ et $p' = 4$. Wilde [13] a prouvé un résultat plus faible que la conjecture pour $\alpha^2 \leq ((p-1)/(p'-1))^{\log 2(1+\sqrt{5})}$. Lindsay [7] a prouvé la conjecture de Gross pour les cas $p = 2$, $p' = 2^m$, et Lindsay–Meyer [8] pour les cas $p = 2$, $p' = 2m$. Nous allons présenter ici le travail de Carlen et Lieb en rassemblant tous les éléments nécessaires pour la démonstration, et en simplifiant certains lemmes.

Je suis reconnaissant à P.A. Meyer qui a soigneusement relu cette note et m'a signalé quelques erreurs dans la première rédaction. Je remercie également E. Carlen pour des discussions qui m'ont aidé à comprendre l'article.

Principe de la démonstration. Il faut savoir que Gross a donné une équivalence entre l'inégalité d'hypercontractivité (1) pour X autoadjoint et *l'inégalité de Sobolev logarithmique*

$$\mathbb{E}(X^p \log|X|) - \|X\|_p^p \log\|X\|_p \leq \frac{p/2}{p-1} < X, NX^{p-1} > \tag{2}$$

et $-N$ est le générateur du *semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck*, $P_t = e^{-tN} = \Gamma(e^{-t})$. Alors on a les étapes suivantes :

— On se ramène d'abord à vérifier (1) pour un opérateur X positif.

— On démontre la conjecture de Gross pour $1 < p \leq 2$, $p' = 2$ par récurrence sur la dimension ν.

— Par dérivation on montre une inégalité de Sobolev logarithmique, qui n'est pas tout à fait celle qu'il faut.

— On transforme cette inégalité pour obtenir (2).

1. Réduction au cas $X \geq 0$.

1) Nous avons besoin d'une formule pour $\Gamma(\alpha)$. Soit $y_1, \ldots, y_\nu$ un second système de variables de Bernoulli anticommutatives telles que

$$x_i y_j + y_j x_i = 0 \ .$$

On note par $\mathcal{Z}$ l'algèbre engendrée par $x_1, \ldots, x_\nu, y_1, \ldots, y_\nu$. Remarquons que les vecteurs $x_i' = \alpha x_i + \sqrt{1-\alpha^2}\, y_i$ sont libres et satisfont à la même relation d'anticommutation que les x_i. Il existe donc un isomorphisme d'algèbre R_α de Δ dans $\mathcal{Z}$ tel que $R_\alpha(x_i) = x_i'$, et on a pour $X \in \Delta$

$$\| R_\alpha(X) \|_{p'} = \| X \|_{p'} \ , \tag{3}$$

$$R_\alpha(|X|) = | R_\alpha(X) | \ . \tag{4}$$

Enfin pour $X \in \Delta$ (X est un polynôme en les x_i) on a la formule, analogue à la formule de Mehler,

$$\Gamma(\alpha) X = \mathbb{E}_\Delta R_\alpha(X) \ ,$$

où $\mathbb{E}_\Delta$ est l'espérance conditionnelle sur $\mathcal{Z}$ par rapport à la sous-algèbre Δ,

$$\mathbb{E}_\Delta(x_A y_B) = x_A \quad \text{si} \quad B = \emptyset, \qquad = 0 \quad \text{sinon}.$$

Lemme 1. *Pour $Z \in \mathcal{Z}$, $1 \leq p \leq \infty$, on a*

$$\|\mathbb{E}_\Delta Z\|_p \leq \|\mathbb{E}_\Delta(|Z|)\|_p^{1/2} \|\mathbb{E}_\Delta(|Z^*|)\|_p^{1/2} \ .$$

Démonstration. La décomposition polaire de Z (considéré comme une matrice) permet d'écrire $Z = U|Z|$, $|Z| = U^*Z$ pour un certain opérateur U de norme ≤ 1 (une isométrie partielle). On a $U^*U|Z| = U^*Z = |Z|$, donc $|Z|U^*U|Z| = |Z|^2$, et l'opérateur positif $U|Z|U^*$ a pour carré $U|Z|^2U^* = ZZ^*$. Autrement dit

$$U\,|Z|\,U^* = |Z^*| \ .$$

Il en résulte que $Z, Z^*, |Z|, |Z^*|$ ont même norme dans tous les L^p.

