

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

STÉPHANE ATTAL

PAUL-ANDRÉ MEYER

Interprétation probabiliste et extension des intégrales stochastiques non commutatives

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 312-327

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__312_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INTERPRÉTATION PROBABILISTE ET EXTENSION DES INTÉGRALES STOCHASTIQUES NON COMMUTATIVES

Stéphane ATTAL et Paul-André MEYER

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex, France

0 Résumé

Nous donnons une nouvelle présentation des intégrales stochastiques non commutatives définies par Hudson et Parthasarathy [4]. Cette approche, suggérée la première fois par Meyer [5], se place dans une interprétation probabiliste de l'espace de Fock en définissant ces intégrales d'opérateurs grâce à des équations différentielles stochastiques (classiques). Elle permet de voir explicitement l'action de ces opérateurs sur les variables aléatoires de l'espace de Fock.

Nous montrons que ce point de vue est équivalent à celui de Hudson et Parthasarathy sur le domaine \mathcal{E}_{lb} des exponentielles stochastiques à coefficient localement borné. Mais il a l'avantage, dans le cas où les opérateurs considérés sont bornés, d'avoir un sens en dehors de \mathcal{E}_{lb} , contrairement au précédent. Nous définissons ainsi une extension probabiliste des intégrales stochastiques non commutatives. Nous donnons une condition suffisante pour que de telles intégrales soient prolongeables à tout l'espace de Fock. Nous montrons que nous avons alors une vraie formule d'Ito non commutative pour la composition des opérateurs. Ce qui nous permet d'exhiber une algèbre de semimartingales non commutatives.

Nous donnons enfin plusieurs applications de cette extension, en particulier une qui permet de donner une interprétation de quatre opérations fondamentales du calcul stochastique classique au moyen des intégrales stochastiques non commutatives.

I Introduction

Notations

Tout cet article est fait dans le cadre d'espaces vectoriels réels, par souci de simplicité, mais il n'y aurait aucune difficulté supplémentaire à les considérer

complexes. De même, tout l'article est fait dans l'interprétation brownienne de l'espace de Fock, toujours par souci de simplification, mais ce qui est énoncé ici ne dépend pas de l'interprétation probabiliste choisie.

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) , l'espace de Wiener. Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ le mouvement brownien canonique sur Ω , soient \mathcal{F}_t , resp. $\mathcal{F}_{[t}, \mathcal{F}_{[s,t]}$, les tribus engendrées par les variables aléatoires $\{W_u; u \leq t\}$, resp. $\{W_u - W_t; u \geq t\}$, $\{W_u - W_s; s \leq u \leq t\}$, $s \leq t \in \mathbb{R}^+$.

Soient $\Phi, \Phi_t, \Phi_{[t}, \Phi_{[s,t]}$ les espaces de Fock symétriques construits respectivement sur $L^2(\mathbb{R}^+)$, $L^2([0, t])$, $L^2([t, +\infty[)$ et $L^2([s, t])$.

On a alors les identifications suivantes (cf [6]) :

$$\begin{cases} \Phi \simeq L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \\ \Phi_t \simeq L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P) \\ \Phi_{[t} \simeq L^2(\Omega, \mathcal{F}_{[t}, P) \\ \Phi_{[s,t]} \simeq L^2(\Omega, \mathcal{F}_{[s,t]}, P). \end{cases}$$

La projection orthogonale de Φ sur Φ_t est notée \mathbb{E}_t (c'est l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à \mathcal{F}_t). Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^+)$, nous noterons $\varepsilon(u)$ l'exponentielle stochastique de la variable aléatoire $\int_0^\infty u(s) dW_s$ et, pour tout $s \leq t$,

$$\begin{cases} u_t = u \mathbb{1}_{[0,t]}, \\ u_{[t} = u \mathbb{1}_{[t, +\infty[}, \\ u_{[s,t]} = u \mathbb{1}_{[s,t]}. \end{cases}$$

Rappelons que la martingale $\varepsilon(u_t)$ admet la représentation prévisible suivante : $\varepsilon(u_t) = 1 + \int_0^t u(s) \varepsilon(u_s) dW_s$. Ainsi on a

$$\langle \varepsilon(u_t), \varepsilon(v_t) \rangle = \exp\left(\int_0^t u(s)v(s) ds\right), \text{ pour tous } u, v \in L^2(\mathbb{R}^+).$$

Soit $L_{lb}^2(\mathbb{R}^+)$ le sous-espace des éléments de $L^2(\mathbb{R}^+)$ qui sont localement bornés. Nous noterons \mathcal{E}_{lb} l'espace des combinaisons linéaires finies de vecteurs $\varepsilon(u)$, pour $u \in L_{lb}^2(\mathbb{R}^+)$. Rappelons que ce sous-espace est dense dans Φ .

Éléments de calcul stochastique non commutatif

Nous rappelons ici quelques éléments du calcul stochastique non commutatif de Hudson et Parthasarathy [4].

Grâce à l'indépendance des accroissements du mouvement brownien on a sur Φ une structure de produit tensoriel continu : pour $s \leq t$,

$$\Phi \simeq \Phi_s \otimes \Phi_{[s,t]} \otimes \Phi_{[t}.$$

Une famille d'opérateurs $(H_t)_{t \geq 0}$ de Φ dans Φ , définie sur \mathcal{E}_{lb} , est un *processus adapté* d'opérateurs si, pour tout $u \in L_{lb}^2(\mathbb{R}^+)$, l'application $t \mapsto H_t \varepsilon(u_t)$ est fortement mesurable dans Φ et si, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{cases} H_t \varepsilon(u_t) \in \Phi_t \\ H_t \varepsilon(u) = [H_t \varepsilon(u_t)] \varepsilon(u_t). \end{cases}$$

C'est à dire si $H_t = H_{t|} \otimes I_{|t}$ dans la structure $\Phi \simeq \Phi_{t|} \otimes \Phi_{|t}$, pour un opérateur $H_{t|}$ de $\Phi_{t|}$ dans lui-même ($I_{|t}$ désignant l'identité de $\Phi_{|t}$).

Un processus adapté d'opérateurs $(M_t)_{t \geq 0}$ est une *martingale d'opérateurs* si, pour tous $s \leq t$, tous $u, v \in L_{lb}^2(\mathbb{R}^+)$,

$$\langle \varepsilon(u_s), M_t \varepsilon(v_s) \rangle = \langle \varepsilon(u_s), M_s \varepsilon(v_s) \rangle,$$

i.e. $\mathbb{E}_s M_t \mathbb{E}_s = \mathbb{E}_s M_s \mathbb{E}_s (= M_s \mathbb{E}_s)$.

