

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN BERTOIN

## **Une preuve simple du théorème de Shimura sur les points méandre du mouvement brownien plan**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 27 (1993), p. 33-35

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1993\\_\\_27\\_\\_33\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__33_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE PREUVE SIMPLE DU THÉORÈME DE SHIMURA SUR  
LES POINTS MÉANDRE DU MOUVEMENT BROWNIEN PLAN

Jean BERTOIN

Soient  $Z = (X, Y)$  un mouvement brownien plan issu de l'origine, et  $\theta \in ]0, 2\pi[$  un angle fixé. On note  $X' = \cos(\theta)X + \sin(\theta)Y$ , la composante de  $Z$  dans la direction  $\theta$ , et on dit qu'un instant  $t > 0$  est point méandre s'il existe  $\varepsilon \in ]0, t[$  tel que

$$X_t \leq X_s \text{ et } X'_t \leq X'_s, \text{ pour tout } s \in [t, t+\varepsilon] \text{ et tout } s' \in [t-\varepsilon, t].$$

L'objet de cette note est de proposer une preuve simple du joli résultat suivant, dû à Shimura [3].

**Théorème (Shimura).** *La probabilité qu'il existe un point méandre est nulle.*

Dans le cas où  $\theta = \pi$ , le Théorème énonce que le mouvement brownien réel  $X$  ne croît jamais, ce qui est dû à Dvoretzky, Erdős et Kakutani [1]. Aussi, nous supposons désormais que  $\theta \neq \pi$ . La démonstration de Shimura repose sur des arguments élémentaires semblables à ceux de [1], et est assez difficile à suivre. Notre preuve est plus directe, mais utilise des résultats fins de David Williams [5] sur le mouvement brownien réel, et de Varadhan et Ruth Williams [4] sur le mouvement brownien réfléchi dans un cône. Les arguments sont très proches de ceux de Le Gall [2].

Soit  $\zeta$ , une v.a. exponentielle indépendante de moyenne 2, indépendante de  $Z$ . Nous tuons  $Z$  au temps  $\zeta$ , et introduisons pour  $t < \zeta$  :

$$J_t = \inf\{X_s, s \in [t, \zeta[ \}, I'_t = \inf\{X'_s, s \leq t\}.$$

Clairement, il suffit de montrer:

$$(*) \quad P(\exists t \in ]0, \zeta[ : X_t = J_t \text{ et } X'_t = I'_t) = 0.$$

Le Lemme suivant est implicite dans le travail de D. Williams, il découle aisément du Théorème 4.5 de [5] par retournement du temps.

**Lemme.** *Il existe  $\beta$ , un mouvement brownien réel avec drift +1 issu de  $J_0$  et indépendant de  $Y$ , dont le processus supremum est noté*

$$\sigma_t = \sup\{\beta_s^* : s \leq t\}$$

( $\beta^*$  désigne la partie positive de  $\beta$ ), et tel que

$$X_t - J_t = \sigma_t - \beta_t \text{ et } J_t = \sigma_t + J_0 \text{ pour } t < \zeta.$$

*Remarque.* La filtration naturelle de  $\beta$  contient strictement celle de  $X$ . On peut sans doute aussi montrer le Lemme en utilisant la théorie du grossissement de filtration.

*Preuve du Théorème.* Notons  $\mathbb{Q}$  la mesure de probabilité donnée par

$$d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t} = \exp\{J_0 - \beta_t + \frac{1}{2} t\} d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t},$$