D'autre part, comme le dual de $L^p(\Delta)$ est $L^q(\Delta)$ il existe $X \in \Delta$ tel que $\| X \|_q = 1$ et que

$$\|\mathbb{E}_\Delta(Z)\|_p = \mathbb{E}[X \mathbb{E}_\Delta Z] = \mathbb{E}(XZ) \ .$$

A nouveau on écrit $X = V|X|$ pour une isométrie partielle $V \in \Delta$. Alors on a en utilisant le fait que $\mathbb{E}$ est une trace

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}_\Delta(Z)\|_p &= \mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(XU|Z|) = \mathbb{E}(V|X|^{1/2}|X|^{1/2}U|Z|^{1/2}|Z|^{1/2}) \\ &= \mathbb{E}(|X|^{1/2}U|Z|^{1/2}|Z|^{1/2}V|X|^{1/2})\ ;\end{aligned}$$

on majore cela en appliquant l'inégalité de Schwarz $|\,\mathbb{E}(AB)\,| \le \mathbb{E}(A^*A)^{1/2}\mathbb{E}(B^*B)^{1/2}$ (et $\mathbb{E}(A^*A) = \mathbb{E}(AA^*)$) avec $A = |X|^{1/2}U|Z|^{1/2}$, $B = |Z|^{1/2}V|X|^{1/2}$:

$$\begin{aligned}&\le (\mathbb{E}(|X|^{1/2}U|\,|Z|\,|U^*|X|^{1/2}))^{1/2}(\mathbb{E}(|X|^{1/2}V^*|Z|\,V\,|X|^{1/2}))^{1/2} \\ &= (\mathbb{E}(|X|(U|Z|U^*))^{1/2}(\mathbb{E}((V|X|V^*)\,|Z|\,)^{1/2} \\ &= (\mathbb{E}(|X|\,\mathbb{E}_\Delta(U|Z|U^*))^{1/2}(\mathbb{E}(V|X|V^*\,\mathbb{E}_\Delta(|Z|))^{1/2}\ ;\end{aligned}$$

on applique l'inégalité de Hölder, et le fait que $\|\,V|X|V^*\,\|_q \le \|\,|X|\,\|_q \le 1$

$$\le \|\mathbb{E}_\Delta(U|Z|U^*)\,\|_p^{1/2}\|\mathbb{E}_\Delta(|Z|)\,\|_p^{1/2} = \|\mathbb{E}_\Delta(|Z^*|)\,\|_p^{1/2}\|\mathbb{E}_\Delta(|Z|)\,\|_p^{1/2}$$

d'après la relation $U|Z|U^* = |Z^*|$. Cela démontre le lemme.

2) Nous utilisons le lemme 1 pour montrer que, si l'inégalité (1) est vraie pour $|X|$, elle l'est aussi pour X. On a en effet

$$\begin{aligned}\|\,\Gamma(\alpha)X\,\|_{p'} &= \|\,\mathbb{E}_\Delta R_\alpha(X)\,\|_{p'} \\ &\le \|\mathbb{E}_\Delta|R_\alpha(X)|\,\|_{p'}^{1/2}\|\mathbb{E}_\Delta(\,|R_\alpha(X)^*|)\,\|_{p'}^{1/2} \\ &= \|\mathbb{E}_\Delta R_\alpha(|X|)\,\|_{p'}^{1/2}\|\mathbb{E}_\Delta R_\alpha(|X^*|)\,\|_{p'}^{1/2} \qquad (cf.\ (4)) \\ &= \|\,\Gamma(\alpha)\,|X|\,\|_{p'}^{1/2}\|\,\Gamma(\alpha)\,|X^*|\,\|_{p'}^{1/2} \le \|\,|X|\,\|_p^{1/2}\,\|\,|X^*|\,\|_p^{1/2} = \|\,X\,\|_p\ .\end{aligned}$$

2. Démonstration d'hypercontractivité pour $1 < p \le 2$, $p' = 2$. Nous avons le droit maintenant de supposer $X \ge 0$. Nous allons raisonner par récurrence sur ν — en admettant le cas $\nu = 1$ qui est commutatif, classique, mais non trivial. Nous utiliserons en outre l'inégalité suivante :

Lemme 2. (Ball-Carlen-Lieb). *Si A, B sont des matrices (m,m), on a pour $1 \le p \le 2$*

$$(5)\qquad \left(\frac{\mathrm{Tr}\,(|A+B|^p) + \mathrm{Tr}\,(|A-B|^p)}{2}\right)^{p/2} \ge (\mathrm{Tr}\,(|A|^p))^{2/p} + (p-1)(\mathrm{Tr}\,(|B|^p))^{2/p}\ .$$

En fait nous n'utiliserons ce lemme que dans le cas où $A \pm B \ge 0$, et nous donnerons plus loin (lemme 2) la démonstration assez simple dans ce cas particulier.