Si T est un opérateur sur Φ , de domaine \mathcal{E}_{lb} , la famille $(T_t)_{t \geq 0}$, définie par

$$T_t \varepsilon(u) = [\mathbb{E}_t T \varepsilon(u_t)] \varepsilon(u_t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad u \in L_{lb}^2(\mathbb{R}^+),$$

est une martingale d'opérateurs, appelée *martingale associée* à T .

On a les trois martingales d'opérateurs particulières de création, d'annihilation et de nombre, respectivement notées $(A_t^+)_{t \geq 0}$, $(A_t^-)_{t \geq 0}$, $(A_t^0)_{t \geq 0}$ et définies par

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(u), A_t^+ \varepsilon(v) \rangle &= \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle \int_0^t u(s) ds \\ \langle \varepsilon(u), A_t^- \varepsilon(v) \rangle &= \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle \int_0^t v(s) ds \\ \langle \varepsilon(u), A_t^0 \varepsilon(v) \rangle &= \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle \int_0^t u(s)v(s) ds \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, et tous $u, v \in L_{lb}^2(\mathbb{R}^+)$.

Si H^0, H^+, H^- et H sont des processus d'opérateurs adaptés vérifiant, pour tout $u \in L_{lb}^2(\mathbb{R}^+)$, $t \in \mathbb{R}^+$,

$$(1) \quad \int_0^t |u(s)| \left(\|H_s^- \varepsilon(u)\| + \|H_s^+ \varepsilon(u)\|^2 + \|H_s \varepsilon(u)\| + |u(s)|^2 \|H_s^0 \varepsilon(u)\|^2 \right) ds < \infty$$

alors la famille des intégrales stochastiques non commutatives

$$(2) \quad T_t = \int_0^t H_s^0 dA_s^0 + \int_0^t H_s^- dA_s^- + \int_0^t H_s^+ dA_s^+ + \int_0^t H_s ds, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

est bien définie sur \mathcal{E}_{lb} , comme un processus adapté d'opérateurs vérifiant, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, et tous $u, v \in L^2_{lb}(\mathbb{R}^+)$,

$$(3) \quad \langle \varepsilon(u), T_t \varepsilon(v) \rangle = \int_0^t \langle \varepsilon(u), u(s)v(s) H_s^0 \varepsilon(v) + v(s) H_s^- \varepsilon(v) + u(s) H_s^+ \varepsilon(v) + H_s \varepsilon(v) \rangle ds.$$

Remarque 1 : Les conditions de normes (1) que l'on impose ici sont moins restrictives que celle de Hudson et Parthasarathy.

Remarque 2 : Si le processus adapté $(T_t)_{t \geq 0}$ vérifie (2), il est montré dans [4] que $\int_0^t |u(s)|^2 \|T_s \varepsilon(u_s)\|^2 ds < \infty$.

Remarque 3 : Si les processus adjoints $(H^\varepsilon)^*$ sont aussi définis sur \mathcal{E}_{lb} et si l'expression

$$\int_0^t |u(s)| \left(\| (H_s^+)^* \varepsilon(u) \|^2 + \| (H_s^-)^* \varepsilon(u) \|^2 + \| H_s^* \varepsilon(u) \|^2 + |u(s)|^2 \| (H_s^0)^* \varepsilon(u) \|^2 \right) ds$$

est finie, alors le processus $(T_t^*)_{t \geq 0}$ admet la représentation intégrale

$$T_t^* = \int_0^t (H_s^0)^* dA_s^0 + \int_0^t (H_s^+)^* dA_s^- + \int_0^t (H_s^-)^* dA_s^+ + \int_0^t H_s^* ds.$$

Remarque 4 : L'intégrale stochastique non commutative T_t , peut être définie pour $t = +\infty$ de la même façon si (1) est vérifié pour $t = +\infty$. Pour tout $\varepsilon \in \{+, o, -\}$, la martingale associée à l'opérateur $\int_0^\infty H_s^\varepsilon dA_s^\varepsilon$ est alors $(\int_0^t H_s^\varepsilon dA_s^\varepsilon)_{t \geq 0}$.

Remarque 5 : L'unicité d'une représentation intégrale du type (2) a été démontrée dans [2] dans le cas où tous les opérateurs sont fermables.

Dans la suite, chaque fois qu'une de ces intégrales d'opérateurs apparaîtra, nous supposons que les processus H^0, H^+, H^- et H vérifient (1).

Par commodité, le terme ds sera parfois noté dA_s , où il faut imaginer que le A comporte en exposant un symbole invisible. Cette notation nous permettra de parler des intégrales de la forme $\int_0^t H_s^\varepsilon dA_s^\varepsilon$, pour $\varepsilon \in \{+, o, -\}$; ces intégrales seront notées I_t^ε .

II Interprétation probabiliste

Nous allons expliquer tout d'abord la démarche intuitive qui a conduit à donner une nouvelle interprétation des intégrales stochastiques non commutatives.

Les définitions initiales des martingales $(A_t^+)_{t \geq 0}$, $(A_t^-)_{t \geq 0}$ et $(A_t^0)_{t \geq 0}$ (cf [7]) donnent

$$\begin{cases} dA_t^+ \mathbb{1} = dW_t & dA_t^+ dW_t = 0 \\ dA_t^0 \mathbb{1} = 0 & dA_t^0 dW_t = dW_t \\ dA_t^- \mathbb{1} = 0 & dA_t^- dW_t = dt \\ dA_t \mathbb{1} = dt & dA_t dW_t = 0. \end{cases}$$

Pour un $\varepsilon \in \{+, 0, -\}$, on se donne une intégrale d'opérateurs I_t^ε sur Φ et un vecteur $f \in \Phi$, de martingale associée $(f_t)_{t \geq 0}$ et de représentation prévisible $f = \mathbb{E}[f] + \int_0^\infty \dot{f}_s dW_s$. L'idée présentée dans [7] est que la famille adaptée $(I_t^\varepsilon f_t)_{t \geq 0}$ est une semimartingale qui doit vérifier une formule d'intégration par parties d'Ito

$$\begin{aligned} d(I_t^\varepsilon f_t) &= (dI_t^\varepsilon) f_t + I_t^\varepsilon(df_t) + (dI_t^\varepsilon)(df_t) \\ &= (H_t^\varepsilon dA_t^\varepsilon) f_t + I_t^\varepsilon(\dot{f}_t dW_t) + (H_t^\varepsilon dA_t^\varepsilon)(\dot{f}_t dW_t). \end{aligned}$$