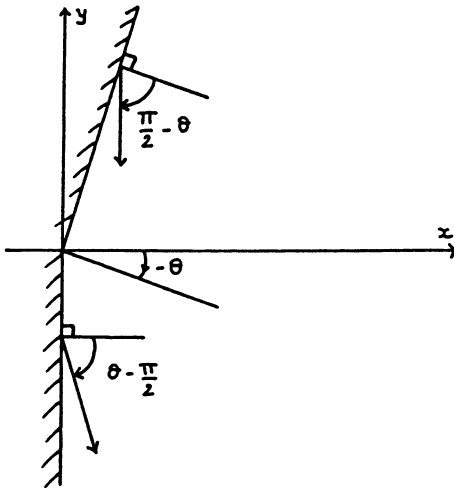
où  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  désigne la filtration naturelle de  $(\beta, Y)$ . Ainsi, d'après le théorème de Girsanov,  $(\beta, Y)$  est un  $\mathbb{Q}$ -mouvement brownien plan. Soit  $W = (W^1, W^2)$ , le processus défini par les relations

$$X - J = W^1 \text{ et } X' - I' = \cos(\theta)W^1 - \sin(\theta)W^2.$$

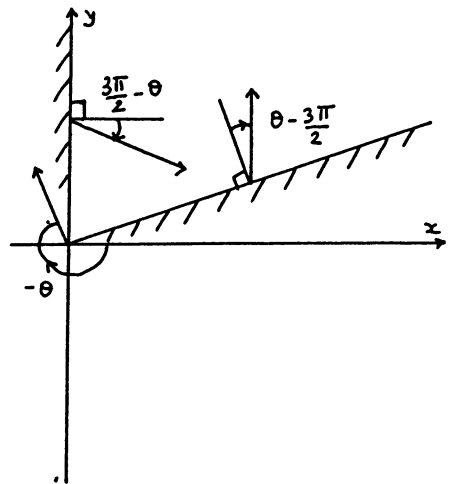
Nous déduisons du Lemme:

$$W = (-J_0, \cotan(\theta)J_0) + (\sigma, \frac{I'}{\sin(\theta)} - \cotan(\theta)\sigma) + (-\beta, -Y).$$

En particulier,  $W$  s'exprime comme la somme de sa position initiale, d'un processus adapté à  $(\mathcal{F}_t)$  qui ne varie que lorsque  $W$  atteint le bord du cône  $\mathcal{C} = \{x \geq 0 \text{ et } \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \geq 0\}$ , et enfin d'un  $\mathbb{Q}$ -mouvement brownien. Autrement dit, sous  $\mathbb{Q}$ ,  $W$  est un mouvement brownien réfléchi dans  $\mathcal{C}$ . De plus, les angles de réflexion par rapport à la normale entrante sur les deux demi-droites qui bordent  $\mathcal{C}$  (les angles positifs étant en direction du sommet du cône), sont opposés. Voir les figures ci-dessous. D'après Varadhan et R. Williams [4],  $W$  ne visite pas  $(0,0)$ ,  $\mathbb{Q}$ -p.s. Les lois  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$  étant équivalentes sur chaque  $\mathcal{F}_t$ , ceci établit (\*).  $\square$



$0 < \theta < \pi$



$\pi < \theta < 2\pi$

Angles de réflexion sur les bords du cône  $\mathcal{C}$ .

## Références

- [1] A. Dvoretzky, P. Erdős et S. Kakutani: Nonincrease everywhere of the Brownian motion process, *Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob. II* (1961), 103-116.
- [2] J.F. Le Gall: Mouvement brownien, cônes et processus stables, *Prob. Th. Rel. Fields* 76 (1987), 587-627.
- [3] M. Shimura: Meandering points of two-dimensional Brownian motion, *Kodai J. Math.* 11 (1988), 169-176.
- [4] S.R.S. Varadhan et R.J. Williams: Brownian motion in a wedge with oblique reflection, *Commun. Pure Appl. Math.* 38 (1985), 405-443.
- [5] D. Williams: Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions, *Proc. London Math. Soc.* 28 (1974), 738-768.

J. Bertoin  
Laboratoire de Probabilités  
Université Paris VI  
4, Place Jussieu  
Tour 56 - 3<sup>ème</sup> étage  
75272 Paris Cedex 05