Pour alléger les notations nous écrivons $x_\nu = x$. L'opérateur X s'écrit $U + xV$, où U et V sont dans l'algèbre $\Delta_{\nu-1}$ engendrée par $x_1, \ldots, x_{\nu-1}$. On a $\Gamma(\alpha)X = \Gamma(\alpha)U + \alpha x\Gamma(\alpha)V$, deux termes orthogonaux, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$(6)\qquad \begin{aligned}\|\,\Gamma(\alpha)X\|_2^2 &= \|\,\Gamma(\alpha)U + \alpha x\Gamma(\alpha)V\,\|_2^2 = \|\,\Gamma(\alpha)U\|_2^2 + |\alpha|^2\,\|\Gamma(\alpha)V\,\|_2^2 \\ &\le \|U\|_p^2 + \alpha^2\,\|V\|_p^2 \le \|U\|_p^2 + (p-1)\,\|V\|_p^2\ .\end{aligned}$$

Pour estimer $\|X\|_p$ nous introduisons $C = x_1 \ldots x_{\nu-1}$; on a $C^*C = CC^* = 1$, donc $\|C\|_p = 1$. On note $x' = xC$, $W = C^*V$, qui appartient à $\Delta_{\nu-1}$. Alors C anticommute et x' commute avec tout x_i pour $1 \le i \le \nu - 1$. Donc l'algèbre engendrée par x' et $\Delta_{\nu-1}$

est isomorphe à un produit tensoriel et x' se comporte comme une variable de Bernoulli ordinaire, c'est à dire que l'on a pour $X = U + x'W$

$$\|X\|_p^p = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}(|U+W|)^p + \mathbb{E}(|U-W|)^p\right) .$$

Comme $X = U + x'W \geq 0$ on peut écrire $U + x'W = (R + x'S)(R^* + x'S^*)$, et on en déduit que $U \pm W = (R \pm S)(R^* \pm S^*) \geq 0$. Par (5) on a

$$\|X\|_p^2 \geq \|U\|_p^2 + (p-1)\,\|W\|_p^2 = \|U\|_p^2 + (p-1)\,\|W\|_p^2 . \tag{7}$$

Comme $\| W \|_p = \| V_p \|$ la récurrence découle alors des inégalités (6) et (7).

3. Une inégalité de Sobolev logarithmique. Sur l'algèbre commutative engendrée par un seul opérateur autoadjoint, les normes L^r se comportent comme les normes L^r usuelles associées à une mesure. On démontre alors sans peine l'inégalité suivante, où X est autoadjoint

$$\frac{d}{dp}\|X\|_p = (1/p)\,\|X\|_p^{1-p}\left(\mathbb{E}(|X|^p \log|X|) - \|X\|_p^p \log\|X\|_p\right) . \tag{8}$$

Le résultat d'hypercontractivité établi à l'étape précédente entre les exposants $p < 2$ et 2 donne en passant à l'adjoint un résultat d'hypercontractivité entre les exposants 2 et $q > 2$, soit

$$\| \Gamma(e^{-t})X \|_2^2 \leq \|X\|_{1+e^{-2t}}^2 .$$

Puisque les deux côtés sont égaux quand $t = 0$, on a

$$\frac{d}{dt}\| \Gamma(e^{-t})X \|_2^2 \Big|_{t=0} \leq \frac{d}{dt}\| X \|_{1+e^{-2t}}^2 \Big|_{t=0} .$$

Mais on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\| \Gamma(e^{-t})X \|_2^2 \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} < \Gamma(e^{-t})X\,,\, \Gamma(e^{-t})X > \Big|_{t=0} \\ &= < X\,,\, \frac{d}{dt}\Gamma(e^{-2t})X > \Big|_{t=0} \\ &= -2 < X\,,\, \mathrm{N}X > .\end{aligned}$$