Ce qui, dans la structure $\Phi_{t+dt} \simeq \Phi_t \otimes \Phi_{[t, t+dt]}$, s'écrit

$$\begin{aligned} d(I_t^\varepsilon f_t) &= (H_t^\varepsilon \otimes dA_t^\varepsilon)(f_t \otimes \mathbb{1}) + (I_t^\varepsilon \otimes I)(\dot{f}_t \otimes dW_t) + (H_t^\varepsilon \otimes dA_t^\varepsilon)(\dot{f}_t \otimes dW_t) \\ &= H_t^\varepsilon f_t \otimes dA_t^\varepsilon \mathbb{1} + I_t^\varepsilon \dot{f}_t \otimes dW_t + H_t^\varepsilon \dot{f}_t \otimes dA_t^\varepsilon dW_t. \end{aligned}$$

On obtient finalement l'équation

$$d(I_t^\varepsilon F_t) = I_t^\varepsilon \dot{f}_t dW_t + \begin{cases} H_t^+ f_t dW_t & \text{si } \varepsilon = + \\ H_t^0 \dot{f}_t dW_t & \text{si } \varepsilon = 0 \\ H_t^- f_t dt & \text{si } \varepsilon = - \\ H_t f_t dt & \text{si } \varepsilon = \cdot \end{cases}$$

Ce sont ces équations qui nous amènent à poser une nouvelle définition des intégrales stochastiques non commutatives, dont nous montrerons ensuite qu'elle est équivalente à celle de Hudson et Parthasarathy sur le domaine \mathcal{E}_{lb} .

Extension des intégrales stochastiques non commutatives

Supposons que $(T_t)_{t \geq 0}$ soit un processus d'opérateurs bornés de Φ dans Φ . Supposons que sur \mathcal{E}_{lb} les opérateurs T_t soient de la forme (2), pour des processus adaptés H^ε , $\varepsilon \in \{+, 0, -\}$, d'opérateurs bornés. Tous les opérateurs considérés étant bornés, ils sont définis sur tout Φ . La définition (3) des intégrales stochastiques non commutatives n'a, a priori, pas d'extension évidente en dehors du domaine \mathcal{E}_{lb} . Par contre, les équations intuitives obtenues plus haut ont un sens lorsque f est quelconque dans Φ . C'est ce qui nous amène à poser une nouvelle définition pour les intégrales stochastiques non commutatives.

Avant tout, il nous faut remarquer que la condition (1) peut s'écrire d'une autre manière. Pour tout $f \in \mathcal{E}_{lb}$, de martingale associée $(f_t)_{t \geq 0}$ et de représentation prévisible $f_t = c + \int_0^t \dot{f}_s dW_s$, la condition (1) s'écrit

$$(1') \quad \int_0^t \left(\|H_s^- \dot{f}_s\| + \|H_s^+ \dot{f}_s\|^2 + \|H_s f_s\| + \|H_s^0 \dot{f}_s\|^2 \right) ds < \infty$$

Définition : Un domaine $D \subset \Phi$ sera *admissible* s'il contient \mathcal{E}_{lb} et si pour tout $f \in D$, de martingale associée $(f_t)_{t \geq 0}$ et de représentation prévisible $f_t = c + \int_0^t \dot{f}_s dW_s$, on a $f_t \in D$ et $\dot{f}_t \in D$ pour (presque) tout t .

Définition : Soient H^ε , $\varepsilon \in \{+, 0, -\}$, des processus d'opérateurs définis sur un domaine admissible D , soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté d'opérateurs fermables définis sur D . Nous dirons que T_t admet la représentation (2) *étendue à D* si, pour tout $f \in D$, de martingale associée $(f_t)_{t \geq 0}$ et de représentation prévisible $f = \mathbb{E}[f] + \int_0^\infty \dot{f}_s dW_s$, les processus H^ε vérifient (1'), si $\int_0^t \|T_s \dot{f}_s\|^2 ds < \infty$ et si, pour tout t ,

$$(4) \quad T_t f_t = \int_0^t (T_s + H_s^0) \dot{f}_s dW_s + \int_0^t H_s^- \dot{f}_s ds + \int_0^t H_s^+ \dot{f}_s dW_s + \int_0^t H_s f_s ds .$$

Avant d'énoncer les résultats liés à cette définition, il nous appartient de vérifier que la relation (4), pour des processus H^ε donnés, détermine le processus T de manière unique. Ce résultat est en fait une conséquence du théorème qui suit. En effet, on va prouver que sur \mathcal{E}_{lb} , l'équation (4) est une équation différentielle stochastique classique qui admet une solution unique. L'espace \mathcal{E}_{lb} est dense dans D , l'opérateur T_t^* est densément défini (car T_t est fermable), donc la valeur de T_t sur D est déterminée par limites faibles de ses valeurs sur \mathcal{E}_{lb} .

Il faut aussi remarquer qu'un processus T n'admettra de représentation intégrale sur le domaine Φ que si tous les opérateurs considérés sont borné (en effet tout opérateur fermable dont le domaine est l'espace tout entier est borné).

Théorème 1 – *Sur le domaine admissible \mathcal{E}_{lb} la définition étendue (4) des intégrales stochastiques non commutatives est équivalente à la définition (3) de Hudson et Parthasarathy.*

Démonstration

Nous allons montrer que l'on peut passer de la forme "scalaire" (3) à la forme "vectorielle" (4). Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté d'opérateurs de Φ dans Φ , défini sur \mathcal{E}_{lb} , de la forme (2). Les processus H^ε vérifient (1), donc (1'). De plus, la condition $\int_0^t |u^2(s)| \|T_s \varepsilon(u_s)\|^2 ds < \infty$ est vérifiée (remarque 2). D'après

(3), on a pour tous u, v dans $L^2_b(\mathbb{R}^+)$,

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(u_t), T_t \varepsilon(v_t) \rangle &= \int_0^t \langle \varepsilon(u_s), u(s)v(s) H_s^0 \varepsilon(v_s) + v(s) H_s^- \varepsilon(v_s) + \\ &\quad + u(s) H_s^+ \varepsilon(v_s) + H_s \varepsilon(v_s) \rangle ds. \end{aligned}$$

Grâce à l'adaptation des opérateurs H_s^ε , $s \in [0, t]$ et à la structure de produit tensoriel continu $\Phi_t \simeq \Phi_s \otimes \Phi_{[s, t]}$, cette égalité s'écrit