On peut calculer $\frac{d}{dt}\|X\|_{1+e^{-2t}}^2 |_{t=0}$ par (8), et on obtient

$$\mathbb{E}(\,|X|^2 \log|X|^2\,) - \|X\|_2^2 \log\|X\|_2^2 \leq 2 < X, \mathrm{N}X > \tag{9}$$

Puisque $X \geq 0$, nous pouvons remplacer X par $X^{p/2}$ dans (9), et obtenir

$$\mathbb{E}(X^p \log X) - \|X\|_p^p \log\|X\|_p \leq (2/p) < X^{p/2}\,,\, \mathrm{N}X^{p/2} > \tag{10}$$

qui était le but de cette étape.

4. Amélioration de l'inégalité. On veut déduire de (10) la vraie inégalité de Sobolev logarithmique (2), c'est à dire

$$\mathbb{E}(X^p \log X) - \|X\|_p^p \log\|X\|_p \leq \frac{p/2}{p-1} < X, \mathrm{N}(X^{p-1}) > .$$

Il suffit évidemment pour cela de montrer que

$$< X^{p/2}, \mathrm{N}(X^{p/2}) > \leq \frac{(p/2)^2}{p-1} < X, \mathrm{N}(X^{p-1}) > \ .$$

Nous introduisons l'opérateur $\mathrm{N}_i = a_i^* a_i$ où a_i est l'opérateur d'annihilation correspondant à x_i. Pour calculer $\mathrm{N}_i X$ on écrit $X = U + x_i V$ où U, V ne contiennent pas x_i, et alors $\mathrm{N}_i X = x_i V$. Comme on a $\mathrm{N} = \sum_i \mathrm{N}_i$, il suffit de montrer :

Lemme 3. (Gross [5]). *Soient* $X \geq 0$ *et* $1 < p < \infty$. *Alors*

$$< X^{p/2}, \mathrm{N}_i(X^{p/2}) > \leq \frac{(p/2)^2}{p-1} < X, \mathrm{N}_i(X^{p-1}) > \ .$$

Cela sera fait plus loin.

5. Passage à l'hypercontractivité. Pour la commodité du lecteur, rappelons la démonstration classique de Gross. On veut montrer que $h(t) = \| \Gamma(e^{-t})X \|_{q(t)}$ est une fonction décroissante en t, où $q(t) = 1 + e^{2t}(p-1)$. Pour cela on montre $\frac{d}{dt} h(t) \leq 0$. Posons $Y(t) = \Gamma(e^{-t})X$ — pour simplifier les notations on ignore la dépendance en t des fonctions q et Y. Par (8) et un calcul de dérivation d'une fonction composée, on a

$$\frac{d}{dt} h(t) = \|Y\|_q^{1-q} \left[(\dot{q}/q) \{ \mathbb{E}(Y^q \log Y) - \|Y\|_q^q \log \|Y\|_q \} - < Y, \mathrm{N} Y^{q-1} > \right] \ .$$

On a d'autre part $q/\dot{q} \geq \frac{p/2}{p-1}$, et nous verrons plus bas que $< Y, \mathrm{N}Y^{q-1} >$ est positif (cf. (14), (15)). Donc la dérivée est négative, et la démonstration est terminée.

6. Démonstration du Lemme 2. Nous allons recopier la démonstration simplifiée donnée par Carlen et Lieb, pour le cas $A \pm B \geq 0$. Cette hypothèse entraîne $A + rB \geq 0$ pour $-1 \leq r \leq 1$, et nous allons montrer que dans le même intervalle

$$\left(\frac{\mathrm{Tr}\,(A+rB)^p + \mathrm{Tr}\,(A-rB)^p}{2} \right)^{2/p} \geq (\mathrm{Tr}\,(A^p))^{2/p}) + r^2(p-1)\,(\mathrm{Tr}\,(|B|^p))^{2/p} \ .$$

Soient Z et W les matrices $(2m, 2m)$

$$Z = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad , \quad W = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} \ .$$

Alors l'inégalité à démontrer peut s'écrire

$$(\,\mathrm{Tr}(Z+rW)^p\,)^{2/p} \geq (\mathrm{Tr}\,(Z^p))^{2/p} + r^2(p-1)(\,\mathrm{Tr}(|W|^p))^{2/p} \ .$$

Les deux membres sont égaux pour $r = 0$, ainsi que leurs dérivées premières (voir (12) plus bas). Il suffit donc de démontrer une inégalité sur les dérivées secondes. La dérivée seconde du côté droit est $2(p-1)(\mathrm{Tr}\,|W|^p)^{2/p}$. Du côté gauche, notons $\mathrm{Tr}(Z + rW)^p$ par $\psi(r)$; comme ψ est positive on a

$$\frac{d^2}{dr^2}(\psi(r))^{2/p} \geq \frac{2}{p} \psi(r)^{(2-p)/p} \psi''(r) \ .$$

Il nous suffit de montrer que dans l'intervalle ouvert $]-1,1[$

$$\psi(r)^{(2-p)/p}\,\psi''(r) \geq p(p-1)(\mathrm{Tr}|W|^p)^{2/p} .$$

Nous mettons cela sous la forme suivante : Posons $X = Z + rW \geq 0$ et $Y = W$, deux opérateurs autoadjoints ; nous supposerons d'abord $X > \varepsilon > 0$ et $(X+sY)^p$ est bien défini pour s petit. On pose donc $\psi(s) = \mathrm{Tr}(X+sY)^p$ et on va montrer :

$$\psi(r)^{(2-p)/p}\,\psi''(r)\ \Big|_{r=0} \geq p(p-1)(\mathrm{Tr}|Y|^p)^{2/p} . \tag{11}$$

Le cas où $X \geq 0$ s'obtient par passage à la limite. Nous commençons par évaluer $\psi(0)$, en utilisant la remarque suivante : sur l'ensemble des opérateurs A autoadjoints, considérons une fonction réelle $h(A)$ qui est *convexe,* c'est à dire $h((A+B)/2) \leq (h(A)+h(B))/2$, et unitairement invariante, c'est à dire $h(U^*AU) = h(A)$ pour U unitaire ; alors pour n'importe quelle base orthonormale (e_i) on a $h(A) \geq h(A_d)$, l'opérateur dont la matrice est diagonale dans la base avec les mêmes éléments diagonaux que A. En effet, soit U_1 la réflexion unitaire qui change e_1 en $-e_1$ en conservant les autres e_i, et soient $A_1 = U_1^*AU_1$, $B_1 = (A+A_1)/2$; on a $(h(A)+h(A_1))/2 = h(A)$, donc $h(A) \geq h(B_1)$; or B_1 s'obtient en remplaçant par 0 tous les éléments non diagonaux de la première ligne et de la première colonne. On obtient le résultat en faisant de même successivement pour les autres vecteurs de base. En particulier, pour $h(A) = \mathrm{Tr}(|A|^p)$ on obtient que pour X autoadjoint positif on a dans toute base orthonormale

$$\psi(0) = \mathrm{Tr}(X^p) \geq \textstyle\sum_i x_{ii}^p .$$

Pour minorer de même $\psi''(0)$, le raisonnement est plus délicat, et utilise le fait que $1 < p \leq 2$. On rappelle d'abord que pour tout opérateur borné A et toute fonction $F(z)$ holomorphe au voisinage du spectre de A, on a pour tout opérateur A' suffisamment proche de A

$$F(A') = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F(z)\,dz}{z-A'} ,$$

où la courbe C entoure le spectre de A. On en déduit pour $A' = A_s = A + sY$, en prenant la dérivée $D = \frac{d}{ds}|_{s=0}$

$$DF(A_s) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{1}{z-A}Y\frac{1}{z-A}F(z)\,dz \cdot$$

En utilisant la propriété centrale de la trace, on a donc

$$D\mathrm{Tr}(F(A_s)) = \mathrm{Tr}\Big(\big(\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F(z)\,dz}{(z-A)^2}\big)Y\Big) = \mathrm{Tr}(DF(A_s)Y) .$$