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(u_t), T_t \varepsilon(v_t) \rangle &= \\ &= \int_0^t \langle \varepsilon(u_s), u(s)v(s) H_s^0 \varepsilon(v_s) + v(s) H_s^- \varepsilon(v_s) + u(s) H_s^+ \varepsilon(v_s) + H_s \varepsilon(v_s) \rangle \\ &\quad \langle \varepsilon(u_{[s, t]}), \varepsilon(v_{[s, t]}) \rangle ds. \\ &= \exp\left(\int_0^t u(s)v(s) ds\right) \int_0^t \left[\langle \varepsilon(u_s), u(s)v(s) H_s^0 \varepsilon(v_s) + v(s) H_s^- \varepsilon(v_s) + \right. \\ &\quad \left. + u(s) H_s^+ \varepsilon(v_s) + H_s \varepsilon(v_s) \rangle \exp\left(-\int_0^s u(r)v(r) dr\right) \right] ds. \end{aligned}$$

Ce que nous écrivons, pour simplifier un moment, sous la forme

$$\langle \varepsilon(u_t), T_t \varepsilon(v_t) \rangle = \exp\left(\int_0^t u(s)v(s) ds\right) \int_0^t \left[K(s) \exp\left(-\int_0^s u(r)v(r) dr\right) \right] ds.$$

Par différentiation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \varepsilon(u_t), T_t \varepsilon(v_t) \rangle &= \\ &= u(t)v(t) \exp\left(\int_0^t u(s)v(s) ds\right) \int_0^t \left[K(s) \exp\left(-\int_0^s u(r)v(r) dr\right) \right] ds + \\ &\quad + \exp\left(\int_0^t u(s)v(s) ds\right) K(t) \exp\left(-\int_0^t u(s)v(s) ds\right). \end{aligned}$$

D'où finalement

$$\langle \varepsilon(u_t), T_t \varepsilon(v_t) \rangle = \int_0^t u(s)v(s) \langle \varepsilon(u_s), T_s \varepsilon(v_s) \rangle ds + \int_0^t K(s) ds.$$

Quand u et v sont localement bornées, cette équation différentielle (ordinaire) admet une solution unique. Grâce à la forme de la représentation prévisible de $\varepsilon(u_t)$ et en remplaçant K_t par sa valeur, cette équation s'écrit

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(u_t), T_t \varepsilon(v_t) \rangle &= \langle \varepsilon(u_t), \int_0^t v(s) T_s \varepsilon(v_s) dW_s \rangle + \\ &+ \langle \varepsilon(u_t), \int_0^t v(s) H_s^0 \varepsilon(v_s) dW_s + \int_0^t v(s) H_s^- \varepsilon(v_s) ds + \int_0^t H_s^+ \varepsilon(v_s) dW_s + \\ &\quad + \int_0^t H_s \varepsilon(v_s) ds \rangle. \end{aligned}$$

L'espace \mathcal{E}_{1b} étant dense dans Φ , on peut éliminer les produits scalaires avec $\varepsilon(u_{t1})$ pour en déduire une égalité vectorielle. En notant que si $g_t = \varepsilon(v_{t1})$ on a $\dot{g}_s = v(s)\varepsilon(v_{s1})$, $s \leq t$, cette égalité prend la forme

$$T_t g_t = \int_0^t (T_s + H_s^0) \dot{g}_s dW_s + \int_0^t H_s^- \dot{g}_s ds + \int_0^t H_s^+ \dot{g}_s dW_s + \int_0^t H_s g_s ds.$$

Ce qui prouve le théorème dans un sens.

Réciproquement, sur \mathcal{E}_{1b} , l'équation (4) est une équation différentielle stochastique admettant une solution unique. En prenant le produit scalaire des deux membres de (4) avec un $\varepsilon(u_{t1})$, on voit facilement que l'on peut remonter la démonstration précédente jusqu'à (3). ■

Remarquons maintenant que, si on ajoute un terme initial à T_t , i.e. si T_t est de la forme $T_t = \lambda I + I_t^0 + I_t^- + I_t^+ + I_t$, alors, d'après le résultat précédent, nous avons

$$\begin{aligned} (T_t - \lambda I)g_t &= \\ &= \int_0^t (T_s - \lambda I + H_s^0) \dot{g}_s dW_s + \int_0^t H_s^- \dot{g}_s ds + \int_0^t H_s^+ \dot{g}_s dW_s + \int_0^t H_s g_s ds. \end{aligned}$$

C'est à dire

$$T_t g_t = \lambda E[g] + \int_0^t (T_s + H_s^0) \dot{g}_s dW_s + \int_0^t H_s^- \dot{g}_s ds + \int_0^t H_s^+ \dot{g}_s dW_s + \int_0^t H_s g_s ds.$$

Nous allons donner une condition suffisante pour qu'une indentité du type (4), vérifiée sur \mathcal{E}_{1b} , puisse être étendue à un domaine admissible D .

Théorème 2— Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté d'opérateurs de Φ dans Φ admettant une représentation intégrale du type (2) sur \mathcal{E}_{1b} , avec terme initial, pour des processus adaptés H^ε , $\varepsilon \in \{+, 0, -\}$. Supposons qu'il existe un domaine admissible D sur lequel sont définis tous les opérateurs et sur lequel sont vérifiées les conditions de normes (1') et $\int_0^t \|T_s \dot{f}_s\|^2 ds < \infty$.

Si les processus des adjoints $(H^\varepsilon)^*$ vérifient les conditions de normes de la remarque 3 alors la représentation intégrale de $(T_t)_{t \geq 0}$ est vraie au sens étendu (4) sur tout D .

Démonstration

Par le théorème 1, on a, pour tout $f \in \mathcal{E}_{1b}$,

$$T_t f_t = \lambda E[f] + \int_0^t (T_s + H_s^0) \dot{f}_s dW_s + \int_0^t H_s^- \dot{f}_s ds + \int_0^t H_s^+ \dot{f}_s dW_s + \int_0^t H_s f_s ds.$$

Notons $A(f_t)$ l'expression du second membre. Soit $f \in D$, soit $(f^n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite dans \mathcal{E}_{lb} qui converge vers f . Pour tout $g \in \mathcal{E}_{lb}$ on a

$$\begin{aligned} & | \langle g_t, T_t f_t - A(f_t) \rangle | \leq \\ & \leq | \langle g_t, T_t f_t - T_t f_t^n \rangle | + | \langle g_t, T_t f_t^n - A(f_t^n) \rangle | + | \langle g_t, A(f_t - f_t^n) \rangle | \\ & \leq \|T_t^* g_t\| \|f_t - f_t^n\| + | \langle g_t, A(f_t - f_t^n) \rangle | \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que l'application linéaire $f_t \mapsto \langle g_t, A(f_t) \rangle$ est continue.