Nous appliquons cela avec $F(z) = z^p$, holomorphe au voisinage du spectre de $A = X + rY > 0$

$$\frac{d}{dr}\mathrm{Tr}((X+rY)^p) = p\mathrm{Tr}((X+rY)^{p-1}Y) . \tag{12}$$

Ensuite, nous utilisons la représentation intégrale, valable pour $1 < p < 2$ et pour $a > 0$ (pour l'établir, poser $t = au$)

$$a^{p-1} = c_p \int_0^\infty t^{p-1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+a} \right) dt$$

et qui s'étend aux opérateurs $A > 0$ par calcul spectral. Lorsque $A = A_r = X + rY$ on en déduit la formule

$$\frac{d}{dr} (A_r)^{p-1} = c_p \int_0^\infty t^{p-1} \frac{1}{t + A_r} Y \frac{1}{t + A_r} dt$$

et à nouveau en utilisant la propriété centrale de la trace

$$\psi''(0) = pc_p \int_0^\infty t^{p-1} \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{t+X} Y \frac{1}{t+X} Y \right) dt \; .$$

Nous laissons maintenant Y fixe, et désignons par $h(X)$ le second membre. Montrons que $h(X)$ est une fonction convexe en calculant la dérivée seconde $\frac{d^2}{dr^2} h(X + rK)\,|_{r=0}$ pour $X > 0$ et K autoadjoint. D'abord, posons $G_r = (t + X + rK)^{-1}$, $G = G_0$; nous avons $G'_r = -G_r H G_r$, donc la dérivée première de $\mathrm{Tr}(G_r Y G_r Y)$ est

$$-\mathrm{Tr}(G_r K G_r Y G_r Y + G_r Y G_r K G_r Y)$$

et la dérivée seconde en 0 est

$$\begin{aligned} &2\mathrm{Tr}(GKGKGYGY + GKGYGKGY + GYGKGKGY) \\ &= \mathrm{Tr}(2GKGYGY(GK) + GKGYGKGY + GYGKGY(GK) + 2GYGKGKGY) \end{aligned}$$

où les deux parenthèses ont été déplacées à droite d'après la propriété centrale de la trace. Posant $B = KGY$, l'expression s'écrit

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}(2GBGB^* + GBGB + GB^*GB^* + 2GB^*GB) = \\ &\qquad\qquad \mathrm{Tr}(GBGB^* + G(B + B^*)G(B + B^*) + GB^*GB) \; . \end{aligned}$$

Le premier terme peut s'écrire $\mathrm{Tr}((\sqrt{G}B\sqrt{G})\,(\sqrt{G}B^*\sqrt{G}))$, il est donc positif; le troisième de même. Enfin, le terme central s'écrit

$$\mathrm{Tr}((\sqrt{G}(B + B^*)\sqrt{G})\,(\sqrt{G}(B + B^*)\sqrt{G}))$$

qui est aussi la trace d'un opérateur positif, et la convexité est établie.

La fonction $h(X)$ n'est pas unitairement invariante, mais elle satisfait à $h(X) = h(U^*XU)$ pour les unitaires *qui commutent avec* Y. Plaçons nous dans une base (e_i) où Y est diagonale, et remarquons que les réflexions de la démonstration précédente sont aussi diagonales, donc commutent avec Y. Le raisonnement montre alors que l'on minore $\psi''(0)$ en remplaçant X par la matrice diagonale (x_{ii}). Mais pour cette matrice on a $\mathrm{Tr}(X + rY)^p = \sum_i (x_{ii} + ry_{ii})^p$ avec $\psi''(0) = p(p-1) \sum_i x_{ii}^{p-2} y_{ii}^2$. Il reste donc seulement à prouver (voir (11)) que

$$(\textstyle\sum_i x_{ii}^p)^{(2-p)/p} (\sum_i x_{ii}^{p-2} y_{ii}^2) \geq (\sum_i |y_{ii}|^p)^{2/p} \; .$$

Cela se déduit de l'inégalité de Hölder appliquée aux exposants conjugués $2/p$ et $2/(2-p)$ et aux suites $a_i = y_{ii}/x_{ii}^{p(2-p)/2}$, $b_i = x_{ii}^{p(2-p)/2}$.

Démonstration du Lemme 3. Nous suivons l'idée de Gross [5], mais nous pouvons simplifier la démonstration en remplaçant des arguments combinatoires par des raisonnements analytiques.

Rappelons qu'étant donnés $X \geq 0$ et $p \in]1, \infty[$, on veut démontrer

$$< X^{p/2}, \mathrm{N}_i(X^{p/2}) > \leq \frac{(p/2)^2}{p-1} < X, \mathrm{N}_i(X^{p-1}) > \ .$$

Comme au n° 2, nous supposons que $i = \nu$, simplifions x_i en x et posons $X = U + xV$ avec $U, V \in \Delta_{\nu-1}$. Alors $\mathrm{N}_\nu X = xV$. Comme l'opérateur de nombre total N n'apparaît plus, nous simplifions aussi N_ν en N. Enfin, puisque $X \geq 0$, par continuité, on peut supposer que $X \geq \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$.