$$\begin{aligned} & | \langle g_t, A(f_t) \rangle | \leq \\ & \leq | \langle g_t, \lambda f_t \rangle | + \int_0^t | \langle \dot{g}_s, T_s \dot{f}_s \rangle | ds + \int_0^t | \langle \dot{g}_s, H_s^0 \dot{f}_s \rangle | ds + \\ & \quad + \int_0^t | \langle g_t, H_s^- \dot{f}_s \rangle | ds + \int_0^t | \langle \dot{g}_s, H_s^+ f_s \rangle | ds + \int_0^t | \langle g_t, H_s f_s \rangle | ds. \end{aligned}$$

En passant à l'adjoint dans tous les produits scalaires et en appliquant l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} & | \langle g_t, A(f_t) \rangle | \leq \\ & \leq \|g_t\| |\lambda| \|f_t\| + \int_0^t \|T_s^* \dot{g}_s\| \|\dot{f}_s\| ds + \int_0^t \|(H_s^0)^* \dot{g}_s\| \|\dot{f}_s\| ds + \\ & \quad + \int_0^t \|(H_s^-)^* g_t\| \|\dot{f}_s\| ds + \int_0^t \|(H_s^+)^* \dot{g}_s\| \|f_t\| ds + \int_0^t \|H_s^* g_t\| \|f_t\| ds \\ & \leq \left[\|g_t\| |\lambda| + \int_0^t \|(H_s^+)^* \dot{g}_s\| ds + \int_0^t \|H_s^* g_t\| ds + \left(\int_0^t \|T_s^* \dot{g}_s\|^2 ds \right)^{1/2} + \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^t \|(H_s^0)^* \dot{g}_s\|^2 ds \right)^{1/2} + \left(\int_0^t \|(H_s^-)^* g_t\|^2 ds \right)^{1/2} \right] \|f_t\|. \end{aligned}$$

On conclut grâce aux remarques 3 et 2 et à la fermabilité de T_t (son adjoint est densément défini). ■

Ce que l'on peut retirer de cette démonstration c'est que si T et T^* admettent une représentation intégrale du type (4) sur \mathcal{E}_{lb} , alors l'identité (4) pour T et T^* s'étend à tout vecteur f tel que les deux membres de (4) soient bien définis.

Nous disposons donc d'une extension des intégrales stochastiques non commutatives, ainsi que de conditions suffisantes pour pouvoir l'appliquer. L'équation (4) donne la valeur d'une intégrale étendue appliquée à un vecteur de la forme $\int_0^t g_s dW_s$. Mais il arrive parfois que des vecteurs de Φ apparaissent plus naturellement sous la forme $\int_0^t v_s ds$. C'est ce qui motive le résultat suivant, qui est un élément important pour la formule d'Ito non commutative présentée plus loin.

Proposition 3 – Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un processus d'opérateurs bornés admettant une représentation intégrale étendue sur tout Φ . Soit g un élément de Φ_t de la forme $g = \int_0^t v_s ds$, où v_s est dans Φ_s pour presque tout s . Alors, si on pose $g^s = \int_0^s v_u du$,

$$T_t g_t = \int_0^t T_s v_s ds + \int_0^t (H_s^+ + H_s) g^s ds.$$

Démonstration

Pour presque tout s , le vecteur v_s admet une représentation prévisible $v_s = c + \int_0^s h(s, u) dW_u$. Par la formule (4), on a

$$\begin{aligned} T_t g_t &= \int_0^t T_t v_s ds = \int_0^t \left[\int_0^s T_u h(s, u) dW_u + \int_0^s H_u^0 h(s, u) dW_u + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^s H_u^- h(s, u) du + \int_0^s H_u^+ \mathbb{E}_u v_s dW_u + \int_0^s H_u \mathbb{E}_u v_s du \right] ds \\ &= \int_0^t \left[T_s v_s + \int_s^t H_u^+ v_s dW_u + \int_s^t H_u v_s du \right] ds. \end{aligned}$$

En intervertissant les intégrales doubles on obtient

$$T_t g_t = \int_0^t T_s v_s ds + \int_0^t \int_0^s H_s^+ v_u du dW_s + \int_0^t \int_0^s H_s v_u du ds.$$

Ce qui permet de conclure (rappelons que les opérateurs H_s^+ et H_s sont forcément bornés) . ■

Extension de la formule d'Ito non commutative

Nous allons d'abord présenter intuitivement ce que pourrait être une formule d'intégration par parties pour les intégrales stochastiques non commutatives. Nous énoncerons ensuite sa forme rigoureuse donnée dans [4], puis nous verrons comment elle s'étend dans notre nouveau cadre.

Pour $\varepsilon, \varepsilon'$ dans $\{+, 0, -\}$, soient I_t^ε et $I_t^{\varepsilon'}$ deux intégrales stochastiques non commutatives par rapport à A^ε et à $A^{\varepsilon'}$ respectivement. Une formulation intuitive d'une formule d'Ito dans ce contexte serait :

$$\begin{aligned} (5) \quad d(I_t^\varepsilon I_t^{\varepsilon'}) &= (dI_t^\varepsilon) I_t^{\varepsilon'} + I_t^\varepsilon (dI_t^{\varepsilon'}) + (dI_t^\varepsilon) (dI_t^{\varepsilon'}) \\ &= H_t^\varepsilon I_t^{\varepsilon'} dA_t^\varepsilon + I_t^\varepsilon H_t^{\varepsilon'} dA_t^{\varepsilon'} + H_t^\varepsilon H_t^{\varepsilon'} dA_t^\varepsilon dA_t^{\varepsilon'}. \end{aligned}$$

Les différentes valeurs de $dA_t^\varepsilon dA_t^{\varepsilon'}$ peuvent être prévues grâce à la table donnant les valeurs des $dA_t^\varepsilon \mathbb{1}$ et des $dA_t^\varepsilon dW_t$. On voit alors que les seuls produits $dA_t^\varepsilon dA_t^{\varepsilon'}$ non nuls sont

$$\begin{cases} dA^0 dA^0 = dA^0 \\ dA^- dA^0 = dA^- \\ dA^0 dA^+ = dA^+ \\ dA^- dA^+ = dt. \end{cases}$$

Cette table définit un produit $(\varepsilon, \varepsilon') \mapsto \varepsilon \cdot \varepsilon'$ de $\{+, o, -, \emptyset\}$ dans $\{+, o, -, \emptyset\}$, tel que $dA_t^\varepsilon dA_t^{\varepsilon'} = dA_t^{\varepsilon \cdot \varepsilon'}$, avec la convention $dA_t^\emptyset = 0$. Notons, pour tout u dans $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+)$, u^ε la fonction qui vaut u si $\varepsilon = +, o$, et $\mathbb{1}$ si $\varepsilon = -, \emptyset$. Notons u_ε la fonction qui vaut u si $\varepsilon = -, o$, et $\mathbb{1}$ si $\varepsilon = +, \emptyset$. Nous conviendrons que $u^\emptyset = u_\emptyset = 0$.