Soit W la réflexion unitaire définie par $Wx_A = -x_A$ si $\nu \in A$ et $= x_A$ si $\nu \notin A$. On a $W^*(U + xV)W = U - xV$, donc $U - xV \geq \varepsilon > 0$; on en déduit que U, xV sont autoadjoints et $U > 0$. On pose pour $s \in [-1, 1]$ $X(s) = U + sxV \geq \varepsilon$. Ensuite $x^2 = 1$ et $x\,x_A = -x_A\,x$ pour $|A|$ impair et $x\,x_A = x_A\,x$ pour $|A|$ pair. On en déduit que pour k entier $X(s)^k = P(s) + xQ(s)$, où $P(s)$ (resp. $Q(s)$) est une fonction paire (resp. impaire) de s à valeurs dans $\Delta_{\nu-1}$. Cela s'étend à toute fonction analytique h à valeurs dans $\Delta_{\nu-1}$, et on a

$$Nh(X) = xQ(1) = \tfrac{1}{2}(\,h(X(1)) - h(X(-1))\,)\ .$$

Donc

$$N(X^{p/2}) = \tfrac{1}{2}\left(X(1)^{p/2} - X(-1)^{p/2}\right) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{d}{ds}X(s)^{p/2}\,ds\ .$$

D'autre part, pour $Y = A + xB$ avec $A, B \in \Delta_{\nu-1}$ on a $< Y, NY > = < xB, xB > = \| NY \|_2^2$, donc

$$\begin{aligned} < X^{p/2}, N(X^{p/2}) > &= \|NX^{p/2}\|_2^2 = \tfrac{1}{4}\,\|\int_{-1}^{1}\frac{d}{ds}X(s)^{p/2}ds\,\|^2 \\ &\leq \tfrac{1}{4}\left(\int_{-1}^{1}\|\frac{d}{ds}X(s)^{p/2}\|\,ds\right)^2 \leq \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\|\frac{d}{ds}X(s)^{p/2}\|^2\,ds\ . \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} < X, N(X^{p-1}) > &= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} < NX, \frac{d}{ds}X(s)^{p-1} > ds \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} < \frac{d}{ds}X(s), \frac{d}{ds}X(s)^{p-1} > ds\ . \end{aligned}$$

Donc le problème se ramène à démontrer que

$$\|\frac{d}{ds}X(s)^{p/2}\|^2 \leq \frac{(p/2)^2}{p-1} < \frac{d}{ds}X(s), \frac{d}{ds}X(s)^{p-1} > \ . \tag{13}$$

Ceci n'a plus rien à voir avec les fermions : on va prendre $X(s) = U + sW$, où U et W sont des matrices avec $U \pm W \geq \varepsilon$, et le produit scalaire est $< X, Y >= \mathrm{Tr}(X^*Y)$. En remplaçant U par $U + sW$, il nous suffit de considérer la dérivée en $s = 0$, sous l'hypothèse $U > 0$, W autoadjointe arbitraire.

Puisque $X(s) > 0$ pour s petit, on peut écrire $X(s)$ sous la forme $e^{Y(s)}$, où $Y(s) = \log X(s)$ est une série en s à coefficients matriciels. D'autre part nous n'avons besoin que des dérivées premières en $s = 0$. Par conséquent, il suffit de prendre les deux premiers termes de la série, et nous pouvons à nouveau remplacer $Y(s)$ par $U + sV$ avec $U > 0$, V autoadjointe. Pour une telle fonction $X(s) = e^{U+sV}$ nous avons d'après une formule classique (voir le Séminaire XXIV, p. 454)

$$\frac{d}{ds}X(s)\,\Big|_{s=0} = \int_0^1 e^{(1-t)U}\,V\,e^{tU}dt$$

$$\frac{d}{ds}X(s)^{p/2}\,\Big|_{s=0} = \frac{p}{2}\int_0^1 e^{(1-t)\frac{p}{2}U}Ve^{t\frac{p}{2}U}dt$$

$$\frac{d}{ds}X(s)^{p-1}\,\Big|_{s=0} = (p-1)\int_0^1 e^{(1-t)(p-1)U}\,V\,e^{t(p-1)U}dt$$