Avec ces notations et la formule (3), la formule d'Ito (5) prend la forme :

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(u_{t_1}), I_t^\varepsilon I_t^{\varepsilon'} \varepsilon(v_{t_1}) \rangle &= \int_0^t u^\varepsilon(s) v_\varepsilon(s) \langle \varepsilon(u_{t_1}), H_s^\varepsilon I_s^{\varepsilon'} \varepsilon(v_{t_1}) \rangle ds + \\ &\quad + \int_0^t u^{\varepsilon'}(s) v_{\varepsilon'}(s) \langle \varepsilon(u_{t_1}), I_s^\varepsilon H_s^{\varepsilon'} \varepsilon(v_{t_1}) \rangle ds + \\ &\quad + \int_0^t u^{\varepsilon \cdot \varepsilon'}(s) v_{\varepsilon \cdot \varepsilon'}(s) \langle \varepsilon(u_{t_1}), H_s^\varepsilon H_s^{\varepsilon'} \varepsilon(v_{t_1}) \rangle ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad \langle (I_t^\varepsilon)^* \varepsilon(u_{t_1}), I_t^{\varepsilon'} \varepsilon(v_{t_1}) \rangle &= \int_0^t u^\varepsilon(s) v_\varepsilon(s) \langle (H_s^\varepsilon)^* \varepsilon(u_{t_1}), I_s^{\varepsilon'} \varepsilon(v_{t_1}) \rangle ds + \\ &\quad + \int_0^t u^{\varepsilon'}(s) v_{\varepsilon'}(s) \langle (I_s^\varepsilon)^* \varepsilon(u_{t_1}), H_s^{\varepsilon'} \varepsilon(v_{t_1}) \rangle ds + \\ &\quad + \int_0^t u^{\varepsilon \cdot \varepsilon'}(s) v_{\varepsilon \cdot \varepsilon'}(s) \langle (H_s^\varepsilon)^* \varepsilon(u_{t_1}), H_s^{\varepsilon'} \varepsilon(v_{t_1}) \rangle ds. \end{aligned}$$

Dans le cadre général de [4], il n'est pas possible de composer les opérateurs. En effet, ils ne sont définis que sur \mathcal{E}_{lb} , or rien ne garantit la stabilité de cet espace sous l'action de ces opérateurs. Aussi la seule forme de formule d'Ito qui ait un sens dans le contexte très général de Hudson et Parthasarathy est l'équation (6). Cette équation est justement la forme que donne le théorème de Hudson et Parthasarathy à la formule d'intégration par parties non commutative.

Lorsque l'on se place dans le cadre restreint des intégrales étendues au domaine admissible Φ , on peut espérer obtenir une formule du type (5), car on ne travaille qu'avec des opérateurs définis sur tout Φ donc *composables*. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 4 – *La formule d'Ito non commutative (5), présentée ci dessus, est vraie dans le cadre des intégrales stochastiques non commutatives partout définies.*

Démonstration

Soient, $T_t = \lambda I + I_t^o + I_t^- + I_t^+ + I_t$ et $T_t' = \lambda' I + I_t'^o + I_t'^- + I_t'^+ + I_t'$ des intégrales d'opérateurs *étendues* à tout Φ . On a donc, pour tout $f \in \Phi$ de martingale associée $(f_t)_{t \geq 0}$ et de représentation prévisible $f = \mathbb{E}[f] + \int_0^\infty \dot{f}_s dW_s$,

$$\begin{aligned} T_t' f_t &= \\ &= \lambda' \mathbb{E}[f] + \int_0^t (T_s' + H_s'^o) \dot{f}_s dW_s + \int_0^t H_s'^- \dot{f}_s ds + \int_0^t H_s'^+ f_s dW_s + \int_0^t H_s' f_s ds. \end{aligned}$$

Pour tout t , on note $h_t^{\circ} = (T_t' + H_t^{\circ})\dot{f}_t$, $h_t^{'+} = H_t^{'+}f_t$, $h_t'^{-} = H_t'^{-}\dot{f}_t$ et $h_t' = H_t'f_t$.
On a donc

$$\begin{aligned} T_t T_t' F_t &= T_t \left[\lambda' \mathbb{E}[F] + \int_0^t [h_s^{\circ} + h_s^{'+}] dW_s \right] + T_t \left[\int_0^t h_s'^{-} ds + \int_0^t h_s' ds \right] \\ &= \lambda \lambda' \mathbb{E}[F] + \int_0^t (T_s + H_s^{\circ}) (h_s^{\circ}) dW_s + \int_0^t (T_s + H_s^{\circ}) h_s^{'+} dW_s + \\ &+ \int_0^t H_s^- (h_s^{\circ}) ds + \int_0^t H_s^- h_s^{'+} ds + \int_0^t H_s^+ \left[\lambda' \mathbb{E}[F] + \int_0^s [h_u^{\circ} + h_u^{'+}] dW_u \right] dW_s + \\ &+ \int_0^t H_s \left[\lambda' \mathbb{E}[F] + \int_0^s [(h_u^{\circ}) + h_u^{'+}] dW_u \right] ds + T_t \left[\int_0^t h_s'^{-} ds + \int_0^t h_s' ds \right]. \end{aligned}$$

Mais, par la proposition 3, on a, pour le dernier terme de cette égalité,

$$\begin{aligned} T_t \int_0^t [h_s'^{-} + h_s'] ds &= \int_0^t T_s [h_s'^{-} + h_s'] ds + \\ &+ \int_0^t H_s^+ \int_0^s [h_u'^{-} + h_u'] du dW_s + \int_0^t H_s \int_0^s [h_u'^{-} + h_u'] du ds. \end{aligned}$$

Lorsque l'on retourne à l'équation initiale, on a ainsi

$$\begin{aligned} T_t T_t' F_t &= \\ &= \lambda \lambda' \mathbb{E}[F] + \int_0^t (T_s + H_s^{\circ}) (h_s^{\circ}) dW_s + \int_0^t (T_s + H_s^{\circ}) h_s^{'+} dW_s + \int_0^t H_s^- (h_s^{\circ}) ds + \\ &+ \int_0^t H_s^- h_s^{'+} ds + \int_0^t H_s^+ \left[\lambda' \mathbb{E}[F] + \int_0^s [h_u^{\circ} + h_u^{'+}] dW_u + \int_0^s h_u'^{-} du + \int_0^s h_u' du \right] dW_s \\ &+ \int_0^t H_s \left[\lambda' \mathbb{E}[F] + \int_0^s [h_u^{\circ} + h_u^{'+}] dW_u + \int_0^s h_u'^{-} du + \int_0^s h_u' du \right] ds + \\ &+ \int_0^t T_s h_s'^{-} ds + \int_0^t T_s h_s' ds. \end{aligned}$$

En remplaçant les h^{ϵ} par leur valeur, on a

$$\begin{aligned} T_t T_t' F_t &= \lambda \lambda' \mathbb{E}[F] + \int_0^t (T_s T_s' + H_s^{\circ} T_s' + T_s H_s^{\circ} + H_s^{\circ} H_s^{\circ}) \dot{F}_s dW_s \\ &+ \int_0^t (H_s^- T_s' + T_s H_s'^{-} + H_s^- H_s^{\circ}) \dot{F}_s ds + \int_0^t (H_s^+ T_s' + T_s H_s^{'+} + H_s^{\circ} H_s^{'+}) F_s dW_s + \\ &+ \int_0^t (H_s T_s' + T_s H_s') F_s ds + \int_0^t H_s^- H_s^{'+} F_s ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_t T_t' F_t = & \left[\lambda \lambda' I + \int_0^t (H_s^\circ T_s' + T_s H_s'^\circ + H_s^\circ H_s'^\circ) dA_s^\circ + \right. \\
& + \int_0^t (H_s^- T_s' + T_s H_s'^- + H_s^- H_s'^\circ) dA_s^- + \int_0^t (H_s^+ T_s' + T_s H_s'^+ + H_s^\circ H_s'^+) dA_s^+ + \\
& \left. + \int_0^t (H_s T_s' + T_s H_s') ds + \int_0^t H_s^- H_s'^+ ds \right] F_t.
\end{aligned}$$

Ce qui démontre l'extension de la formule d'Ito non commutative. ■

Théorème 5— Soit \mathcal{S} l'ensemble des processus adaptés $(T_t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs bornés et représentables sous la forme (2) (avec terme initial), pour des processus H^e d'opérateurs bornés tels que

$t \mapsto \|H_t\|$ est localement intégrable

$t \mapsto \|H_t^-\|$ et $t \mapsto \|H_t^+\|$ sont localement de carré intégrable

$t \mapsto \|H_t^\circ\|$ est localement bornée

(\mathcal{S} est donc un ensemble de semimartingales non commutatives régulières).

Alors \mathcal{S} est une algèbre pour la composition.

Démonstration

Par le théorème 2, un élément de \mathcal{S} admet une représentation intégrale étendue sur Φ . On peut donc composer les éléments de \mathcal{S} . Leur composition vérifie l'extension de la formule d'Ito non commutative. Il est facile de vérifier sur la dernière égalité de la démonstration du théorème 4 que, si deux semimartingales non commutatives ont une norme localement bornée et vérifient les conditions de normes de l'énoncé, alors leur composé les vérifie aussi.

Il suffit donc de montrer que pour tout élément $(T_t)_{t \geq 0}$ de \mathcal{S} on a que $t \mapsto \|T_t\|$ est localement bornée.

Intéressons-nous d'abord au terme de la forme $\int_0^t H_s ds$ apparaissant dans la représentation intégrale de T . Par l'équation (3), on a, pour tout $u, v \in L_{lb}^2(\mathbb{R}^+)$,

$$\langle \varepsilon(v_t), \int_0^t H_s ds \varepsilon(u_t) \rangle = \langle \varepsilon(v_t), \int_0^t H_s \varepsilon(u_t) ds \rangle,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^t H_s ds \varepsilon(u_t) = \int_0^t H_s \varepsilon(u_t) ds.$$

Donc nous avons l'estimation

$$\left\| \int_0^t H_s ds \varepsilon(u_t) \right\| \leq \left(\int_0^t \|H_s\| ds \right) \|\varepsilon(u_t)\|.$$

Ceci prouve que $\int_0^t H_s ds$ est un opérateur borné sur \mathcal{E}_{I_b} , avec une norme localement bornée en t ; il peut donc être étendu en un opérateur borné sur Φ , avec une norme localement bornée en t .

Le processus Y défini par $Y_t = T_t - \int_0^t H_s ds$, $t \in \mathbb{R}^+$, est une martingale d'opérateurs bornés. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ fixé, tout $s \leq t$ et $f_s \in \Phi_s$, $\mathbb{E}_s Y_t f_s = Y_s f_s$ (par définition des martingales d'opérateurs). Donc $\|Y_s\| \leq \|Y_t\|$. Ce qui prouve que toutes martingale d'opérateurs bornés a une norme localement bornée en t .

Nous avons donc montré que tous les éléments de \mathcal{S} ont une norme localement bornée. Ceci achève de démontrer le théorème. ■

III Applications

La première application de cette extension a été donnée dans [1]. Dans cet article sont étudiées les transformations \tilde{T} de (Ω, \mathcal{F}, P) qui préservent P et telles que le mouvement brownien $(\tilde{W}_t)_{t \geq 0}$, image de $(W_t)_{t \geq 0}$ par \tilde{T} soit un mouvement brownien pour $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. L'opérateur associé sur $L^2(\Omega)$, $T F = F \circ \tilde{T}$, $F \in L^2(\Omega)$, est une isométrie, morphisme de l'algèbre $L^\infty(\Omega)$, qui commute avec les espérances conditionnelles $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_t]$ de la filtration canonique.

Dans cet article est donnée une caractérisation simple et complète de ces opérateurs grâce au calcul stochastique non commutatif.

On voit bien ici que ce problème concerne des opérateurs bornés et que l'on s'intéresse à leur valeur sur tout Φ . D'autre part, la démonstration de ces résultats utilise plusieurs fois une récurrence sur la valeur d'une intégrale stochastique non commutative appliquée à des éléments des différents chaos de Φ . Ces résultats n'auraient pas pu être obtenu sans l'extension des intégrales non commutatives.