Nous pouvons alors calculer les deux côtés de (13). Le côté gauche vaut

$$\mathrm{Tr}\int_0^1\int_0^1 e^{rpU/2}Ve^{(1-r)\,pU/2}e^{(1-s)\,pU/2}Ve^{spU/2}drds$$

et en posant $r + s = 2x$, $r - s = 2y$ nous sommes ramenés à l'expression

$$(14)\quad 2\Big(\int_0^{1/2} h(x)\,2x dx + \int_{1/2}^1 h(x)\,2(1-x)\,dx\,\Big) \quad \text{avec } h(x) = \mathrm{Tr}(e^{xpU}Ve^{(1-x)\,pU}V)\ .$$

En utilisant la propriété centrale de la trace, il est facile de voir que $h(x)$ est positive. De la même façon, le côté droit vaut

$$\mathrm{Tr}\int_0^1\int_0^1 e^{rU/2}Ve^{(1-r)\,U/2}e^{(1-s)\,(p-1)\,U/2}Ve^{s(p-1)\,U/2}drds\ ,$$

et se calcule en posant $r + s(p-1) = px$, $r - s(p-1) = py$; si l'on a $p \geq 2$ l'intégrale s'écrit

$$(15)\quad \frac{p^2}{2(p-1)}\Big(\int_0^{1/p} h(x)\,2x dx + \int_{1/p}^{1-1/p} h(x)\,(2/p)\,dx + \int_{1-1/p}^1 h(x)\,2(1-x)\,dx\,\Big)\ .$$

Pour $p < 2$ on a $1 - 1/p < 1/p$ et les rôles de ces deux quantités sont échangés (y compris dans l'intégrale du milieu) ; dans les deux cas, l'intégrale (15) est positive, ce qui établit un résultat utilisé plus haut.

Maintenant, on peut comparer les fonctions qui multiplient $h(x)$ dans les deux intégrales (14) et (15), sur chacun des trois intervalles d'intégration, et la seconde est partout plus grande que la première. Le coefficient en tête de (15) est $pq/2$ dont le minimum est 2, le coefficient en tête de (14). Les majorations sont vraiment élémentaires, et nous ne donnons pas le détail.

Références

[1] P.J. Bushell et G.B. Trustrum. Trace inequalities for positive definite power products, *Linear Alg. Appl.* **132**, 1990, 173–178.

[2] E.A. Carlen et E.H. Lieb. Optimal hypercontractivity for Fermi fields and related non-commutative integration inequalities, Preprint, 1992.

[3] J. Dixmier. Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs, *Bull. Soc. Math. France,* **81**, 1953, 222–245.

[4] L. Gross. Existence and uniqueness of physical ground states, *J. Funct. Anal.* **10**, 1972, 52–109.

[5] L. Gross. Hypercontractivity and logarithmic Sobolev inequalities for the Clifford-Dirichlet form, *Duke Math. J.*, **42**, 1975, 383–396.

[6] Y.Z. Hu. Calculs formels sur les E.D.S. de Stratonovitch, *Sém. Prob. XXIV,* LNM **1426**, Springer, 1990, 453–460.

[7] E.H. Lieb et W. Thirring. Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger Hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities, *Studies Math. Phys. in Honor of V. Bargmann,* Princeton, N. J., 1976, 269–303.

[8] M. Lindsay. Gaussian hypercontractivity revisited, *J. Funct. Anal.*, **92**, 1990, 313–324.

[9] M. Lindsay et P.A. Meyer. Fermion hypercontractivity, *Quantum Probability VII*, World Scientific 1992, à paraître.

[10] P.A. Meyer. Eléments de probabilités quantiques, exposés I-V, *Sém. Prob. XX,* Springer LNM **1204**, 1986, 186–312.

[11] P.A. Meyer. *Quantum Probability for Probabilists,* Lecture Notes in Math. 1538, 1993.

[12] I.E. Segal. A noncommutative extension of abstract integration, *Ann. of M.* 57 (1953), 401–457.

[13] I. Wilde. Hypercontractivity for fermions, *J. Math. Phys.* 14 (1973), 791–792.

[14] F.J. Yeadon. Noncommutative L^p-spaces, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 77 (1975), 91–102.