Une autre application de cette extension apparaît dans [3]. Dans cet article sont étudiés les opérateurs de Hilbert-Schmidt sur Φ . Il y est montré que ces opérateurs admettent tous une décomposition chaotique non commutative, i.e. ils sont représentables en une série d'intégrales itérées de la forme

$$\int_0^\infty \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} f(t_1, \dots, t_n) I dA_{t_1}^{\varepsilon_1} \dots dA_{t_n}^{\varepsilon_n}, \quad \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{+, 0, -\}.$$

La convergence de cette série est montrée au sens fort sur un domaine dense de Φ , contenant strictement \mathcal{E}_{I_b} . Elle est montrée au sens faible sur un domaine encore plus grand.

Sans l'extension des intégrales stochastiques non commutatives, nous n'aurions pu avoir que des convergences au sens faible et sur \mathcal{E}_{I_b} seulement.

Extension du calcul stochastique classique

La dernière application que nous présentons ici traite des liens entre le calcul stochastique non commutatif et le calcul stochastique classique. Plus exactement du premier en tant que généralisation du second.

Il est déjà connu que l'opérateur T_t de multiplication par l'intégrale stochastique $\int_0^t h_s dw_s$, pour un processus prévisible $(h_t)_{t \geq 0}$, est représentable en intégrales stochastiques non commutatives sous la forme

$$T_t = \int_0^t H_s dA_s^- + \int_0^t H_s dA_s^+,$$

où H_s est l'opérateur de multiplication par h_s , $s \in \mathbb{R}^+$. Nous allons voir ici que d'autres opérateurs fondamentaux du calcul stochastique classique peuvent être représentés en intégrales stochastiques non commutatives. Cette représentation a l'avantage de montrer le rôle classique joué par chacune des intégrales $\int_0^t H_s^\varepsilon dA_s^\varepsilon$, $\varepsilon \in \{+, 0, -\}$, dans certains cas particuliers. Cela donne une intuition probabiliste de l'action qu'une intégrale $\int_0^t H_s^\varepsilon dA_s^\varepsilon$ est censée généraliser.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $(h_t)_{t \geq 0}$ un processus prévisible borné, soit $(n_t)_{t \geq 0}$ une semimartingale dont le terme à variation bornée est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, c'est à dire

$$n_t = c + \int_0^t n_s dw_s + \int_0^t p_s ds, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Soit $(m_t)_{t \geq 0}$ une martingale de représentation prévisible $m_t = c' + \int_0^t m_s dw_s$ et telle que (presque) chacune des variables aléatoires m_s soit bornée.

Soit Φ_b le sous-espace des variables aléatoires de Φ qui sont bornées. Sous les conditions posées ci-dessus, on peut définir sur Φ_b , pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, les quatre opérateurs fondamentaux suivants :

$$\begin{aligned} E^\lambda &: x \longmapsto \lambda E[x] \\ I_h^t &: x \longmapsto \int_0^t h_s dx_s \\ J_t^n &: x \longmapsto \int_0^t x_s dn_s \\ C_t^m &: x \longmapsto \langle x, m \rangle_t, \end{aligned}$$

où $\langle x, m \rangle_t$ désigne le crochet de x et de m .

Soit H_t l'opérateur de multiplication par h_t , \dot{N}_t l'opérateur de multiplication par n_t , P_t l'opérateur de multiplication par p_t et \dot{M}_t l'opérateur de multiplication par m_t , $t \in \mathbb{R}^+$.

Proposition 6 - L'opérateur adapté $T_t = E^\lambda + I_h^t + J_t^n + C_t^m$, défini sur $\Phi_b \cap \Phi_{[t]}$, est représentable en intégrales stochastiques non commutatives sur tout Φ_b , avec

$$T_t = \lambda I + \int_0^t (H_s - T_s) dA_s^0 + \int_0^t \dot{N}_s dA_s^+ + \int_0^t P_s ds + \int_0^t \dot{M}_s dA_s^-.$$

Démonstration

Si $T_t = E^\lambda + I_h^t + J_t^n + C_t^m$, alors, pour tout $x \in \Phi_b$,

$$\begin{aligned}
 T_t x_t &= \lambda \mathbb{E}[x] + \int_0^t h_s dx_s + \int_0^t x_s dn_s + \langle x, m \rangle_t \\
 &= \lambda \mathbb{E}[x] + \int_0^t h_s x_s dw_s + \int_0^t x_s n_s dw_s + \int_0^t x_s p_s ds + \int_0^t \dot{x}_s m_s ds \\
 &= \lambda \mathbb{E}[x] + \int_0^t H_s x_s dw_s + \int_0^t \dot{N}_s x_s dw_s + \int_0^t P_s x_s ds + \int_0^t \dot{M}_s x_s ds \\
 &= \lambda \mathbb{E}[x] + \int_0^t T_s x_s dw_s + \int_0^t (H_s - T_s) x_s dw_s + \int_0^t \dot{N}_s x_s dw_s + \\
 &\quad + \int_0^t P_s x_s ds + \int_0^t \dot{M}_s x_s ds.
 \end{aligned}$$

Ce qui, d'après la définition (4) de l'extension des intégrales stochastiques non commutatives, veut exactement dire que

$$T_t = \lambda I + \int_0^t (H_s - T_s) dA_s^{\circ} + \int_0^t \dot{N}_s dA_s^+ + \int_0^t P_s ds + \int_0^t \dot{M}_s dA_s^-. \quad \blacksquare$$

Références

- [1] ATTAL (S.) : "Représentation des endomorphismes de l'espace de Wiener qui préservent les martingales", prépublication.
- [2] ATTAL (S.) : "Problèmes d'unicité dans les représentations d'opérateurs sur l'espace de Fock" *Séminaire de probabilités XXVI*, Springer Verlag, p. 619-632, 1993.
- [3] ATTAL (S.) : "Non-commutative chaotic expansion of Hilbert-Schmidt operators on Fock space", prépublication.
- [4] HUDSON (R.L.) & PARTHASARATHY (K.R.) : "Quantum Itô's formula and stochastic evolutions", *Comm. Math. Phys.* 93, p 301-323, 1984.
- [5] MEYER (P.A.) : "Quelques remarques au sujet du calcul stochastique sur l'espace de Fock", *Séminaire de Probabilités XX*, Springer Verlag, p. 321-330, 1986.
- [6] MEYER (P.A.) : "Eléments de probabilités quantiques", *Séminaire de Probabilités XX*, Springer Verlag, p 186-312, 1986.
- [7] MEYER (P.A.) : "Quantum probability for probabilists", L.N.M. 1538, Springer (1993).